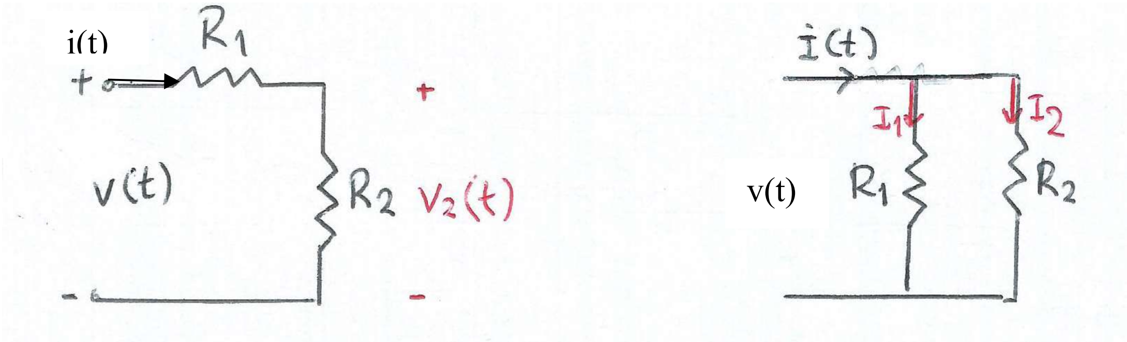
# 2. ΑΠΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

## 2.1. Διαίρεση τάσης και ρεύματος

### 2.1.1. Γενικά

Για τα απλά κυκλώματα που ακολουθούν, μπορεί να αποδειχθεί ότι

- $v_2(t) = v(t)\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$
- $i_2(t) = i(t)\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$




Απόδειξη

- $v_2(t) = i(t)R_2 = \dfrac{v(t)}{R_1+R_2}R_2 = v(t)\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

- $i_2(t) = \dfrac{v(t)}{R_2} = \dfrac{i_1(t)R_1}{R_2}$

  Όμως $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ οπότε $i_1(t) = i(t) – i_2(t)$. Συνεπώς, προκύπτει ότι

  $i_2(t) = \dfrac{[i(t) - i_2(t)]R_1}{R_2}$

  Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει:

$$i_2(t) = \frac{[i(t) - i_2(t)]R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{i_2(t)R_2}{R_1} = i(t) - i_2(t) \Rightarrow \frac{i_2(t)R_2}{R_1} + i_2(t) = i(t) \Rightarrow$$

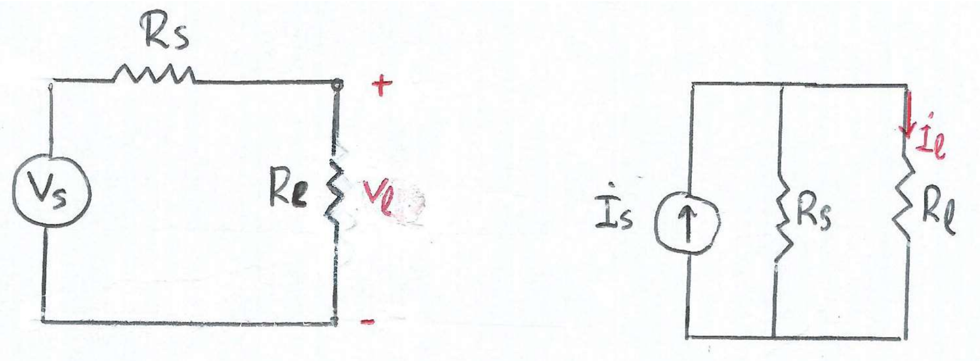
$$[\frac{R_2}{R_1} + 1]i_2(t) = i(t) \Rightarrow \frac{R_1+R_2}{R_1}i_2(t) = i(t) \Rightarrow i_2(t) = i(t)\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

### 2.1.2. Χαρακτηρισμός πηγών τάσης και ρεύματος

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για **πηγή τάσης** $v_S(t)$ ή **πηγή ρεύματος** $i_S(t)$ με εσωτερική αντίσταση $R_S$ συνδεδεμένη με αντίσταση φορτίου $R_\ell$, προκύπτει ότι

$$v_\ell(t) = v_S(t)\,\frac{R_\ell}{R_S + R_\ell}$$

$$i_\ell(t) = i_S(t)\,\frac{R_S}{R_S + R_\ell}$$




Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι:

