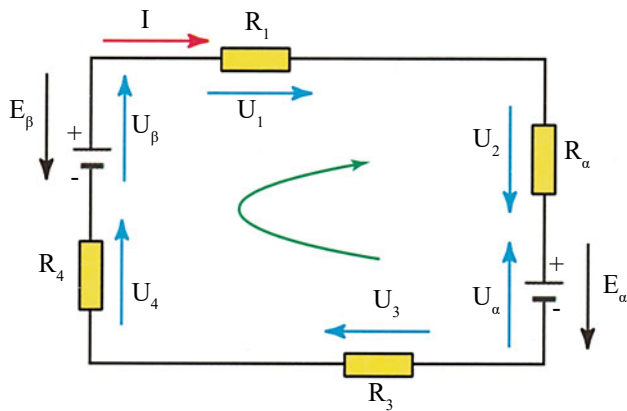


ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΝΟΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ



3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το κεφάλαιο αυτό εξηγεί τις ιδιότητες των κυκλωμάτων που περιλαμβάνουν αντιστάσεις και πηγές συνδεδεμένες σε σειρά, παράλληλα, σε αστέρα, σε τρίγωνο ή σε σύνθετες (μικτές) συνδεσμολογίες, οι οποίες περιέχουν τμήματα συνδεδεμένα κατά διαφόρους τρόπους.

Επίσης αναλύει την επίλυση των κυκλωμάτων στα οποία συμπεριλαμβάνονται και οι υπολογισμοί των πτώσεων τάσεων, των ρευμάτων και της ισχύος στους διάφορους κλάδους και στα στοιχεία των κλάδων των κυκλωμάτων, με την βοήθεια των δύο νόμων του Κίρκωφ.

Τέλος, παρουσιάζει εφαρμογές ηλεκτρικών κυκλωμάτων όλων των παραπάνω συνδεσμολογιών όπως συνδεσμολογίες λαμπτήρων, θερμαντικών σωμάτων κ.α.

3.2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

Πολλές εφαρμογές με βιομηχανικές και οικιακές συσκευές και διάταξεις, αποτελούνται από ηλεκτρικά κυκλώματα, που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία ωμική αντίσταση και πηγή, και οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους κατά πολλούς τρόπους.

Τέτοιες σύνθετες συνδεσμολογίες με αγωγούς σύνδεσης μεταξύ των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος, όπως πηγές και καταναλωτές, σχηματίζουν κλειστές διαδρομές, που ονομάζονται βρόχοι.

Ένας **βρόχος** είναι η κλειστή διαδρομή που ξεκινάει από ένα σημείο, ακολουθεί διάφορα στοιχεία του κυκλώματος για μια μόνο φορά και επιστρέφει στο αρχικό σημείο.

Ο βρόχος είναι μια κλειστή διαδρομή σε ένα κύκλωμα.

Για την ακρίβεια, ένας **κλάδος** του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι ένα απλό στοιχείο όπως μια πηγή τάσης ή μία αντίσταση. Συνηθίζεται όμως να ονομάζεται **κλάδος** μια ομάδα περισσότερων στοιχείων, που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.

Ένας βρόχος αποτελείται από δύο ή περισσότερους κλάδους.

Μια ομάδα στοιχείων, που διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, αποτελεί ένα κλάδο.

Ο κόμβος είναι το σημείο ένωσης δύο ή περισσότερων κλάδων και περιλαμβάνει όλα τα σημεία, που έχουν το ίδιο δυναμικό τάσης. Δείχνεται με μία τελεία όπως το σημείο Α στο Σχήμα 3.1. Όταν ένας αγωγός συνδέει δύο κόμβους, τότε οι κόμβοι αυτοί είναι ισοδύναμοι και στην πράξη ταυτίζονται σε ένα και μοναδικό κόμβο, ακόμη και αν δείχνονται με δύο τελείες.

Μεταξύ δύο κόμβων προσδιορίζεται ένας κλάδος, ενώ στον ίδιο κλάδο δεν είναι δυνατόν να υπάρχει άλλος κόμβος εκτός των δύο ακραίων κόμβων.

Στο Σχήμα 3.2.α απεικονίζεται ένας βρόχος με δύο κλάδους Α-Β και Γ-Δ.

Η πολυπλοκότητα ενός κυκλώματος προκύπτει από τον αριθμό των βρόχων:

- ένας βρόχος προσδιορίζει ένα **απλό κύκλωμα**,
- πολλοί βρόχοι αποτελούν ένα **σύνθετο κύκλωμα ή δίκτυο**.

Στα επόμενα σχήματα του παρόντος κεφαλαίου θα παρουσιαστούν πολλά ηλεκτρικά κυκλώματα τόσο απλά, όσο και σύνθετα, με διάφορους συνδυασμούς κλάδων και βρόχων.

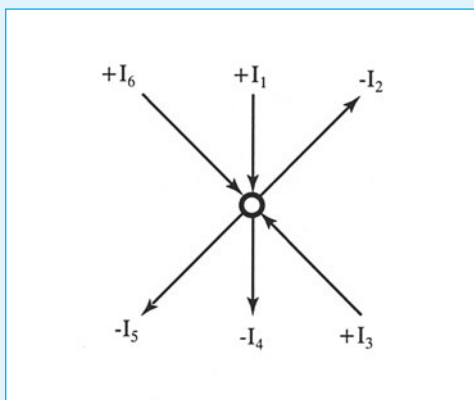
3.3. ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΚΙΡΚΩΦ

Ο πρώτος νόμος του Κίρκωφ διατυπώνεται ως εξής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων, που συγκλίνουν σε ένα οποιοδήποτε κόμβο από όλους τους συνδεδεμένους κλάδους στον κόμβο αυτό, ισούται με το μηδέν.

$$\sum_{\kappa} I = 0$$

Με τον όρο «συγκλίνουν» εννοούμε ότι τα ρεύματα εξέρχονται από τον κόμβο ή εισέρχονται στον κόμβο. Η θετική φορά των ρευμάτων είναι όταν εισέρχονται στον κόμβο και η αρνητική φορά όταν εξέρχονται από τον κόμβο, σχήμα 3.1. Επίσης, με τον όρο «αλγεβρικό άθροισμα» εννοούμε ότι προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ρεύματα ανάλογα με τη φορά που έχουν από και προς τον κόμβο.



Σχήμα 3.1. Ο πρώτος νόμος του Κίρκωφ στον κόμβο A: $+I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 = 0$

Στο Σχήμα 3.1, τα ρεύματα I_2 , I_4 και I_5 «εξέρχονται» από τον κόμβο A προς τα έξω, επομένως έχουν αρνητική φορά και αρνητικό πρόσημο, ενώ τα ρεύματα I_1 , I_3 και I_6 «εισέρχονται» στον κόμβο A, επομένως έχουν θετική φορά και θετικό πρόσημο. Έτσι, ο πρώτος νόμος του Κίρκωφ στον κόμβο A γράφεται:

$$+I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

Ο πρώτος νόμος του Κίρκωφ ονομάζεται συχνά **νόμος ρεύματος του Κίρκωφ ή NPK**.

Παράδειγμα 1

Γράψτε τον πρώτο νόμο του Κίρκωφ για το κύκλωμα του σχήματος 3.1. όπου $I_1=5\text{A}$, $I_2=3\text{A}$, $I_3=12\text{A}$, $I_4=11\text{A}$, $I_6=10\text{A}$. Υπολογίστε το ρεύμα I_5 .

Λύση:

$$+I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$I_5 = +I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_6$$

$$I_5 = 5 \text{ A} - 3 \text{ A} + 12 \text{ A} - 11 \text{ A} + 10 \text{ A} = 13 \text{ A}$$

3.4. ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΚΙΡΚΩΦ

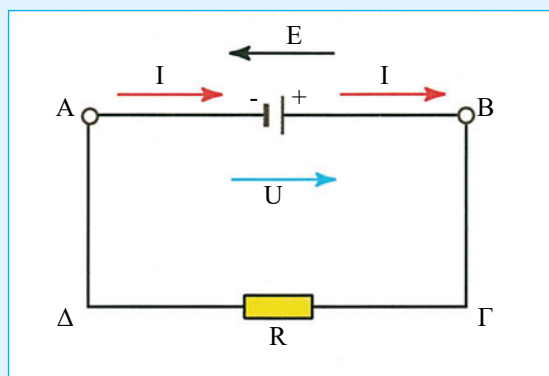
Η γενική διατύπωση του δεύτερου νόμου του Κίρκωφ είναι:

Το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης και των πτώσεων τάσης στις αντιστάσεις σε ένα κλειστό κύκλωμα ισούται με το μηδέν.

$$\sum_{\beta} U = 0$$

Με τον όρο «αλγεβρικό άθροισμα» εννοούμε ότι προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις τάσεις σύμφωνα με την πολικότητά τους.

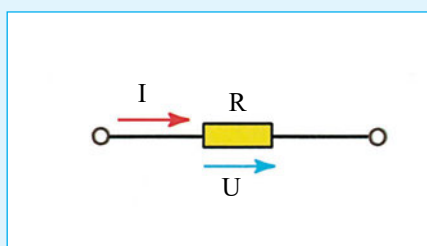
Η κίνηση των ηλεκτρονίων του ηλεκτρικού φορτίου γίνεται από το (-) στο (+), επομένως είναι ίδια με την πόλωση της πηγής και μας δίνει την **φορά της πόλωσης**. Η φορά πόλωσης της τάσης μίας πηγής είναι θετική, όταν συμβολίζεται με βέλος από τον αρνητικό πόλο προς τον θετικό πόλο. Κατά τον ίδιο τρόπο η φορά του ρεύματος είναι θετική, όταν συμβολίζεται με βέλος από τον αρνητικό πόλο της πηγής τάσης προς τον θετικό πόλο περνώντας μέσα από την πηγή. Αντιθέτως, η φορά της ηλεκτρεγερτικής δύναμης είναι θετική όταν συμβολίζεται με βέλος από τον θετικό πόλο της πηγής προς τον αρνητικό. Σχήμα 3.2.α.



Σχήμα 3.2.α. Βρόχος ηλεκτρικού κυκλώματος και φορά της πόλωσης: θετική φορά τάσης και θετική φορά ρεύματος μέσα από την πηγή από το (-) στο (+), θετική φορά ηλεκτρεγερτικής δύναμης από το (+) στο (-)

Στην ηλεκτρολογία χρησιμοποιείται η **συμβατική φορά του ρεύματος (τεχνική)**, η οποία συμβολίζεται με βέλος που ξεκινά από τον θετικό πόλο της μπαταρίας συνεχίζει στο εξωτερικό κύκλωμα και καταλήγει στον αρνητικό πόλο, δηλαδή από το (+) στο (-), Σχήμα 3.2.α.

Η φορά της πτώσης τάσης σε μία αντίσταση θεωρείται ότι είναι θετική όταν είναι ίδια με την φορά του ρεύματος, Σχήμα 3.2.β.



