Πρόοδος «Εκπαιδευτική Τεχνολογία και Πολυμέσα» (Ε)

ΑΣΠΑΙΤΕ - Τρίτη 14 Μαΐου 2024

Όνομα: ____

Επώνυμο: ____

Α.Μ.: ____________________________

Εξάμηνο: ____________________________

Μάθημα: Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων / Α' Λυκείου ΕΠΑΛ
(http://ebooks.edu.gr/ebooks/d/8547/2466/22-0284-01_Algebra-kai-Stoicheia-Pithanotiton_A-Lykeiou_Vivlio-Mathiti.pdf)

Ερώτηση:

Διδάσκεις στην Α' Λυκείου ΕΠΑΛ «**Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων**» και για να βοηθήσεις τους μαθητές σου να κατανοήσουν καλύτερα το μάθημα στην ενότητα **«7.3 Μελέτη της Συνάρτησης f(x) = αx^2 + βx + γ»** (σελ. 199-203), δημιουργείς ένα φύλλο εργασίας βασισμένο στην (καθοδηγούμενη) ανακαλυπτική/διερευνητική μέθοδο με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων.

Το μάθημά σου είναι <u>δύο διδακτικές ώρες</u> (45' + 45').

Φτιάξε το φύλλο εργασίας με τρόπο που να κατευθύνεις τους μαθητές σου να φτάσουν από μόνοι τους να «ανακαλύψουν» ότι η δημιουργία του γραφήματος της f(x) = αx^2 + βx + γ είναι άμεσα κατανοητή από τους συντελεστές α, β και γ.

Μπορείς ως ψηφιακό εργαλείο για το συγκεκριμένο μάθημα να χρησιμοποιήσεις την προσομοίωση του PHET (https://phet.colorado.edu/el/) "**Γραφικές αναπαραστάσεις**" (https://phet.colorado.edu/el/simulations/graphing-quadratics) ή όποιο άλλο εργαλείο επιθυμείς.

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = αx^2 + βx + γ$

Θα μελετήσουμε αρχικά τη συνάρτηση $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ που είναι ειδική περίπτωση της $f(x) = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

Για τη μελέτη της συνάρτησης g μετασχηματίζουμε τον τύπο της ως εξής:

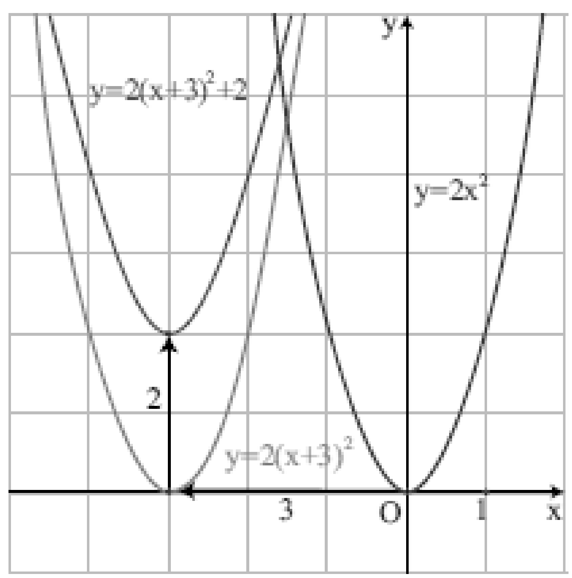
$$\begin{aligned} g(x) = 2x^2 + 12x + 20 &= 2(x^2 + 6x + 10) \\ &= 2[x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10] \\ &= 2[(x+3)^2 + 1] \\ &= 2(x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$g(x) = 2(x+3)^2 + 2$$

Επομένως, για να παραστήσουμε γραφικά την g, χαράσσουμε πρώτα την $y = 2(x + 3)^2$ που προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = 2x^2$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά, και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = 2\,(x + 3)^2 + 2$ που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = 2(x + 3)^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

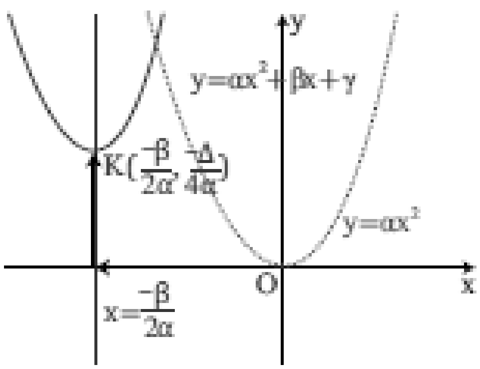
Άρα, η γραφική παράσταση της $g(x) = 2(x + 3)^2 + 2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο Κ(–3,2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -3$.

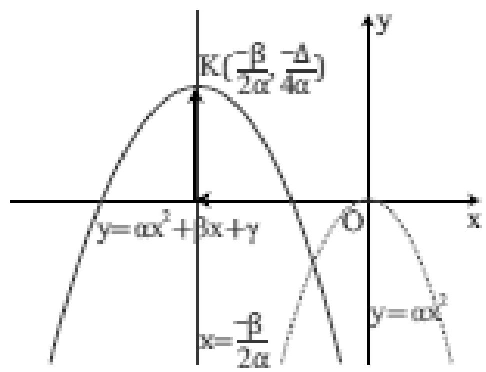


Θα μελετήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, με $α \neq 0$. Όπως είδαμε στην §3.2 (μορφές τριωνύμου), η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Επομένως η γραφική της παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = \alpha x^2$, μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Συνεπώς είναι και αυτή μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο $\mathbf{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)}$ και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $\mathbf{x=-\frac{\beta}{2\alpha}}$.