- Για σύνδεση αντίστασης φορτίου με **πηγή τάσης**, προκειμένου στο φορτίο να «εμφανίζεται» το μεγαλύτερο ποσοστό της τάσης της πηγής, θα πρέπει $\mathbf{R_S \ll R_\ell}$.
  Αν η πηγή τάσης είναι **ιδανική** ($\mathbf{R_S = 0}$), στο φορτίο «εμφανίζεται» **ολόκληρη** η τάση της πηγής ($\mathbf{v_\ell = v_S}$).
- Για σύνδεση αντίστασης φορτίου με **πηγή ρεύματος**, προκειμένου στο φορτίο να «διοχετεύεται» το μεγαλύτερο ποσοστό του ρεύματος της πηγής, θα πρέπει $\mathbf{R_S \gg R_\ell}$.
  Αν η πηγή ρεύματος είναι **ιδανική** ($\mathbf{R_S \to \infty}$), στο φορτίο «διοχετεύεται» **ολόκληρο** το ρεύμα της πηγής ($\mathbf{i_\ell = i_S}$).

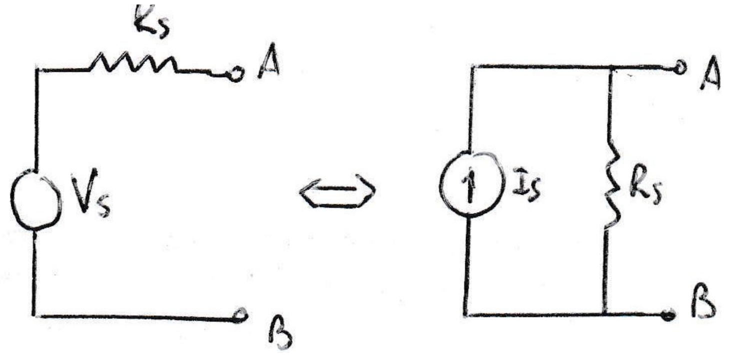
Τα παραπάνω, προκύπτουν και αν οι σχέσεις διαίρεσης τάσης και ρεύματος γραφούν στη μορφή

$$\frac{v_\ell(t)}{v_S(t)} = \frac{1}{\frac{R_S}{R_\ell}+1}$$

$$\frac{i_\ell(t)}{i_S(t)} = \frac{1}{1+\frac{R_\ell}{R_S}}$$

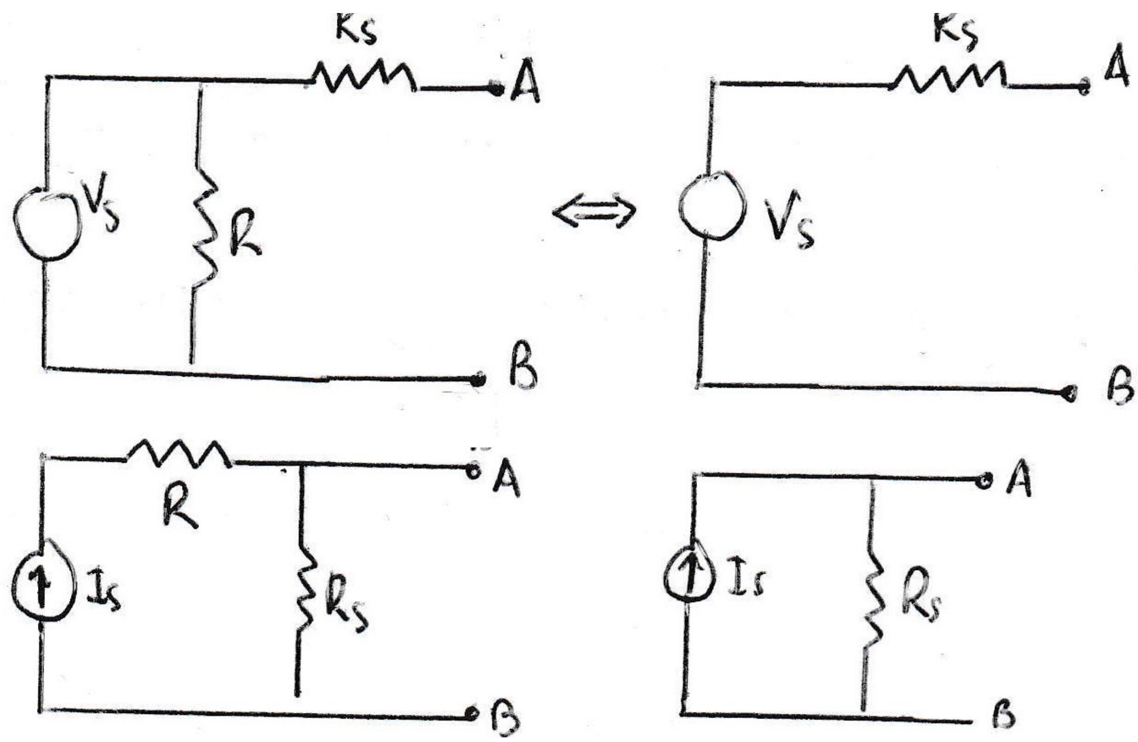
οι δε ποσότητες $\frac{v_\ell(t)}{v_S(t)}$ και $\frac{i_\ell(t)}{i_S(t)}$ μελετηθούν συναρτήσει των τιμών (αντίστοιχα) $\frac{R_S}{R_\ell}$ και $\frac{R_\ell}{R_S}$ (βλ. παραδείγματα 7 και 8).