Σχήμα 3.2.β. Η θετική φορά της πτώσης τάσης σε μια αντίσταση συμπίπτει με τη θετική φορά του ρεύματος

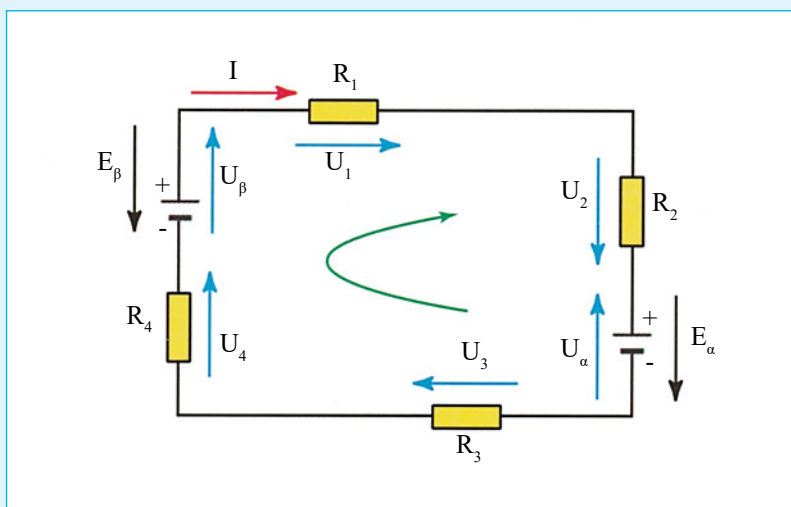
Προσοχή: Σε περίπτωση που, από τους υπολογισμούς, ένα ή περισσότερα ρεύματα ή και τάσεις προκύψουν αρνητικά, αυτό σημαίνει ότι έχουν οριστεί λάθος οι φορές τους.

Μια εξίσου συνηθισμένη διατύπωση του δεύτερου νόμου του Κίρκωφ είναι:

Το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσεων στις αντιστάσεις ενός κλειστού κυκλώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων των πηγών τάσης, Σχήμα 3.2.

$$\sum_{\beta} R \cdot I = \sum_{\beta} E$$

Ο δεύτερος νόμος του Κίρκωφ ονομάζεται συχνά **νόμος τάσης του Κίρκωφ ή NTK**.



Σχήμα 3.2. Όλες οι πτώσεις τάσης αθροίζονται αλγεβρικά και το άθροισμά τους ισούται με το μηδέν (2ος νόμος του Κίρκωφ)

Σημείωση: Για την κατάστρωση του NTK χρησιμοποιούμε είτε πολικές τάσεις U , είτε ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις E .

Παράδειγμα 1

Γράψτε το δεύτερο νόμο του Κίρκωφ για το κύκλωμα του σχήματος 3.2. όπου $R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 3 \, \Omega$, $R_3 = 6 \, \Omega$, $R_4 = 1 \, \Omega$, $E_\alpha = 9 \, \text{V}$, $E_\beta = 12 \, \text{V}$. Υπολογίστε το ρεύμα I .

Λύση:

Επιλέγουμε ως θετική φορά στο κύκλωμα την ωρολογιακή φορά. Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Κίρκωφ στο βρόχο του σχήματος 3.2 με μορφή:

$$\sum_{\beta} U = 0$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_{\beta} - U_{\alpha} = 0$$

Αντικαθιστούμε: $U_{\alpha} = -E_{\alpha}$ και $U_{\beta} = -E_{\beta}$ και βρίσκουμε:

$$E_{\alpha} - E_{\beta} + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πτώσεις τάσης στις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 και R_4 , δηλαδή τη μορφή $\sum_{\beta} R \cdot I = \sum_{\beta} E$:

$$E_{\alpha} - E_{\beta} + R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I + R_4 \cdot I = 0$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το ρεύμα:

$$I = -(E_{\alpha} - E_{\beta}) / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

$$I = -(9V - 12V) / (5\Omega + 3\Omega + 6\Omega + 1\Omega) = 0,2A$$

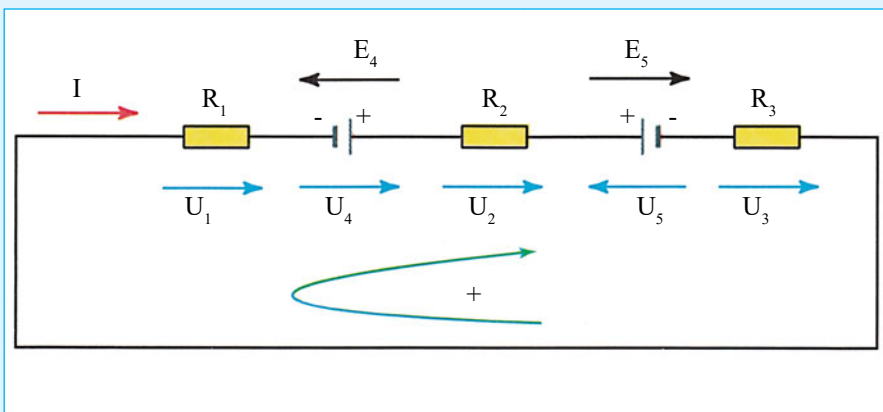
Παράδειγμα 2

Στο κύκλωμα του σχήματος 3.3 δίνονται: $I = 10mA$, $R_1 = 60\Omega$, $R_2 = 75\Omega$, $R_3 = 90\Omega$, $U_4 = 1,75V$. Υπολογίστε τη τάση U_5 .

Λύση:

Αρχικά αποφασίζουμε στο βρόχο ποία θα είναι η θετική φορά μέτρησης των τάσεων, π.χ. η ωρολογιακή. Οι τάσεις που έχουν την ίδια

φορά με τη θετική φορά του βρόχου έχουν θετικό πρόσημο. Οι τάσεις με αντίθετη φορά έχουν αρνητικό πρόσημο.



Σχήμα 3.3. Όλες οι πτώσεις τάσης αθροίζονται αλγεβρικά και το άθροισμά τους ισούται με το μηδέν (2ος νόμος του Κίρκωφ)

Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Κίρκωφ:

$$\sum_{\beta} U = 0$$

$$U_1 + U_4 + U_2 - U_5 + U_3 = 0$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\sum_{\beta} R \cdot I = E$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = E_4 - E_5$$

$$R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I + U_4 - U_5 = 0$$

$$U_5 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I + U_4 =$$

$$= 60\Omega \cdot 0,01\text{A} + 75\Omega \cdot 0,01\text{A} + 90\Omega \cdot 0,01\text{A} + 1,75\text{V} =$$

$$= 0,6\text{V} + 0,75\text{V} + 0,9\text{V} + 1,75\text{V} = 4\text{V}$$

3.4.1. Ισολογισμός της ισχύος

Σε οποιοδήποτε ηλεκτρικό κύκλωμα, το άθροισμα των ισχύων που παράγονται στους καταναλωτές μέσω θερμικού φαινομένου Joule (θερμική ισχύ) ισούται με το άθροισμα των ισχύων που παράγουν οι πηγές.

$$\sum R \cdot I^2 = \sum U \cdot I$$

$$R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + \dots = U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3 + \dots$$

Προσοχή: Η ηλεκτρική ισχύς που παράγει μια πηγή συνεχούς ρεύματος είναι θετική ή αρνητική σύμφωνα με το πρόσημο του γινόμενου του ρεύματος και της τάσης της πηγής. Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος στο κύκλωμα και με την πολικότητα της πηγής.

Παράδειγμα 3

Για το κύκλωμα του παραδείγματος 1 και του Σχήματος 3.2 υπολογίστε: α) την συνολική ηλεκτρική ισχύ που παράγουν οι πηγές τάσης, β) την ηλεκτρική ισχύ που μετατρέπεται σε θερμότητα στις ωμικές αντιστάσεις και γ) συγκρίνετε το αποτέλεσμα των ερωτήσεων α) και β) και συζητήστε.

Λύση:

α) Η ηλεκτρική ισχύς P_μ που παράγεται από τις δύο πηγές τάσης είναι:

$$P_\mu = -U_\alpha \cdot I + U_\beta \cdot I = -9V \cdot 0,2A + 12V \cdot 0,2A = 0,6W$$

β) Όπως έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 2, η ηλεκτρική ισχύς σε μια ωμική αντίσταση μετατρέπεται σε θερμική ισχύ και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P = R \cdot I^2$$

Η θερμική ισχύς των τεσσάρων αντιστάσεων είναι:

$$P_r = R_1 \cdot I^2 + R_2 \cdot I^2 + R_3 \cdot I^2 + R_4 \cdot I^2$$

$$P_r = 5\Omega \cdot 0,2^2 A^2 + 3\Omega \cdot 0,2^2 A^2 + 6\Omega \cdot 0,2^2 A^2 + 1\Omega \cdot 0,2^2 A^2 = 0,6W$$

γ) Παρατηρούμε ότι έχουμε βρει την ίδια ισχύ (σε Watt) από τις ερωτήσεις α) και β). Το αποτέλεσμα είναι σωστό καθώς από τον ισολογισμό της ισχύος γνωρίζουμε ότι η ηλεκτρική ισχύς των πηγών ισούται με την θερμική ισχύ των αντιστάσεων.

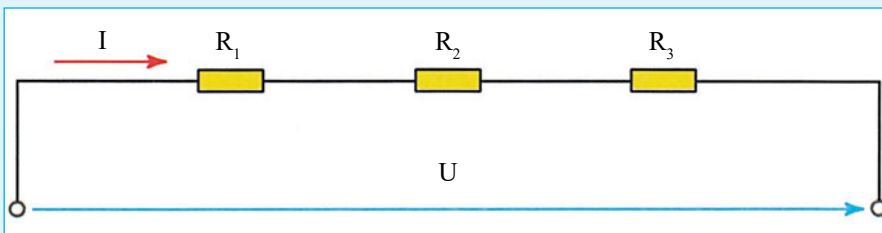
3.5. ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Σε κλάδο ηλεκτρικού κυκλώματος, όταν περισσότερες αντιστάσεις και πηγές διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, τότε είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Το κύκλωμα αυτό μπορεί να μετατραπεί σε ένα απλούστερο και όλες οι αντιστάσεις να αντικατασταθούν με μόνο μία αντίσταση.

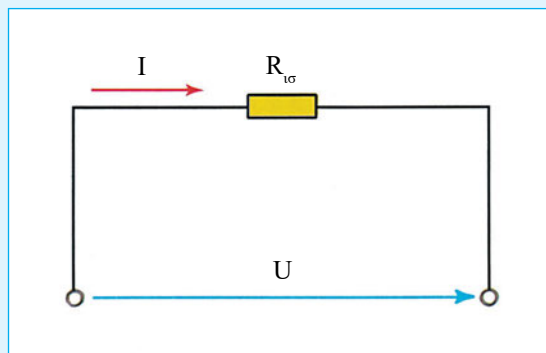
Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ισ}$ της σύνδεσης σε σειρά των αντιστάσεων R_i ισούται με το άθροισμα τους.

$$R_{ισ} = \Sigma R_i = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Στο Σχήμα 3.4.α οι αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 είναι συνδεδεμένες σε σειρά και διαρρέονται από το ρεύμα I . Όλες θα αντικατασταθούν από την ισοδύναμη αντίσταση $R_{ισ}$ η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3.4.β



Σχήμα 3.4.α. Σύνδεση σε σειρά των τριών αντιστάσεων

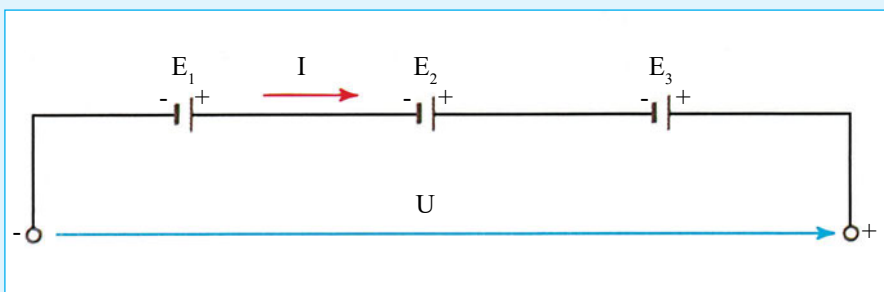


Σχήμα 3.4.β. Ισοδύναμη αντίσταση των τριών αντιστάσεων του κυκλώματος του σχήματος 3.4.α.