Άρα, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:

- Αν $\alpha > 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.
  - ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha > 0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

• Αν $\alpha < 0$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

✓ Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right) = -\dfrac{\Delta}{4\alpha}$.

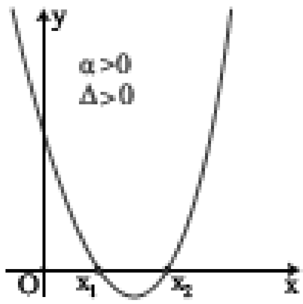
Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	$\dfrac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗	$\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max	↘ $-\infty$

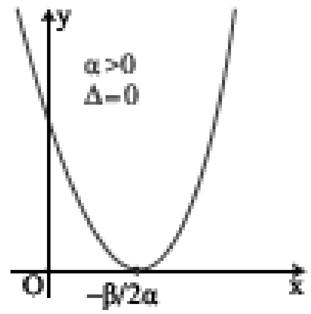
Τέλος η γραφική παράσταση της f είναι μια **παραβολή** που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$, διότι $f(0) = \gamma$, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα x'x παρατηρούμε ότι:

- Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία, τα $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ (Σχ. α').
- Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα x'x στο σημείο $A\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$ (Σχ. β').
- Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x'x (Σχ. γ').

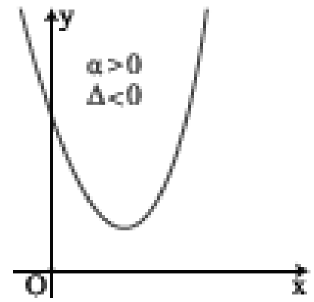
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



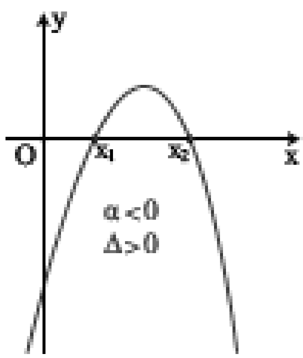
<u>Σχήμα α΄</u>



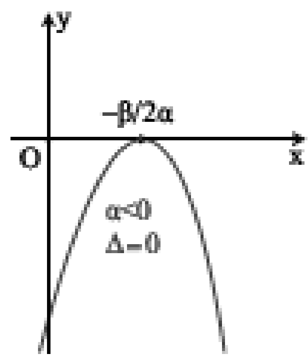
<u>Σχήμα β΄</u>



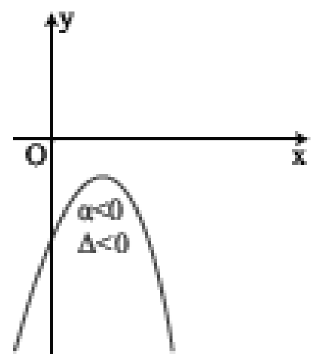
<u>Σχήμα γ΄</u>



<u>Σχήμα α΄</u>



<u>Σχήμα β΄</u>



<u>Σχήμα γ΄</u>

Τα συμπεράσματα της §3.2 για το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτουν άμεσα και με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}.$$

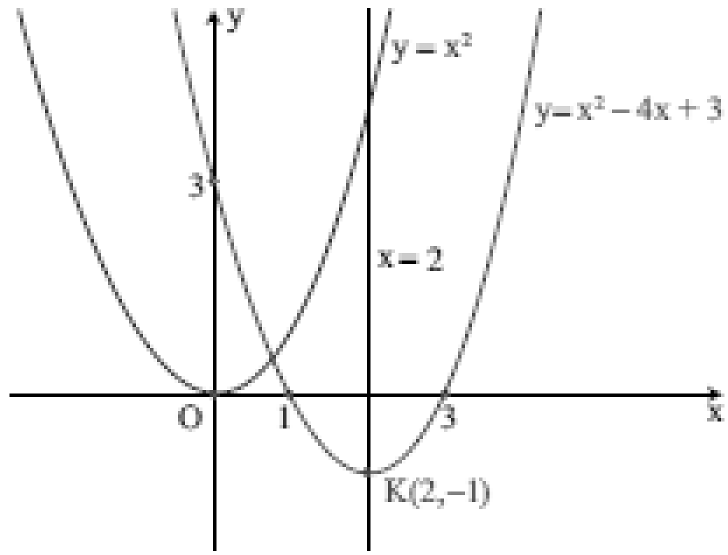
ΛΥΣΗ

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ είναι

$$\alpha = 1 > 0,\ \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{-\Delta}{4\alpha} = f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = f(2) = -1.$$

Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)=x^2-4x+3$	$+\infty$ ↘	-1 min	↗ $+\infty$



Δηλαδή η συνάρτηση f,

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$,

✓ Παρουσιάζει για $x = 2$ ελάχιστο, το $f(2) = -1$.

Επιπλέον, η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή η οποία:

✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$ και

✓ Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 αντιστοίχως, που είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$, και τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 3.