### 2.1.3. Ισοδύναμα κυκλώματα




$$I_s = \frac{V_s}{R_s}$$

Ισοδυναμία πηγής τάσης με πηγή ρεύματος




Άλλα ισοδύναμα κυκλώματα (στα παραπάνω κυκλώματα, ο αντιστάτης R μπορεί να παραλειφθεί)

### 2.1.4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Πηγή τάσης $v_S$ = 100V με εσωτερική αντίσταση $R_S$ = 50Ω συνδέεται με αντίσταση φορτίου $R_l$ = 150Ω. Να υπολογιστεί η τάση $v_l$ του φορτίου.
Ο υπολογισμός να επαναληφθεί αν $R_l$ = 450Ω.
Λύση

$v_l(t) = v_S(t)\ \dfrac{R_\ell}{R_s + R_\ell}$

Για $R_l$ = 150Ω, είναι $v_l(t)$ = 75V.
Για $R_l$ = 450Ω, είναι $v_l(t)$ = 90V.
Σχόλιο: Όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου $R_l$, ο λόγος $\dfrac{R_\ell}{R_s}$ αυξάνεται οπότε η πηγή τάσης πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $v_l = v_S$)

Παράδειγμα 2

Πηγή ρεύματος $i_S$ = 12A με εσωτερική αντίσταση $R_S$ = 450Ω συνδέεται με αντίσταση φορτίου $R_l$ =150Ω. Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_l$ του φορτίου.
Ο υπολογισμός να επαναληφθεί αν $R_l$ = 50Ω.
Λύση

$i_l(t) = i_S(t)\ \dfrac{R_s}{R_s + R_\ell}$

Για $R_l$ = 150Ω, είναι $i_l(t)$ = 9A.
Για $R_l$ = 450Ω, είναι $v_l(t)$ = 10,8A.
Σχόλιο: Όσο μειώνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου $R_l$, ο λόγος $\dfrac{R_s}{R_\ell}$ αυξάνεται οπότε η πηγή ρεύματος πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $i_l = i_S$)

Παράδειγμα 3

Για πηγή τάσης $v_S$, να υπολογιστεί το κλάσμα $\dfrac{R_s}{R_\ell}$ προκειμένου το κλάσμα $\dfrac{v_\ell}{v_s}$ να έχει τιμές 0.5, 0.9, 0.99.

Λύση

Η σχέση $v_l(t) = v_S(t)\ \dfrac{R_\ell}{R_s + R_\ell}$ γράφεται στη μορφή $\dfrac{v_\ell}{v_s} = \dfrac{1}{\dfrac{R_s}{R_\ell} + 1}$

Θέτοντας $\dfrac{v_\ell}{v_s}$ = 0,5 ή 0,9 ή 0,99 και λύνοντας ως προς $\dfrac{R_s}{R_\ell}$, προκύπτει (αντίστοιχα)

$\dfrac{R_s}{R_\ell}$ = 1 ή 0,11 ή 0,01

Παράδειγμα 4

Για πηγή ρεύματος $i_S$, να υπολογιστεί το κλάσμα $\frac{R_\ell}{R_s}$ προκειμένου το κλάσμα $\frac{i_\ell}{i_s}$ να έχει τιμές 0.5, 0.9, 0.99.