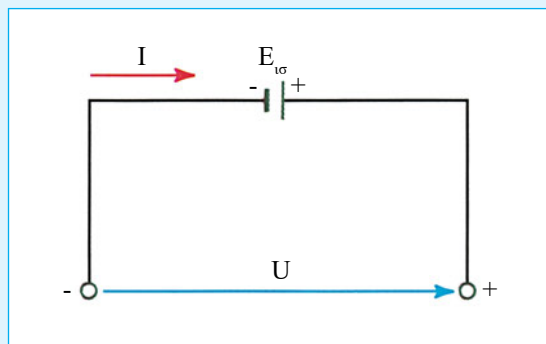
Η ισοδύναμη ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_{\text{ισ}}$ των πηγών που είναι συνδεδεμένες σε σειρά και έχουν ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις E_i ισούται με το άθροισμά τους.

$$E_{\text{ισ}} = \sum E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

Στο Σχήμα 3.5.α οι ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις E_1 , E_2 και E_3 είναι συνδεδεμένες σε σειρά και ο θετικός πόλος της κάθε πηγής συνδέεται στον αρνητικό πόλο της επόμενης, κ.ο.κ. Η ισοδύναμη ηλεκτρεγερτική δύναμη E φαίνεται στο Σχήμα 3.5.β



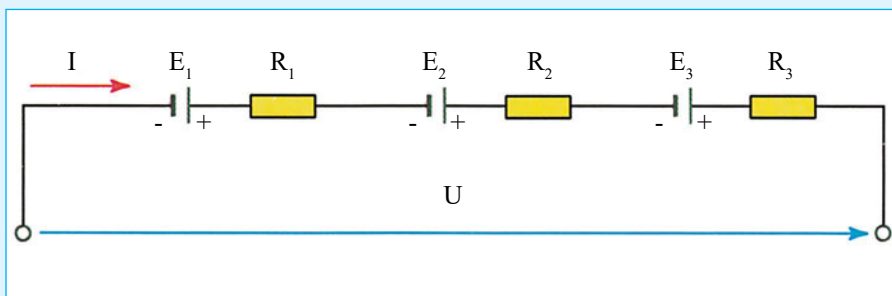
Σχήμα 3.5.α. Τρεις πηγές τάσης συνδεδεμένες σε σειρά



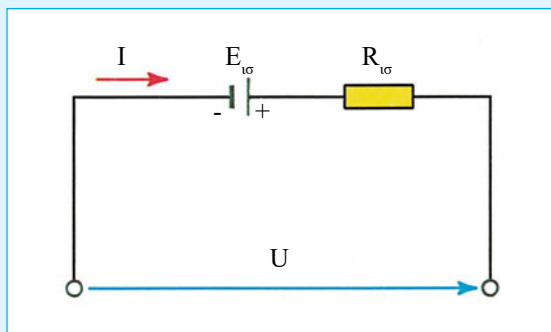
Σχήμα 3.5.β. Ισοδύναμη πηγή τάσης των τριών πηγών του Σχήματος 3.5.α

Προσοχή: Στη σύνδεση σε σειρά των πηγών τάσης σε περίπτωση αντίθετης σύνδεσης, (αρνητικής φοράς) μίας ΗΕΔ, δηλαδή όταν ο θετικός πόλος μίας πηγής συνδεθεί στον θετικό πόλο της επόμενης πηγής, η ΗΕΔ της πηγής που είναι συνδεδεμένη αντίθετα αφαιρείται.

Στο Σχήμα 3.6.α οι αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 και οι ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις E_1 , E_2 και E_3 είναι συνδεδεμένες σε σειρά και διαρρέονται από το ρεύμα I . Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ισ}$ και η ισοδύναμη ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_{ισ}$ αποτελούν το ισοδύναμο κύκλωμα το οποίο παρατίθεται στο Σχήμα 3.6.β.



Σχήμα 3.6.α. Σύνδεση σε σειρά τριών αντιστάσεων και τριών πηγών τάσης



Σχήμα 3.6.β. Ισοδύναμο κύκλωμα του κυκλώματος του σχήματος 3.6.α.

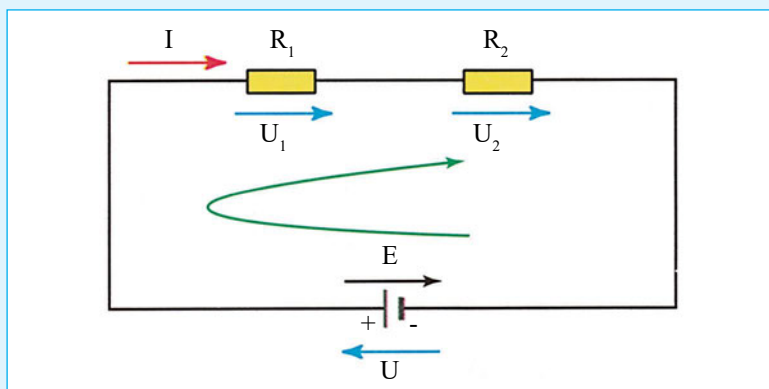
Παράδειγμα 1

Οι αντιστάσεις $R_1=50\ \Omega$ και $R_2=100\ \Omega$ συνδέονται σε σειρά, Σχήμα 3.7. Η τάση της πηγής είναι 30 V . Προσδιορίστε: α) την ισοδύναμη αντίσταση και β) τις πτώσεις τάσης στις αντιστάσεις.

Λύση:

$$\alpha) R=R_1+R_2=50\Omega+100\Omega=150\Omega$$

$$\beta) I=\frac{U}{R}=\frac{30\text{ V}}{150\Omega}=0,2\text{ A}$$



Σχήμα 3.7. Σύνδεση σε σειρά δύο αντιστάσεων και μίας πηγής

$$U_1 = R_1 \cdot I = 50\Omega \cdot 0,2A = 10V \Rightarrow I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = 100\Omega \cdot 0,2A = 20V$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι για τη συνδεσμολογία σε σειρά, εφ' όσον το ρεύμα I που διαρρέει τις αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι κοινό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R}$$

Επομένως οι πτώσεις τάσης στις αντιστάσεις υπολογίζονται και με τον ακόλουθο τρόπο:

$$U_1 = \frac{R_1}{R} \cdot U = \frac{50\Omega}{150\Omega} \cdot 30V = 10V$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R} \cdot U = \frac{100\Omega}{150\Omega} \cdot 30V = 20V$$

Παράδειγμα 2

Οι τάσεις του κυκλώματος του σχήματος 3.7 είναι $U_1=10V$ και $U_2=20V$. Υπολογίστε την τάση της πηγής.

Λύση:

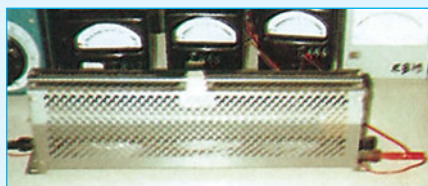
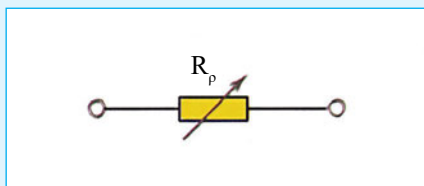
$$E=U_1+U_2= 10V+20V=30V$$

Παράδειγμα 3. Σύνδεση σε σειρά των λαμπτήρων

Συνήθως, οι λαμπτήρες πυράκτωσης δεν συνδέονται σε σειρά, επειδή, σε περίπτωση που ένας λαμπτήρας καίγεται λόγω τήξης του νήματος, τότε διακόπτεται όλο το κύκλωμα. Όμως, σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται λαμπτήρες χαμηλών ονομαστικών μεγεθών (τάση, ρεύμα, ισχύς, αντίσταση) όπως στα φωτιστικά των χριστουγεννιάτικων δένδρων, τότε εφαρμόζεται η σύνδεση σε σειρά των λαμπτήρων. Για προστασία έναντι διακοπής του κυκλώματος σε περίπτωση που ένας λαμπτήρας καεί, κάθε λαμπτήρας γεφυρώνεται με καλώδιο. Σε περίπτωση βλάβης του λαμπτήρα το καλώδιο λειτουργεί σαν δίοδος για τη διέλευση του ρεύματος.

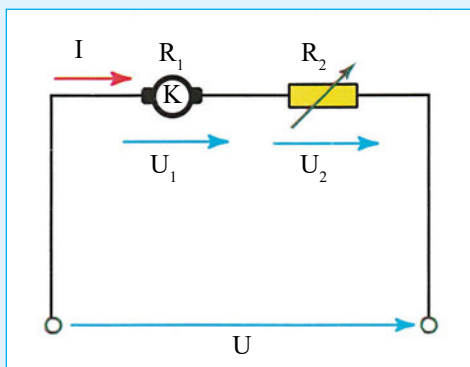
Παράδειγμα 4. Ρυθμιστική Αντίσταση

Πολλές ηλεκτρικές συσκευές μπορούν να συνδεθούν σε τάση υψηλότερη από την ονομαστική τους με τη χρήση μιας αντίστασης, η οποία συνδέεται σε σειρά με τη συσκευή. Η αντίσταση αυτή ονομάζεται **ρυθμιστική αντίσταση**, φωτογραφία 3.1.



Φωτογραφία 3.1. Ρυθμιστική αντίσταση και ο συμβολισμός της.

Εφαρμογές όπου χρησιμοποιείται ρυθμιστική αντίσταση είναι οι διατάξεις εκκίνησης των ηλεκτρικών κινητήρων, οι λαμπτήρες, οι ημιαγώγιμες διατάξεις, κ.α. Στο Σχήμα 3.8 η ρυθμιστική αντίσταση συμβολίζεται με R_2 και συνδέεται σε σειρά με ένα κινητήρα συνεχούς ρεύματος με εσωτερική ωμική αντίσταση R_1 .



Σχήμα 3.8. Ρυθμιστική αντίσταση συνδεδεμένη σε σειρά με κινητήρα

Σε άλλες περιπτώσεις, όταν οι συσκευές συνδέονται στην ονομαστική τους τάση, η σύνδεση ρυθμιστικής αντίστασης προκαλεί μείωση του ρεύματος στο κύκλωμα.

Επειδή οι ρυθμιστικές αντιστάσεις καταναλώνουν ηλεκτρική ενέργεια, την οποία μετατρέπουν σε θερμότητα, και μειώνουν τον βαθμό απόδοσης της διάταξης, χρησιμοποιούνται μόνο σε εφαρμογές χαμηλών ρευμάτων.

Παράδειγμα 5

Ένας λαμπτήρας έχει ονομαστική τάση $U_1=12\text{V}$ και ονομαστικό ρεύμα 2A . Για να συνδεθεί σε τάση $U=220\text{V}$ χρειάζεται να συνδεθεί σε σειρά με μια ρυθμιστική αντίσταση. Υπολογίστε: α) το μέγεθος της ρυθμιστικής αντίστασης και β) την καταναλισκόμενη ηλεκτρική ισχύ από την ρυθμιστική αντίσταση και από τον λαμπτήρα.

Λύση:

α) Η διαφορά μεταξύ της τάσης του δικτύου και της ονομαστικής τάσης του λαμπτήρα είναι η πτώση τάσης στη ρυθμιστική αντίσταση:

$$U_2 = U - U_1 = 220\text{V} - 12\text{V} = 208\text{V}$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{208 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 104 \Omega$$

$$\beta) P_2 = U_2 \cdot I = 208 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 416 \text{ W}$$

$$P_1 = U_1 \cdot I = 12 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 24 \text{ W}$$

Παράδειγμα 6. Πτώση τάσης στις συνδεσμολογίες αντιστάσεων

Οι αγωγοί που διαρρέονται από ρεύμα έχουν ωμική αντίσταση, επομένως μπορούν να θεωρηθούν ως αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά με την αντίσταση του καταναλωτή. Η τάση της πηγής U μοιράζεται σε δυο ποσότητες: μια ποσότητα στους δυο αγωγούς (κλώνους) σύνδεσης ΔU και η δεύτερη ποσότητα U_1 στον καταναλωτή, με συνέπεια μια μείωση της τάσης που εφαρμόζεται στον καταναλωτή.

Η διαφορά αυτή ΔU μεταξύ της τάσης της πηγής και της τάσης που εφαρμόζεται στους ακροδέκτες του καταναλωτή ονομάζεται **πτώση τάσης στους αγωγούς**, Σχήμα 3.9.

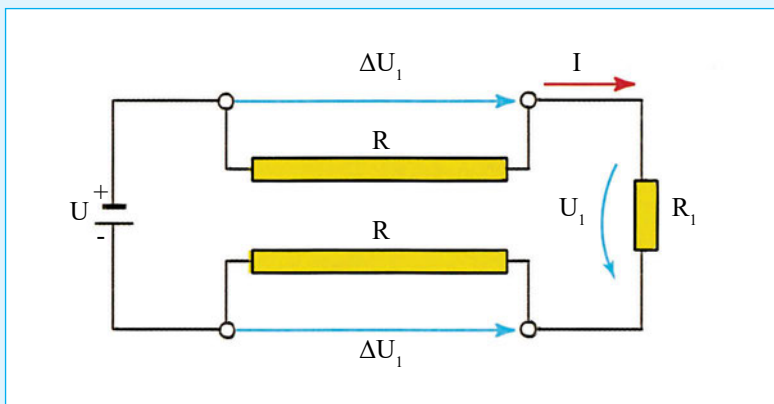
$$\Delta U = U - U_1 = \Delta U_1 + \Delta U_1 = 2 \cdot \Delta U_1$$

$$\Delta U = I \cdot (R + R) = 2 \cdot I \cdot R$$

όπου U είναι η τάση της πηγής, U_1 είναι η τάση στον καταναλωτή και R είναι η αντίσταση κάθε αγωγού (κλώνου) σύνδεσης.

Η πτώση τάσης εκφράζεται και σε ποσοστό της τάσης της πηγής και ονομάζεται **ποσοστιαία πτώση τάσης στους αγωγούς**:

$$\Delta u = \frac{\Delta U}{U} \cdot 100\%$$



Σχήμα 3.9. Πτώση τάσης στους αγωγούς ως αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά

Παρατηρούμε ότι, όσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα ή η αντίσταση του αγωγού σύνδεσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η πτώση τάσης στους αγωγούς. Ως φυσικό φαινόμενο, η πτώση τάσης στους αγωγούς μαζί με το ρεύμα που τους διαρρέει προκαλεί θερμότητα και, ως συνέπεια, μείωση του βαθμού απόδοσης. Επομένως η πτώση τάσης στους αγωγούς είναι ανεπιθύμητο φαινόμενο και προσπαθούμε να την μειώσουμε.

Παράδειγμα 7

Ένας καταναλωτής συνδέεται σε δίκτυο τάσης 220 V μέσω δίκλωνου χάλκινου αγωγού. Ο αγωγός έχει διατομή $2,5 \text{ mm}^2$, μήκος 20 m και διαρρέεται από ρεύμα 20 A. Υπολογίστε: α) την πτώση τάσης στον αγωγό, β) την ποσοστιαία πτώση τάσης.

Λύση:

α) Από τον Πίνακα 2 του Κεφαλαίου 1 διαβάζουμε την ειδική αγωγιμότητα του χαλκού. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ωμική αντίσταση του αγωγού σύνδεσης. Λαμβάνουμε υπ όψη ότι ο δίκλωνος αγωγός έχει διπλάσια αντίσταση από τον μονόκλωνο:

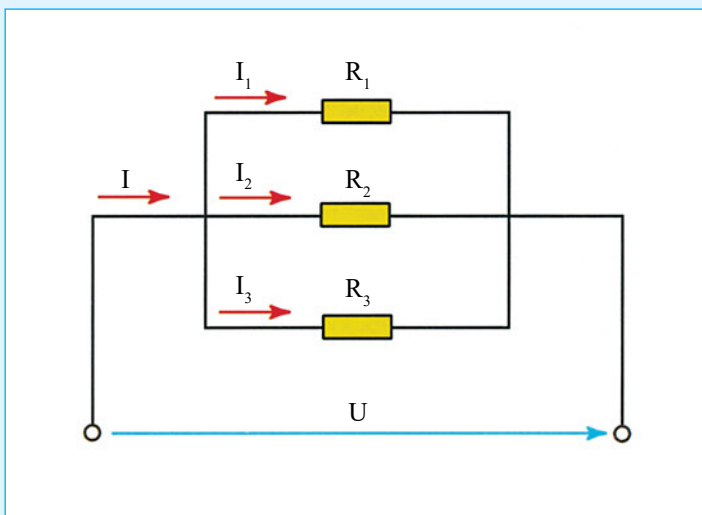
$$R = \frac{\rho \cdot \ell}{S} = \frac{20 \text{ m} \cdot 0,0175 \cdot \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{2,5 \text{ mm}^2} = 0,143 \Omega$$

$$\Delta U = 2 \cdot I \cdot R = 2 \cdot 20 \text{ A} \cdot 0,143 \Omega = 5,71 \text{ V}$$

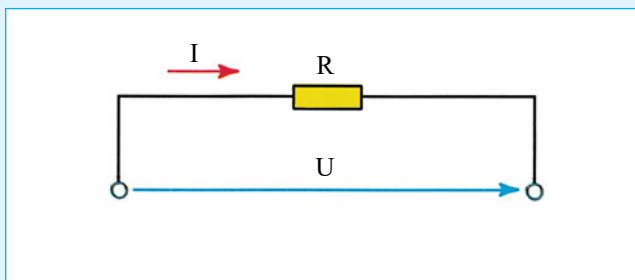
$$\beta) \Delta u = \frac{5,71}{220} \cdot 100\% = 2,6\%$$

3.6. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΥΝΔΕΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Περισσότερες αντιστάσεις και πηγές είναι συνδεδεμένες παράλληλα (ή “εν παραλλήλω”) όταν όλοι οι ακροδέκτες εισόδου του ρεύματος σ’ αυτές συνδέονται μεταξύ τους, και όλοι οι ακροδέκτες εξόδου του ρεύματος από αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Σχήμα 3.10.α. Όλες οι αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα τροφοδοτούνται με την ίδια τάση.



Σχήμα 3.10.α. Παράλληλη σύνδεση τριών αντιστάσεων



Σχήμα 3.10.β. Ισοδύναμη αντίσταση των τριών αντιστάσεων συνδεδεμένες παράλληλα

Όλες οι ηλεκτρικές οικιακές συσκευές, οι λαμπτήρες πυράκτωσης, οι ηλεκτρικοί κινητήρες, οι μετασχηματιστές κατασκευάζονται για τυποποιημένη τάση 220V και συνδέονται παράλληλα στο δίκτυο.

Το ρεύμα που εισέρχεται σε ένα κύκλωμα αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων σε όλους τους κλάδους, Σχήμα 3.10.α.

$$I = \sum I_k$$

Σε κάθε αντίσταση υπάρχει η ίδια πτώση τάσης.

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_k I_k$$

Η ισοδύναμη αγωγιμότητα του κυκλώματος, που αποτελείται από αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα, ισούται με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των αντιστάσεων.

$$G = \sum G_k$$

Από την ισοδύναμη αγωγιμότητα υπολογίζουμε την ισοδύναμη αντίσταση R, Σχήμα 3. 10.β.

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}$$

Οι ακροδέκτες στους οποίους το ρεύμα διακλαδίζεται ονομάζονται κόμβοι. Στον κάθε κόμβο ισχύει ο πρώτος νόμος του Κίρκωφ.

Η ισοδύναμη αντίσταση είναι μικρότερη από κάθε μία από τις αντιστάσεις που συνδέονται παράλληλα. Για δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα ισχύει:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Η τελευταία σχέση για την ισοδύναμη αντίσταση R ισχύει μόνο για δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Για n όμοιες αντιστάσεις ισχύει ότι:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n$$

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{R_1}$$

$$R = \frac{R_1}{n}$$

Παράδειγμα 1

Στο σχήμα 3.10.α. οι αντιστάσεις είναι $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=4\Omega$. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση R .

Λύση:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 0,1 + 0,2 + 0,25 = 0,55 \text{ Siemens}$$

$$R = \frac{1}{G} = 1,81\Omega$$

Παράδειγμα 2

Για την συνδεσμολογία του σχήματος 3.10.α. δίνονται τα ρεύματα $I_1=6\text{A}$, $I_2=3\text{A}$, $I_3=1\text{A}$. Η τάση της πηγής είναι $U=50\text{V}$. Υπολογίστε: α) την ισοδύναμη αντίσταση R και β) τις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 .