Λύση

Η σχέση $i_l(t) = i_S(t)\ \frac{R_s}{R_s + R_\ell}$ γράφεται στη μορφή $\frac{i_\ell}{i_s} = \frac{1}{1+\frac{R_\ell}{R_s}}$

Θέτοντας $\frac{i_\ell}{i_s} = 0{,}5$ ή $0{,}9$ ή $0{,}99$ και λύνοντας ως προς $\frac{R_\ell}{R_s}$, προκύπτει (αντίστοιχα)

$\frac{R_\ell}{R_s} = 1$ ή $0{,}11$ ή $0{,}01$.

Παράδειγμα 5

Για πηγή τάσης $v_S = 100$ V και εσωτερική αντίσταση $R_S = 10\Omega$, να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της τάσης φορτίου $v_l$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της αντίστασης φορτίου $R_l$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $R_l = 0$ έως $90\Omega$ με βήμα $10\Omega$.

Λύση

$v_l = 100\ \frac{R_\ell}{10 + R_\ell}$

| $R_l$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_l$ | 0 | 50 | 66,7 | 75 | 80 | 83,3 | 85,7 | 87,5 | 88,9 | 90 |

Σχόλιο: Όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου $R_l$, ο λόγος $\frac{R_\ell}{R_s}$ αυξάνεται και η πηγή τάσης πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $v_l = v_S$).

Παράδειγμα 6

Για πηγή ρεύματος $i_S$ = 100 V και εσωτερική αντίσταση $R_S$ = 900Ω, να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του ρεύματος φορτίου $i_l$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της αντίστασης φορτίου $R_l$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $R_l$ = 0 έως 900Ω με βήμα 100Ω.

Λύση

$$i_l = 100\ \frac{900}{900 + R_\ell}$$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_l$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| $i_l$ | 100 | 90 | 81,8 | 75 | 69,2 | 64,3 | 60 | 56,3 | 52,9 | 50 |

Σχόλιο: Μολονότι η πηγή ρεύματος δεν είναι ιδανική ($R_S < \infty$), για αντίσταση φορτίου $R_l$ = 0 (βραχυκύκλωση φορτίου), $\frac{R_S}{R_\ell} \to \infty$ οπότε η πηγή συμπεριφέρεται σαν να ήταν ιδανική. Στη συνέχεια, όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου $R_l$, ο λόγος $\frac{R_s}{R_\ell}$ μειώνεται οπότε η πηγή ρεύματος απομακρύνεται από την ιδανική κατάσταση (όπου $i_l = i_S$).

Παράδειγμα 7

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του κλάσματος $\frac{v_\ell}{v_s}$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει του κλάσματος $\frac{R_s}{R_\ell}$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $\frac{R_s}{R_\ell} = 0$ (ιδανική πηγή τάσης) καθώς και $\frac{R_s}{R_\ell}$ = 0,2 έως και 2 με βήμα 0,2.

Λύση

$$\frac{v_\ell}{v_s} = \frac{1}{\frac{R_s}{R_\ell} + 1}$$

άρα η γραφική παράσταση είναι της μορφής $y = \frac{1}{x+1}$ όπου $y = \frac{v_\ell}{v_s}$ και $x = \frac{R_s}{R_\ell}$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = \frac{R_s}{R_\ell}$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | … |
| $y = \frac{v_\ell}{v_s}$ | 1 | 0,83 | 0,71 | 0,63 | 0,56 | 0,5 | 0,45 | 0,42 | 0,38 | … |

Παράδειγμα 8

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του κλάσματος $\frac{i_\ell}{i_s}$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει του κλάσματος $\frac{R_\ell}{R_s}$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $\frac{R_\ell}{R_s} = 0$ (ιδανική πηγή ρεύματος) καθώς και $\frac{R_\ell}{R_s} = 0{,}2$ έως και 2 με βήμα 0,2.