Λύση:

α) Εφαρμόζουμε τον πρώτο νόμο του Κίρκωφ:

$$I=I_1+I_2+I_3=10\text{A}$$

Υπολογίζουμε την ισοδύναμη αντίσταση

$$R = \frac{U}{I} = \frac{50\text{V}}{10\text{A}} = 5\Omega$$

$$\beta) R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{50\text{V}}{6\text{A}} = 8,33\Omega$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{50\text{V}}{3\text{A}} = 16,66\Omega$$

$$R_3 = \frac{U}{I_3} = \frac{50\text{V}}{1\text{A}} = 50\Omega$$

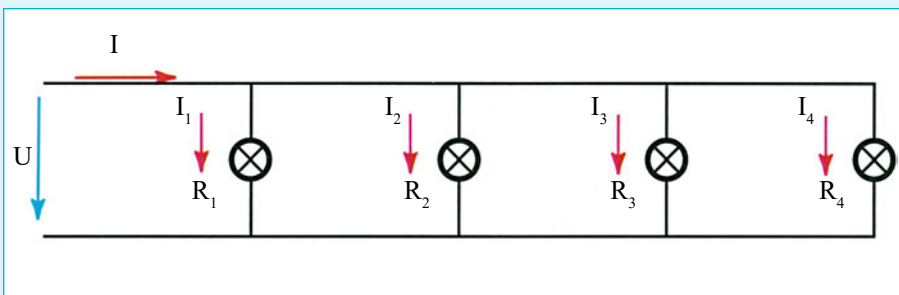
Επαλήθευση:

$$G = \frac{1}{8,33\Omega} + \frac{1}{16,66\Omega} + \frac{1}{50\Omega} = 0,12 + 0,06 + 0,2 \text{ Siemens}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{0,2(\text{S})} = 5\Omega$$

Παράδειγμα 3

Ένα φωτιστικό αποτελείται από τέσσερις όμοιους λαμπτήρες συνδεδεμένους παράλληλα, Σχήμα 3.11. Το φωτιστικό συνδέεται σε πηγή τάσης 220V. Η ωμική αντίσταση του κάθε λαμπτήρα είναι 440Ω. Υπολογίστε: α) την ισοδύναμη αντίσταση των τεσσάρων λαμπτήρων, β) το ρεύμα που απορροφάει το φωτιστικό από την πηγή, γ) το ρεύμα στον κάθε λαμπτήρα.



Σχήμα 3.11. Τέσσερις λαμπτήρες συνδεδεμένοι παράλληλα

Λύση:

α) Εφ' όσον οι τέσσερις λαμπτήρες είναι όμοιοι, οι ωμικές αντιστάσεις είναι ίσες μεταξύ τους. Τότε ισχύει ότι:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 440\Omega$$

$$R = \frac{R_1}{4} = \frac{440\Omega}{4} = 110\Omega$$

β) Το συνολικό ρεύμα υπολογίζεται σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Ωμ:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220\text{ V}}{110\Omega} = 2\text{ A}$$

γ) Για κάθε λαμπτήρα εφαρμόζουμε τον νόμο του Ωμ:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{220 \text{ V}}{440 \Omega} = 0,5 \text{ A}$$

Επαλήθευση:

Εφαρμόζουμε τον πρώτο νόμο του Κίρκωφ:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0,5 \text{ A} + 0,5 \text{ A} + 0,5 \text{ A} + 0,5 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

Παράδειγμα 4

Ο φωτισμός μιας αίθουσας θεατρικών παραστάσεων αποτελείται από 80 όμοιους λαμπτήρες πυράκτωσης ονομαστικής ισχύος $P_1 = 100 \text{ W}$, συνδεδεμένους παράλληλα σε τάση $U = 220 \text{ V}$. Υπολογίστε: α) την ονομαστική αντίσταση των λαμπτήρων R_1 , β) την ισοδύναμη αντίσταση της εγκατάστασης R , γ) το ονομαστικό ρεύμα των λαμπτήρων I_1 , δ) το ρεύμα που απορροφάει από την πηγή ολόκληρη η εγκατάσταση φωτισμού I και ε) την συνολική απορροφούμενη ισχύ από το δίκτυο P .

Λύση:

Εφ' όσον οι αντιστάσεις είναι ίσες μεταξύ τους και το πλήθος τους είναι $n=80$, τότε ισχύει ότι:

$$\alpha) R_1 = U^2 / P_1 = 220^2 \text{ V}^2 / 100 \text{ W} = 484 \Omega$$

$$\beta) R = R_1 / n = 484 \Omega / 80 = 6,05 \Omega$$

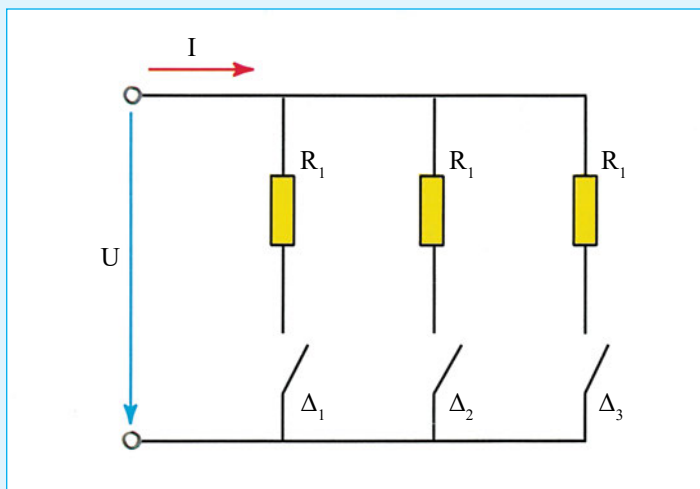
$$\gamma) I_1 = P_1 / U = 100 \text{ W} / 220 \text{ V} = 0,45 \text{ A}$$

$$\delta) I = n \cdot I_1 = 80 \cdot 0,45 \text{ A} = 36,36 \text{ A}$$

$$\epsilon) P = U \cdot I = n \cdot P_1 = 80 \cdot 100 \text{ W} = 8000 \text{ W}$$

Παράδειγμα 5

Ένα θερμαντικό σώμα 1,5 KW/220 V έχει 3 όμοιες θερμαντικές αντιστάσεις, οι οποίες επιλέγονται με διακόπτες, Σχήμα 3.12. Υπολογίστε για τις κλίμακες 1, 2 και 3: α) την ισοδύναμη αντίσταση, β) το συνολικό ρεύμα που απορροφάει και γ) την θερμική ισχύ που παράγει.



Σχήμα 3.12. Διάγραμμα θερμαντικού σώματος με τρεις θερμαντικές αντιστάσεις οι οποίες επιλέγονται με διακόπτες

Λύση:

Α) Κλίμακα 1: Ο διακόπτης Δ_1 είναι κλειστός, οι διακόπτες Δ_2 και Δ_3 είναι ανοικτοί.

Έχουμε συνδέσει μια μόνο αντίσταση, επομένως το θερμαντικό σώμα αποδίδει το 1/3 της ονομαστικής του ισχύος, δηλαδή η θερμική ισχύς είναι:

$$P = R \cdot I^2 = 1500/3 = 500 \text{ W}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

$$R = R_1 = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2 \text{ V}}{500 \text{ W}} = 96,8 \, \Omega$$

Το ρεύμα που απορροφάει είναι:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ V}}{96,8 \Omega} = 2,27 \text{ A}$$

Β) Κλίμακα 2: Οι διακόπτες Δ_1 και Δ_2 είναι κλειστοί, ο διακόπτης Δ_3 είναι ανοικτός.

Οι δύο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα και το θερμαντικό σώμα αποδίδει τα $2/3$ της ονομαστικής του ισχύος. Επομένως:

$$R' = \frac{96,8 \Omega}{2} = 48,4 \Omega$$

$$I' = \frac{220 \text{ V}}{48,4 \Omega} = 4,55 \text{ A}$$

$$P' = R \cdot I^2 = 48,4 \cdot 4,55^2 = 1000 \text{ W}$$

Γ) Κλίμακα 3: οι διακόπτες Δ_1 , Δ_2 και Δ_3 είναι κλειστοί.

Οι τρεις αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα και το θερμαντικό σώμα αποδίδει $P''=1500\text{W}$. Το συνολικό ρεύμα (το ονομαστικό) είναι:

$$I'' = \frac{P''}{U} = \frac{1500 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 6,82 \text{ A}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

$$R'' = \frac{P''}{I^2} = \frac{1500 \text{ W}}{6,82^2 \text{ A}^2} = 32,27 \Omega$$

Επαληθεύουμε ότι:

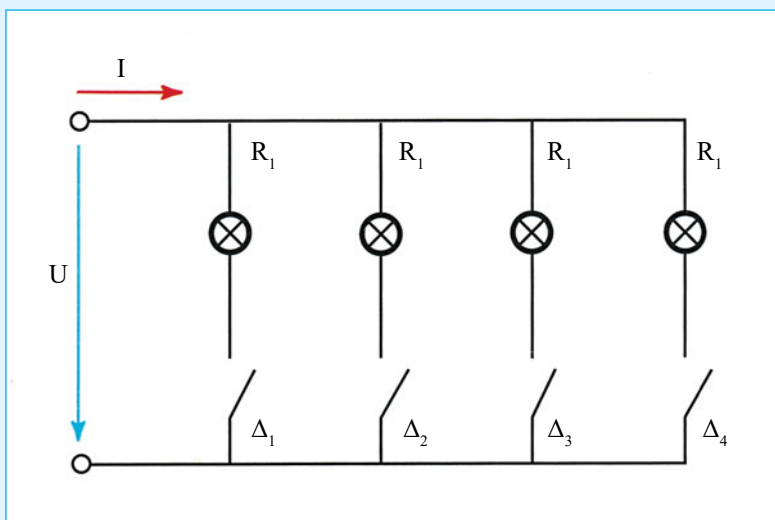
$$R = \frac{R_1}{3} \Rightarrow R_1 = 3 \cdot 32,27 \Omega = 96,8 \Omega$$

Συγκεντρωτικά, τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Τάση 220V	Κλίμακα 1 Δ_1 κλειστός	Κλίμακα 2 Δ_1 και Δ_2 κλειστοί	Κλίμακα 3 Δ_1, Δ_2 και Δ_3 κλειστοί
R [Ω]	96,8	48,4	32,27
I [A]	2,27	4,55	6,82
P [W]	500	1000	1500

Παράδειγμα 6

Ένα φωτιστικό αποτελείται από τέσσερις όμοιους λαμπτήρες συνδεδεμένους παράλληλα, Σχήμα 3.13. Όταν συνδέονται μόνο οι δύο λαμπτήρες, η ισοδύναμη αντίσταση του φωτιστικού μειώνεται κατά 10 Ω . Υπολογίστε: α) την αντίσταση κάθε λαμπτήρα και β) την ισοδύναμη αντίσταση του συνδυασμού των λαμπτήρων ανά δύο, ανά τρεις και ανά τέσσερις.



Σχήμα 3.13. Διάγραμμα φωτιστικού με τέσσερις λαμπτήρες οι οποίοι επιλέγονται με διακόπτες

Λύση:

Η ισοδύναμη αντίσταση του φωτιστικού είναι:

$$R = \frac{R_1}{4} \quad \text{για τέσσερις λαμπτήρες συνδεδεμένους παράλληλα}$$

και

$$R = \frac{R_1}{2} \quad \text{για δύο λαμπτήρες συνδεδεμένους παράλληλα}$$

$$\alpha) \frac{R_1}{2} - 10\Omega = \frac{R_1}{4} \Rightarrow \frac{R_1}{4} = 10\Omega \Rightarrow R_1 = 40\Omega$$

β) Για δύο παράλληλους λαμπτήρες:

$$R = R_1/2 = 20\Omega$$

Για τρεις παράλληλους λαμπτήρες:

$$R = R_1/3 = 40/3 = 13,33\Omega$$

Για 4 παράλληλους λαμπτήρες:

$$R = R_1/4 = 40/4 = 10\Omega$$

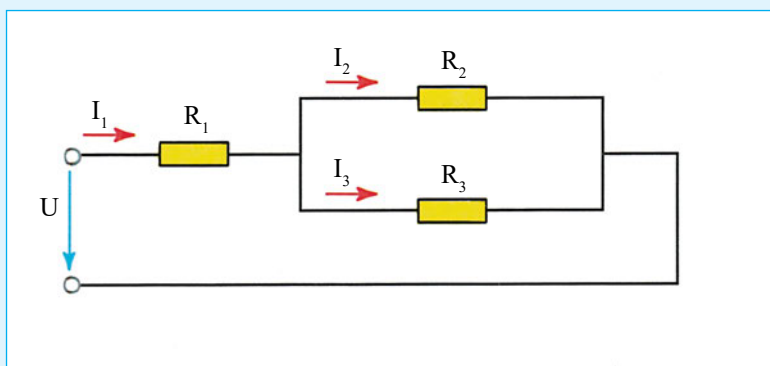
3.7. ΣΥΝΘΕΤΗ ΣΥΝΔΕΣΗ

Ηλεκτρικό κύκλωμα, που περιλαμβάνει ηλεκτρικές αντιστάσεις και ηλεκτρικές πηγές συνδεδεμένες σε σειρά και παράλληλα, ονομάζεται **κύκλωμα με σύνθετη σύνδεση ή μικτή σύνδεση**.

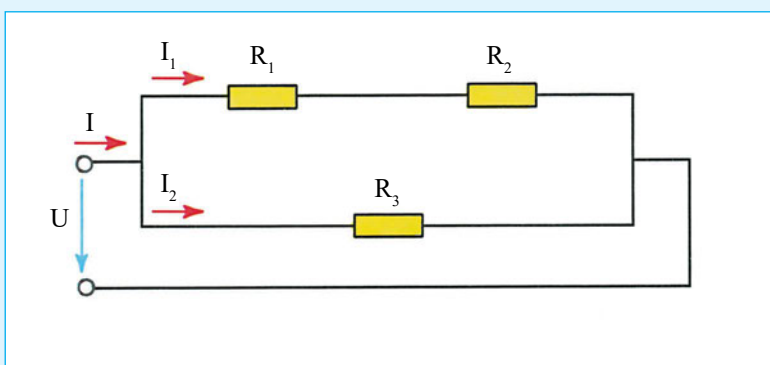
Σε ένα μικτό κύκλωμα προσδιορίζουμε τα τμήματα σε σειρά και τους παράλληλους κλάδους. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε όλους τους κανόνες της σύνδεσης σε σειρά και της παράλληλης σύνδεσης.

Οι πρακτικοί κανόνες υπολογισμού σύνθετης συνδεσμολογίας αντιστάσεων είναι:

1. Σε μια συνδεσμολογία σε σειρά, όπου υπάρχει και μια συνδεσμολογία παράλληλη, Σχήμα 3.14, υπολογίζεται πρώτα η παράλληλη συνδεσμολογία για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης και μετά συνθέτουμε τις αντιστάσεις σε σειρά.
2. Σε μια συνδεσμολογία παράλληλη, αν υπάρχει μια συνδεσμολογία σειράς, Σχήμα 3.15, υπολογίζεται πρώτα η συνδεσμολογία σειράς για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης και μετά συνθέτουμε τις αντιστάσεις εν παραλλήλω.



Σχήμα 3.14. Μικτή σύνδεση αποτελούμενη από δύο παράλληλες αντιστάσεις R_2 και R_3 , συνδεδεμένες σε σειρά με την αντίσταση R_1



Σχήμα 3.15. Μικτή σύνδεση αποτελούμενη από κλάδο δύο αντιστάσεων σε σειρά R_1 και R_2 συνδεδεμένες παράλληλα με μια τρίτη αντίσταση R_3

Τα δύο κυκλώματα που παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.14. και 3.15 συναντώνται συχνά σε σύνθετα κυκλώματα όπως και σε πολλά βιβλία. Πολλά σύνθετα κυκλώματα αποτελούνται από συνδεσμολογίες όπως αυτές.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η μικτή σύνδεση του Σχήματος 3.14 όπου: $R_1=100\Omega$, $R_2=1000\Omega$, $R_3=4000\Omega$. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση R .

Λύση:

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R=100\Omega+1000\Omega \cdot 4000\Omega/(1000\Omega+4000\Omega)=100\Omega+800\Omega=900\Omega$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η μικτή σύνδεση του Σχήματος 3.15 όπου: $R_1=100\Omega$, $R_2=300\Omega$, $R_3=400\Omega$. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση R .

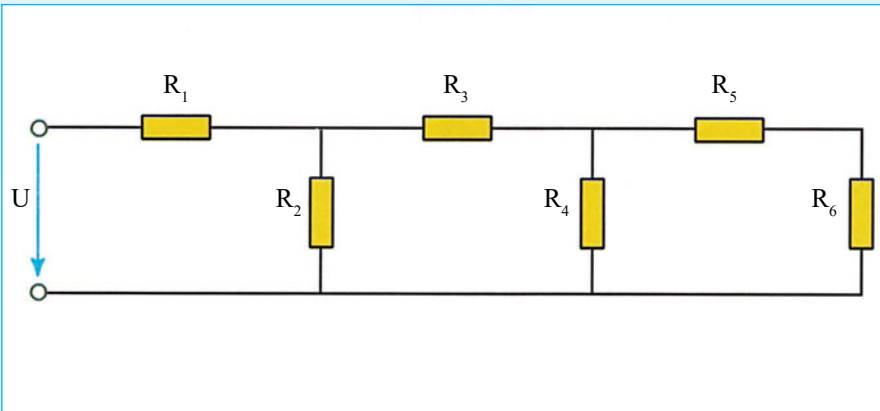
$$\text{Λύση: } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R=(100\Omega+300\Omega) \cdot 400\Omega/(100\Omega+300\Omega+400\Omega)=200\Omega$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η μικτή σύνδεση του Σχήματος 3.16 όπου: $R_1=800\Omega$, $R_2=400\Omega$, $R_3=300\Omega$, $R_4=200\Omega$, $R_5=100\Omega$, $R_6=100\Omega$. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση R .



Σχήμα 3.16. Μικτή σύνδεση έξι αντιστάσεων

Λύση:

Για την επίλυση του κυκλώματος προσδιορίζουμε πρώτα ποιες αντιστάσεις αποτελούν συνδεσμολογίες όπως αυτές που αναφέρθηκαν στα Σχήματα 3.14 και 3.15. Μετά προχωράμε στην επίλυσή τους.

- Οι αντιστάσεις R_5 και R_6 είναι συνδεδεμένες σε σειρά μεταξύ τους και παράλληλα με την αντίσταση R_4

$$R_{56} = R_5 + R_6 = 100\Omega + 100\Omega = 200\Omega$$

$$R_{456} = (R_4 \cdot R_{56}) / (R_4 + R_{56}) = 200 \cdot 200 / (200 + 200) = 100\Omega$$

- Όλο το παραπάνω τμήμα του κυκλώματος (οι αντιστάσεις R_4 , R_5 , R_6) ή το ισοδύναμό του που είναι η αντίσταση R_{456} είναι συνδεδεμένο σε σειρά με την αντίσταση R_3 .

$$R_{3-6} = R_3 + R_{456} = 300\Omega + 100\Omega = 400\Omega$$

- Το τμήμα αυτό (οι αντιστάσεις R_3 , R_4 , R_5 , R_6) ή το ισοδύναμό του που είναι η αντίσταση R_{3-6} είναι συνδεδεμένο παράλληλα με την R_2

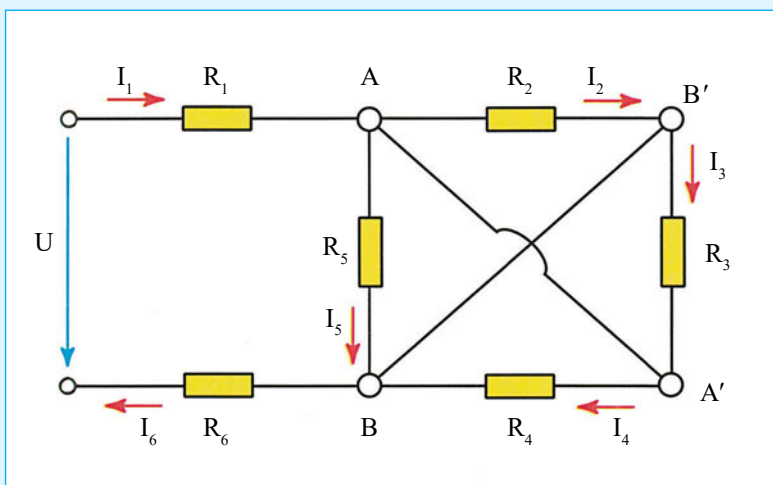
$$R_{2-6} = R_2 \cdot R_{3-6} / (R_2 + R_{3-6}) = 400\Omega \cdot 400\Omega / (400\Omega + 400\Omega) = 200\Omega$$

- Τέλος, η αντίσταση R_1 είναι συνδεδεμένη σε σειρά με όλο το υπόλοιπο κύκλωμα (οι αντιστάσεις R_2, R_3, R_4, R_5, R_6) ή με το ισοδύναμό του που είναι η αντίσταση R_{2-6} .

$$R = R_1 + R_{2-6} = 800\Omega + 200\Omega = 1000\Omega$$

Παράδειγμα 4

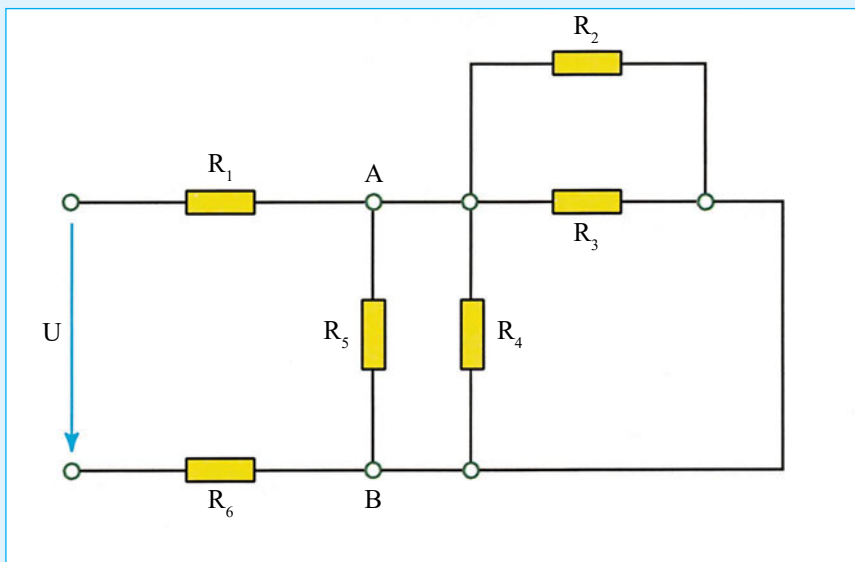
Δίνονται $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=40\Omega$, $R_4=10\Omega$, $R_5=40\Omega$, $R_6=15\Omega$, $U=150V$, σχήμα 3.17.α. Υπολογίστε: α) την ισοδύναμη αντίσταση της συνδεσμολογίας, β) το ρεύμα σε κάθε αντίσταση και τη πτώση τάσης στην κάθε αντίσταση.