Λύση

$$\frac{i_\ell}{i_s} = \frac{1}{1+\frac{R_\ell}{R_s}}$$

άρα η γραφική παράσταση είναι της μορφής $y = \frac{1}{1+x}$ όπου $y = \frac{i_\ell}{i_s}$ και $x = \frac{R_\ell}{R_s}$

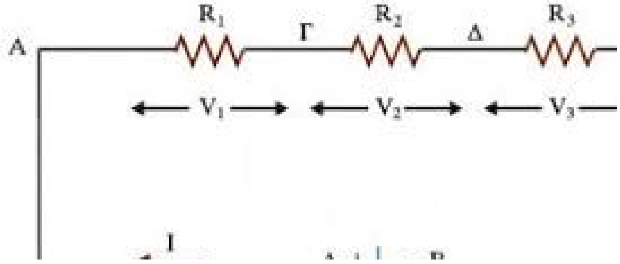
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = \frac{R_s}{R_\ell}$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | … |
| $y = \frac{v_\ell}{v_s}$ | 1 | 0,83 | 0,71 | 0,63 | 0,56 | 0,5 | 0,45 | 0,42 | 0,38 | … |

## 2.2. Συνδεσμολογίες απλών κυκλωματικών στοιχείων

### 2.2.1. Αντιστάτες

Αντιστάτες σε σειρά

$R_{ολ} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$




Απόδειξη

Οι αντιστάτες διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \;\Rightarrow\; v = iR_1 + iR_2 + \ldots + iR_n \;\Rightarrow$

$v = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$

Η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $R_1$, $R_2$, …, $R_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

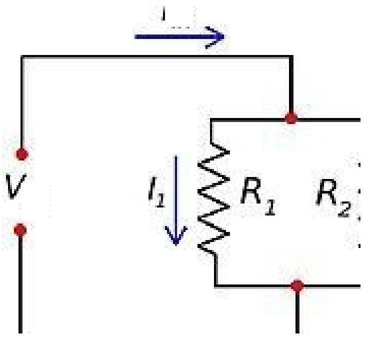
$v = iR_{ολ}$

άρα

$R_{ολ} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$

Αντιστάτες παράλληλα

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$




Απόδειξη

Οι αντιστάτες είναι υπό την ίδια τάση v.

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \ldots + \frac{v}{R_n} \;\Rightarrow$$

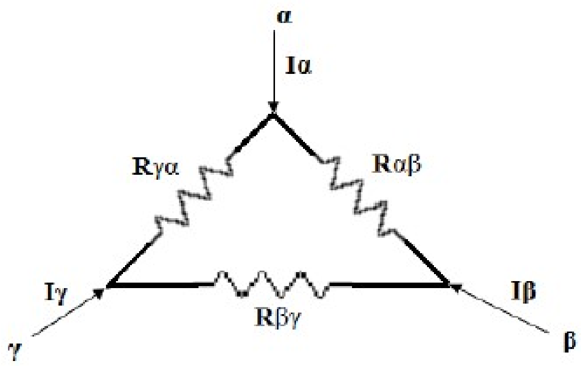
$$i = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)$$

Η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $R_1$, $R_2$, …, $R_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $i = \dfrac{v}{R_{ολ}}$ άρα

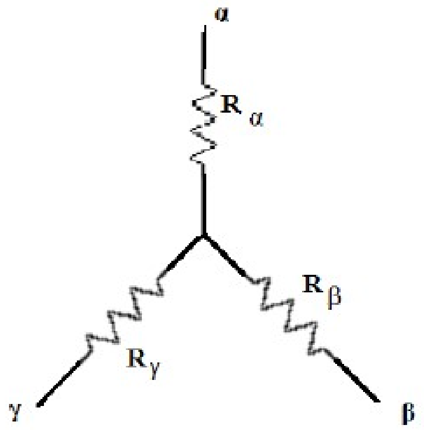
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

## Αντιστάτες σε συνδεσμολογία αστέρα (**Y**) και τριγώνου (**Δ**)

Η μετατροπή συνδεσμολογίας αντιστατών τοπολογίας αστέρα (συμβολικά, **Y**) σε συνδεσμολογία τοπολογίας τριγώνου (συμβολικά, **Δ**) γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους (θεώρημα Kenelly):




Σύνδεση αντιστάσεων σε τρίγωνο




Σύνδεση αντιστάσεων σε αστέρα

$$R_{\alpha\beta} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\gamma}$$

$$R_{\beta\gamma} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\alpha}$$

$$R_{\gamma\alpha} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\beta}$$

$$R_\alpha = \frac{R_{\alpha\beta} R_{\alpha\gamma}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

$$R_\beta = \frac{R_{\beta\gamma} R_{\beta\alpha}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

$$R_\gamma = \frac{R_{\gamma\alpha} R_{\gamma\beta}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

### 2.2.2. Πηνία

Πηνία σε σειρά

$L_{ολ} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Απόδειξη

Τα πηνία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \;\Rightarrow\; v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots + L_n\frac{di}{dt} \;\Rightarrow$$

$$v = (L_1 + L_2 + \ldots + L_n)\frac{di}{dt}$$

Η ολική αυτεπαγωγή $L_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $L_1, L_2, \ldots, L_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$v = L_{ολ}\frac{di}{dt}.$$

άρα

$L_{ολ} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Πηνία παράλληλα

$$\frac{1}{L_{ολ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

Απόδειξη

Τα πηνία είναι υπό την ίδια τάση v.