Σχήμα 3.17.α. Μικτή σύνδεση έξι αντιστάσεων

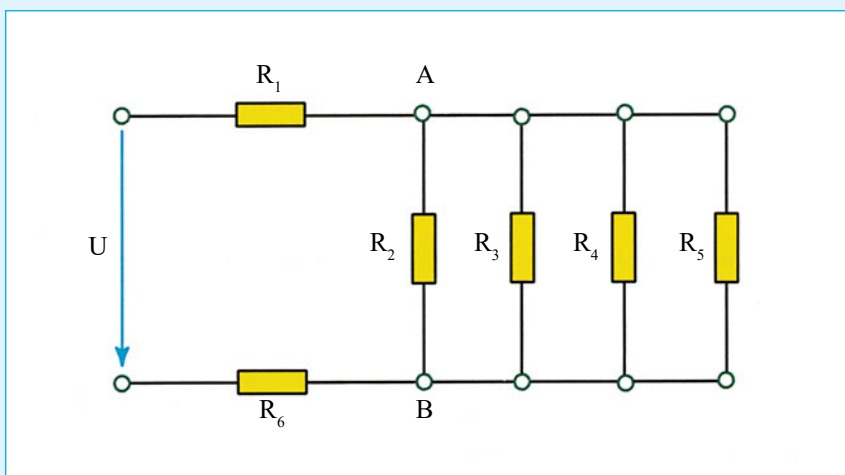
Λύση:

Οι αντιστάσεις R_2 με την R_3 και οι αντιστάσεις R_4 με την R_5 είναι συνδεδεμένες παράλληλα καθώς οι ακροδέκτες A-A' και οι ακροδέκτες B-B' έχουν το ίδιο δυναμικό. Επομένως, το κύκλωμα του σχήματος 3.17.α. μπορεί να σχεδιασθεί όπως φαίνεται στο σχήμα 3.17.β.



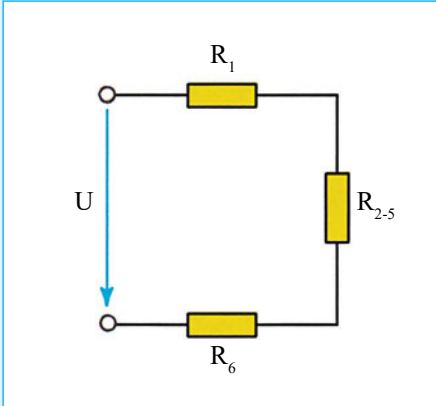
Σχήμα 3.17.β. Πρώτο βήμα μετατροπής του κυκλώματος του σχήματος 3.17.α

Από το σχήμα 3.17.β φαίνεται ότι οι αντιστάσεις R_2 , R_3 , R_4 και R_5 είναι συνδεδεμένες παράλληλα, σχήμα 3.17.γ.

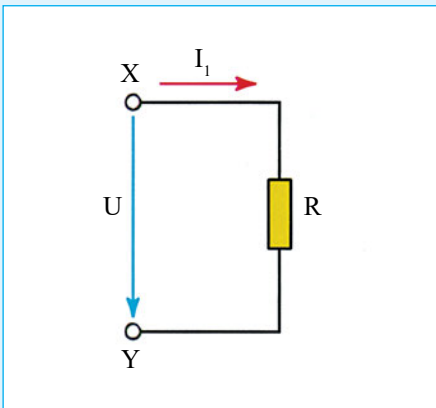


Σχήμα 3.17.γ. Δεύτερο βήμα μετατροπής του κυκλώματος του σχήματος 3.17.α

Στη συνέχεια, οδηγούμαστε στο κύκλωμα του σχήματος 3.17.δ. και τέλος στο ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 3.17.ε.



Σχήμα 3.17.δ. Τρίτο βήμα μετατροπής του κυκλώματος του σχήματος 3.17.α



Σχήμα 3.17.ε. Ισοδύναμο κύκλωμα της σύνδεσης έξι αντιστάσεων του Σχήματος 3.17.α

α) Η ισοδύναμη αντίσταση R_{2-5} των αντιστάσεων R_2, R_3, R_4, R_5 εν παραλλήλω είναι:

$$\frac{1}{R_{2-5}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega} =$$

$$= 0,05\text{S} + 0,025\text{S} + 0,1\text{S} + 0,025\text{S} = 0,2\text{S (Siemens)}$$

$$R_{2-5} = 5\Omega$$

Η συνολική ισοδύναμη αντίσταση του αρχικού κυκλώματος είναι:

$$R=R_1+R_{2,5}+R_6=10\Omega+5\Omega+15\Omega=30\Omega$$

β) Από την ανάλυση του κυκλώματος του Σχήματος 3.17.ε παρατηρούμε ότι:

$$I_1=I_6$$

Τα ρεύματα I_1 ή και I_6 υπολογίζονται με την βοήθεια του νόμου του Ωμ:

$$I_1 = I_6 = \frac{U}{R} = \frac{150\text{ V}}{30\Omega} = 5\text{ A}$$

Η πτώση τάσης σε μια αντίσταση υπολογίζεται ως το γινόμενο του ρεύματος και της αντίστασης

$$U_1=I_1 \cdot R_1=5\Omega \cdot 10\text{A}=50\text{V}$$

$$U_6=I_6 \cdot R_6=5\text{A} \cdot 15\Omega=75\text{V}$$

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.17.γ η τάση μεταξύ ακροδεκτών Α και Β, U_{AB} , είναι η πτώση τάσης στις αντιστάσεις R_2 , R_3 , R_4 και R_5 . Ο δεύτερος νόμος του Κίρκωφ για τον βρόχο ΧΑΒΥ, Σχήμα 3.17.γ είναι:

$$U=U_1+U_{AB}+U_6$$

$$U_{AB}=U-U_1-U_6=150\text{V}-50\text{V}-75\text{V}=25\text{V}$$

Τα ρεύματα I_2 , I_3 , I_4 , I_5 υπολογίζονται από τον νόμο του Ωμ :

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{25\text{ V}}{20\Omega} = 1,25\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{25\text{ V}}{40\Omega} = 0,625\text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{25 \text{ V}}{10 \Omega} = 2,5 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{U_{AB}}{R_5} = \frac{25 \text{ V}}{40 \Omega} = 0,625 \text{ A}$$

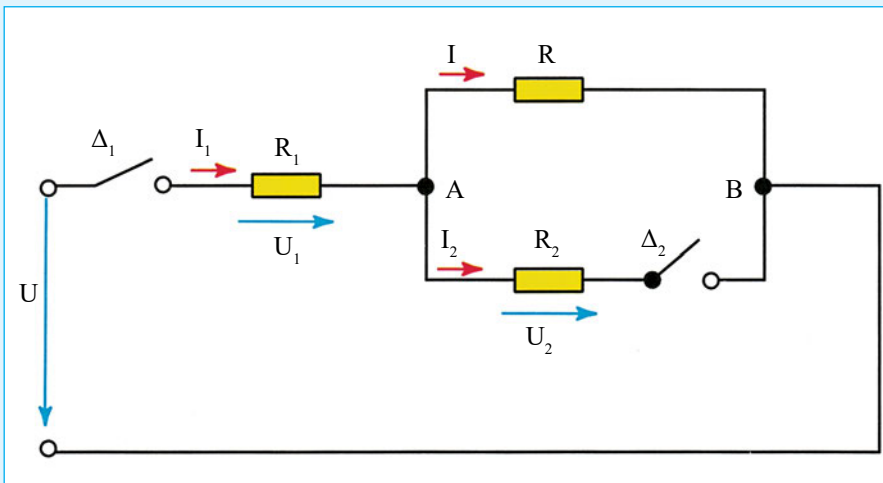
Επαλήθευση:

Εφαρμόζουμε τον πρώτο νόμο του Κίρκωφ:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 1,25 \text{ A} + 0,625 \text{ A} + 2,5 \text{ A} + 0,625 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται το θερμαντικό σώμα του σχήματος 3.18 το οποίο συνδέεται σε πηγή τάσης $U=100\text{V}$. Ο διακόπτης Δ_1 είναι ο γενικός διακόπτης σύνδεσης και αποσύνδεσης στο δίκτυο. Όταν ο διακόπτης Δ_2 είναι ανοικτός, το θερμαντικό σώμα απορροφάει 10A , ενώ όταν ο διακόπτης Δ_2 είναι κλειστός, τότε η πτώση τάσης στην αντίσταση $R=5\Omega$ μειώνεται κατά 10V . Υπολογίστε τις αντιστάσεις R_1 και R_2 και το ρεύμα στην αντίσταση R με κλειστό το διακόπτη.



Σχήμα 3.18. Μικτή σύνδεση αντιστάσεων μέσω διακόπτη

Λύση:

A. Διακόπτης Δ_1 , κλειστός και διακόπτης Δ_2 ανοικτός:

Η άγνωστη αντίσταση R_1 είναι συνδεδεμένη σε σειρά με την αντίσταση $R=5\ \Omega$, και $I_1=I=10\text{ A}$

$$R_1 + R = \frac{U}{I_1} = \frac{100\text{ V}}{10\text{ A}} = 10\ \Omega$$

$$R_1 = 10\Omega - R = 10\Omega - 5\Omega = 5\Omega$$

$$U_1 = I \cdot R_1 = 10\text{ A} \cdot 5\Omega = 50\text{ V}$$

$$U_2 = U - U_1 = 100\text{ V} - 50\text{ V} = 50\text{ V}$$

B. Διακόπτης Δ_1 κλειστός και διακόπτης Δ_2 κλειστός:

Η αντίσταση $R=5\Omega$ είναι συνδεδεμένη παράλληλα με την άγνωστη αντίσταση R_2 . Η τάση U_2 μειώνεται κατά 10V, δηλαδή είναι:

$$U_2 = 50\text{ V} - 10\text{ V} = 40\text{ V}$$

$$U_1 = U - U_2 = 100\text{ V} - 40\text{ V} = 60\text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{60\text{ V}}{5\Omega} = 12\text{ A}$$

$$I = \frac{U_2}{R} = \frac{40\text{ V}}{5\Omega} = 8\text{ A}$$

Από τον πρώτο νόμο του Κίρκωφ στον κόμβο A υπολογίζουμε το ρεύμα I_2 :

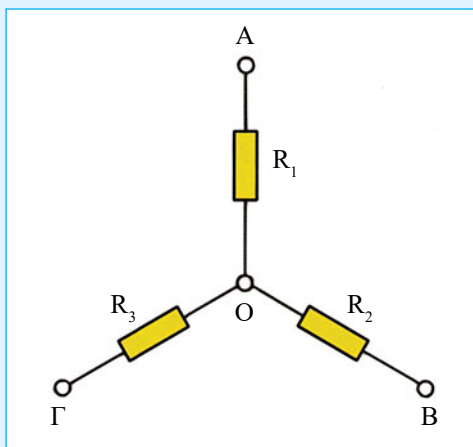
$$I_1 = I + I_2 \Rightarrow I_2 = 12\text{ A} - 8\text{ A} = 4\text{ A}$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{40\text{ V}}{4\text{ A}} = 10\Omega$$

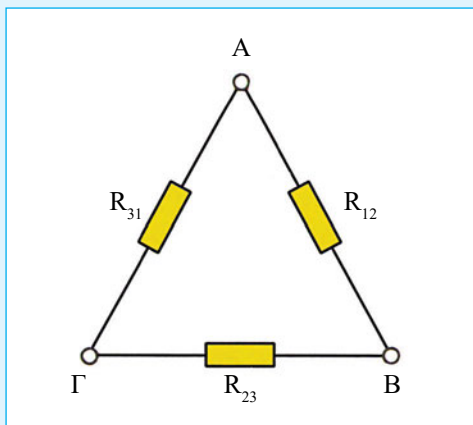
3.8. ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΕ ΑΣΤΕΡΑ ΚΑΙ ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

Τρεις αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 οι οποίες συνδέονται με το ένα άκρο σε ένα κοινό κόμβο O και το άλλο άκρο είναι διαθέσιμο για σύνδεση σε άλλη αντίσταση ή πηγή αποτελούν **μια σύνδεση σε αστέρα**, Σχήμα 3.19. Η σύνδεση αυτή ονομάζεται συχνά σύνδεση "Υ".

Για να σχηματιστεί **μια συνδεσμολογία σε τρίγωνο**, όταν έχουν δοθεί οι τρεις αντιστάσεις R_{12} , R_{23} και R_{31} , η αρχή κάθε αντίστασης συνδέεται στο τέλος της άλλης. Η σύνδεση αυτή ονομάζεται συχνά σύνδεση "Δ", Σχήμα 3.20.



Σχήμα 3.19. Σύνδεση τριών αντιστάσεων σε αστέρα



Σχήμα 3.20. Σύνδεση τριών αντιστάσεων σε τρίγωνο

Τόσο η σύνδεση σε αστέρα όσο και η σύνδεση σε τρίγωνο χρησιμοποιούνται συχνά στα δίκτυα τριφασικού εναλλασσομένου ρεύματος, στους τριφασικούς μετασχηματιστές και στις τριφασικές ηλεκτρικές μηχανές.

3.9. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΑΣΤΕΡΑ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΕ ΑΣΤΕΡΑ

Η σύνδεση σε αστέρα των αντιστάσεων R_1 , R_2 και R_3 του σχήματος 3.19 μετατρέπεται σε σύνδεση σε τρίγωνο με ισοδύναμες αντιστάσεις R_{12} , R_{23} και R_{31} , Σχήμα 3.20. Συχνά, η μετατροπή του αστέρα σε τρίγωνο ονομάζεται μετατροπή "Υ-Δ".

Χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις-μετατροπές:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

Η μετατροπή του αστέρα σε τρίγωνο εκφράζεται και μέσω αγωγιμότητων:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Η μετατροπή του τριγώνου αντιστάσεων R_{12} , R_{23} και R_{31} (σχήμα 3.20) σε ισοδύναμο αστέρα με αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 , (Σχήμα 3.19), γίνεται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{\sum R}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{\sum R}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{\sum R}$$

$$\text{Όπου } \sum R = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

Η μετατροπή του τριγώνου σε αστέρα ονομάζεται και **μετατροπή "Δ-Υ"**.

Παράδειγμα 1

Για τη συνδεσμολογία σε αστέρα του σχήματος 3.19 δίνονται οι αντιστάσεις: $R_1=50 \Omega$, $R_2=80 \Omega$, $R_3=100 \Omega$. Υπολογίστε τις ισοδύναμες αντιστάσεις, όταν μετατραπεί το κύκλωμα σε συνδεσμολογία τριγώνου, σχήμα 3.20.

Λση:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = 50 \Omega + 80 \Omega + \frac{50 \Omega \cdot 80 \Omega}{100 \Omega} = 170 \Omega$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} = 80 \Omega + 100 \Omega + \frac{80 \Omega \cdot 100 \Omega}{50 \Omega} = 340 \Omega$$

$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} = 50 \Omega + 100 \Omega + \frac{50 \Omega \cdot 100 \Omega}{80 \Omega} = 212,5 \Omega$$

Παράδειγμα 2

Για τη συνδεσμολογία σε τρίγωνο του σχήματος 3.20, δίνονται οι αντιστάσεις: $R_{12}=40\Omega$, $R_{23}=120\Omega$, $R_{13}=160\Omega$. Υπολογίστε τις ισοδύναμες αντιστάσεις όταν το κύκλωμα μετατραπεί σε συνδεσμολογία αστερά, σχήμα 3.19:

$$\sum R = 40\Omega + 120\Omega + 160\Omega = 320\Omega$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{\sum R} = \frac{40\Omega \cdot 160\Omega}{320\Omega} = 20\Omega$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{\sum R} = \frac{120\Omega \cdot 40\Omega}{320\Omega} = 15\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{\sum R} = \frac{160\Omega \cdot 120\Omega}{320\Omega} = 60\Omega$$

3.10. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Στη συνδεσμολογία σε σειρά των στοιχείων ενός κυκλώματος υπάρχει μία διαδρομή ρεύματος, επομένως σε οποιοδήποτε σημείο υπάρχει ένα και μοναδικό ρεύμα.
2. Το άθροισμα των επί μέρους πτώσεων τάσης σε ένα κύκλωμα σύνδεσης αντιστάσεων σε σειρά, ισούται με την τάση που εφαρμόζεται από την πηγή στο κύκλωμα.
3. Η ισοδύναμη αντίσταση της σύνδεσης σε σειρά ισούται με το άθροισμα των επί μέρους ωμικών αντιστάσεων.
4. Στην παράλληλη σύνδεση των αντιστάσεων υπάρχουν περισσότερες διαδρομές ρευμάτων, επομένως υπάρχουν περισσότερα ρεύματα.
5. Το άθροισμα των ρευμάτων σε όλους τους κλάδους συνδεδεμένους παράλληλα ισούται με το συνολικό ρεύμα.

6. Σε όλους τους κλάδους, συνδεδεμένους παράλληλα, εφαρμόζεται η ίδια τάση.
7. Η συνολική αγωγιμότητα των αντιστάσεων, που είναι συνδεδεμένες παράλληλα, ισούται με το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων των επί μέρους αντιστάσεων. Η συνολική αντίσταση είναι το αντίστροφο της συνολικής αγωγιμότητας.
8. Το άθροισμα της ισχύος όλων των επιμέρους αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά ή παράλληλα, ισούται με την συνολική ισχύ που τροφοδοτεί η πηγή στο κύκλωμα.
9. Το ρεύμα στον κάθε κλάδο ενός κυκλώματος με παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων είναι ανάλογο της αγωγιμότητας του κλάδου και συνεπώς είναι αντιστρόφως ανάλογο της ωμικής αντίστασης.
10. Οι περισσότερες βιομηχανικές και οικιακές ηλεκτρικές συσκευές αποτελούν εφαρμογές της παράλληλης σύνδεσης.
11. Σε ένα μικτό κύκλωμα, προσδιορίζουμε τα τμήματα σε σειρά και τους παράλληλους κλάδους. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε όλους τους κανόνες της σύνδεσης σε σειρά και της παράλληλης σύνδεσης αντιστάσεων.

3.11. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1. Τι σημαίνει εάν προκύψει αρνητικό ρεύμα κατά την εφαρμογή των νόμων του Κίρκωφ;
2. Ποια ρεύματα σε ένα κόμβο είναι αρνητικά και ποια είναι θετικά;
3. Πως προσδιορίζεται η πολικότητα των πηγών;
4. Σε ένα μικτό κύκλωμα, πώς προσδιορίζουμε ποια τμήματα είναι σε σειρά και ποια είναι οι παράλληλοι κλάδοι;

5. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση δέκα αντιστάσεων των 10Ω που είναι συνδεδεμένες σε σειρά.

Απάντηση: 100Ω

6. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση δέκα αντιστάσεων των 10Ω που είναι συνδεδεμένες παράλληλα.

Απάντηση: 1Ω

7. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση πέντε αντιστάσεων των 10Ω , 15Ω , 3Ω , 7Ω και 20Ω που είναι συνδεδεμένες σε σειρά.

Απάντηση: 55Ω

8. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση τριών αντιστάσεων των 10Ω , 20Ω και 25Ω που είναι συνδεδεμένες παράλληλα.

Απάντηση: $5,26\Omega$

9. Υπολογίστε την ισοδύναμη αγωγιμότητα τριών αντιστάσεων των 5Ω , 2Ω και 4Ω που είναι συνδεδεμένες παράλληλα.

Απάντηση: $0,95S$

10. Ένα φωτιστικό για Χριστουγεννιάτικο δέντρο αποτελείται από 20 λαμπτήρες των 9 W και $1,5\text{ V}$ συνδεδεμένους σε σειρά και τροφοδοτείται από τάση 220 V . Υπολογίστε α) το ρεύμα στο φωτιστικό και β) την αντίσταση κάθε λαμπτήρα.

Απάντηση: α) $0,82\text{A}$, β) $13,5\Omega$.

11. Δύο αντιστάσεις θέρμανσης των 60Ω και 40Ω συνδεδεμένες σε σειρά τροφοδοτούνται από τάση 220V . Υπολογίστε την πτώση τάσης στην κάθε αντίσταση.

Απάντηση: 132V και 88V , αντίστοιχα.

12. Τρεις αντιστάσεις θέρμανσης των $100\ \Omega$, $60\ \Omega$ και $40\ \Omega$ συνδεδεμένες σε σειρά τροφοδοτούνται από τάση 220V . Υπολογίστε την πτώση τάσης στην κάθε αντίσταση.

Απάντηση: 110V , 66V και 44V , αντίστοιχα.

13. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση τριών αντιστάσεων των $10\ \Omega$, $15\ \Omega$ και $20\ \Omega$ συνδεδεμένων σε σειρά με άλλες τρεις αντιστάσεις των $10\ \Omega$, $15\ \Omega$ και $20\ \Omega$ συνδεδεμένες παράλληλα.

Απάντηση: $49,62\ \Omega$

14. Οι ίδιες αντιστάσεις της άσκησης 13 επανασυνδέονται έτσι ώστε οι όμοιες αντιστάσεις να συνδεθούν παράλληλα μεταξύ τους και οι τρεις παράλληλοι συνδυασμοί να συνδεθούν σε σειρά. Υπολογίστε την ισοδύναμη αντίσταση.

Απάντηση: $22,5\ \Omega$

15. Η ισοδύναμη αντίσταση τριών αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά είναι $250\ \Omega$. Η μία αντίσταση είναι $50\ \Omega$, η δεύτερη είναι $100\ \Omega$. Υπολογίστε την τρίτη αντίσταση.

Απάντηση: $100\ \Omega$.

16. Προσδιορίστε τον αριθμό των κόμβων, των κλάδων και των βρόχων στα κυκλώματα των σχημάτων 3.16 και 3.17.α.

Απάντηση: Στο Σχήμα 3.16 υπάρχουν 4 κόμβοι, 6 κλάδοι και 3 βρόχοι. Στο Σχήμα 3.17.α υπάρχουν 6 κόμβοι, 7 κλάδοι και 4 βρόχοι.