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = \frac{1}{L_1}\int v(t)dt + \frac{1}{L_2}\int v(t)dt + \ldots + \frac{1}{L_n}\int v(t)dt \;\Rightarrow$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right)\int v(t)dt$$

Η ολική αυτεπαγωγή $L_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $L_1, L_2, \ldots, L_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$i = \frac{1}{L_{ολ}}\int v(t)dt$$

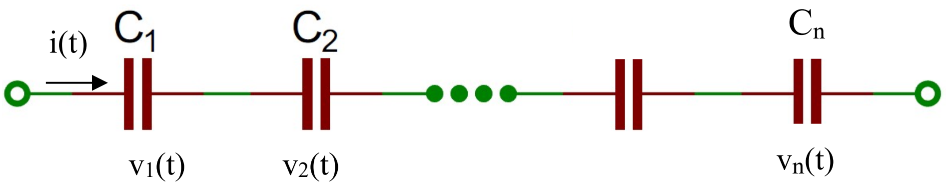
άρα

$$\frac{1}{L_{ολ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

### 2.2.3. Πυκνωτές

Πυκνωτές σε σειρά

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$




Απόδειξη

Οι πυκνωτές διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \;\Rightarrow$

$$v = \frac{1}{C_1}\int i(t)dt + \frac{1}{C_2}\int i(t)dt + \ldots + \frac{1}{C_n}\int i(t)dt \;\Rightarrow$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)\int i(t)dt$$

Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $C_1, C_2, \ldots, C_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

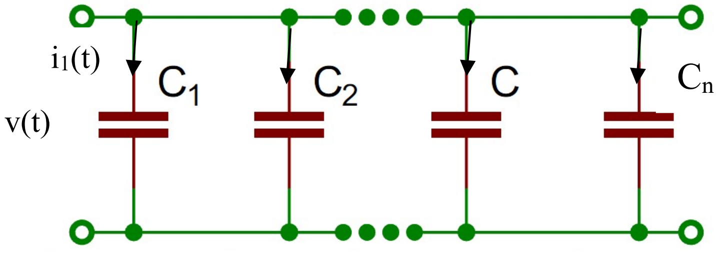
$$v = \frac{1}{C_{ολ}}\int i(t)dt$$

άρα

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Πυκνωτές παράλληλα

$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$




Απόδειξη

Οι πυκνωτές είναι υπό την ίδια τάση v.

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + \ldots + C_n\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; i = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)\frac{dv}{dt}$$

Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $C_1, C_2, \ldots, C_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$i = C_{ολ}\frac{dv}{dt}.$$

άρα

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

### 2.2.4. Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ για παράλληλη σύνδεση **n** αντιστάσεων που η καθεμιά ισούται με R.

Λύση

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R} \;\Rightarrow\; R_{ολ} = \frac{R}{n}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η αντίσταση R’ η οποία θα πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση R ώστε η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ να προκύψει ίση με $\frac{R}{3}$ (η R’ να δοθεί ως συνάρτηση του R).

Λύση

Θα πρέπει

$$\frac{RR'}{R + R'} = \frac{R}{3}$$

Επιλύοντας ως προς R’, προκύπτει $R' = \frac{R}{2}$

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι για την ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ σε παράλληλη σύνδεση δύο αντιστάσεων $R_1$ και $R_2$ ισχύει ότι $R_{ολ} < R_1$ και $R_{ολ} < R_2$.

Λύση

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_1$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_2$$

## Παραπομπές κεφαλαίου

Γ.Ε. Χατζαράκης. Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Εκδ. Τζιόλα & Υιοί, 2015.
Ενότητες: 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13.1.
Εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις, ενότητα 2.14): $1^{\eta}$, $6^{\eta}$, $9^{\eta}$.