



**ΑΣΠΑΙΤΕ**

ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

# Πτυχιακή Εργασία

των φοιτητών του Τμήματος Εκπαιδευτικών  
Ηλεκτρολόγων Μηχανικών

Αρτσιβούρτση Αλέξανδρου

Καπέλη Χρήστου

## ΘΕΜΑ

«ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΓΙΑ  
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ»

Επιβλέπων Καθηγητής

κ. Δρίτσας Λεωνίδας

# Πρόλογος

Από την εποχή της βιομηχανικής επανάστασης, η ανάγκη του ανθρώπου για ενέργεια είναι διαρκώς αυξανόμενη. Ύστερα από την ανακάλυψη του επαγωγικού κινητήρα από τον Νικόλα Τεσλα το 1888, που σηματοδότησε την ολοένα αυξανόμενη σημασία της ηλεκτρικής ενέργειας στη βιομηχανία, το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας που χρησιμοποιείται στις σύγχρονες κοινωνίες είναι στη μορφή ηλεκτρικής ενέργειας. Η επικρατέστερη τάση μέχρι σήμερα για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας (Σ.Η.Ε), είναι αυτή του διασυνδεδεμένου συστήματος όπου ένας μεγάλος αριθμός Σύγχρονων Γεννητριών και φορτίων συνδέονται μέσω διασυνδεδετικών γραμμών μεταφοράς και διανομής.

Ο προγραμματισμός, η κατασκευή, η λειτουργία και ο Αυτόματος Έλεγχος τέτοιων συστημάτων είναι κατ' επέκταση πολύπλοκος. Για να μελετήσουμε και να προβλέψουμε την ευστάθεια και την επίδοση τέτοιων σύνθετων συστημάτων, είμαστε υποχρεωμένοι να αναπτύξουμε και να χρησιμοποιήσουμε ισχυρά εργαλεία ανάλυσης και σύνθεσης. Αυτό ισχύει και για τις Σύγχρονες Γεννήτριες ως βασικό συστατικό των Σ.Η.Ε και μάλιστα στις σύγχρονες συνθήκες διεσπαρμένης παραγωγής (distributed generation). Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας, είναι η κατάστρωση και η προσομοίωση της πλήρους μη γραμμικής δυναμικής της σύγχρονης γεννήτριας. Η εργασία εκπονήθηκε κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2016-17 στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.

# Περίληψη

Στόχος της πτυχιακής είναι η κατάστρωση και προσομοίωση της πλήρους μη γραμμικής δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας (ΣΓ) όπως αυτή εκφράζεται από ένα σύνολο επτά μη γραμμικών πεπλεγμένων καταστατικών εξισώσεων. Προς την κατεύθυνση αυτή στην βιβλιογραφία συναντούμε δύο διαφορετικά αλλά ισοδύναμα μεταξύ τους καταστατικά μοντέλα: α) Μοντέλο βασισμένο σε πεπλεγμένες ροές β) Μοντέλο βασισμένο σε ρεύματα. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην προσέγγιση της πεπλεγμένης ροής. Μια σύγχρονη γεννήτρια μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα επτά (7) μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, πέντε εκ των οποίων αφορούν το ηλεκτρικό υποσύστημα ενώ οι υπόλοιπες δύο το μηχανικό. Ο αριθμός των ηλεκτρικών εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των ανεξάρτητων ηλεκτρικών μεταβλητών που απαιτούνται για να περιγράψουν την γεννήτρια. Οι μεταβλητές αυτές μπορούν να είναι είτε τα ρεύματα είτε πεπλεγμένες ροές (flux linkages). Οι μηχανικές μεταβλητές αφορούν την γωνιακή ταχύτητα του δρομέα  $\omega$  και την γωνία ισχύος  $\delta$  και απαιτείται η μηχανική εξίσωση για την ολοκλήρωση του μοντέλου. Οι δύο εξισώσεις του μηχανικού υποσυστήματος συσχετίζουν την εξωτερική μηχανική ροπή που εφαρμόζεται στον άξονα της γεννήτριας με την ανθιστάμενη ηλεκτρομαγνητική ροπή που αναπτύσσεται εσωτερικά.

Επίσης μελετάμε την ευστάθεια με εμπειρικό τρόπο προσομοιώνοντας την απόκριση του συστήματος σε διάφορα σημεία λειτουργίας (operator points) και με διάφορα προφίλ στην παρεχόμενη μηχανική ροπή η οποία δρα σαν είσοδος στο σύστημα. Το πρόβλημα της ευστάθειας σχετίζεται με τη συμπεριφορά των σύγχρονων μηχανών όταν αλλάζουν οι συνθήκες λειτουργίας τους εξαιτίας κάποιας διαταραχής στο σύστημα. Ως γνωστόν η ευστάθεια ενός συστήματος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες λειτουργίας του συστήματος και τη φύση της διαταραχής. Για να χαρακτηριστεί το σύστημα της ΣΓ ως ευσταθές πρέπει να αποσβεστούν οι ταλαντώσεις και ο δρομέας να ανακτήσει τη σύγχρονη ταχύτητα, που αντιστοιχεί στην επιθυμητή συχνότητα του δικτύου.

Οι μη γραμμικές προσομοιώσεις της ΣΓ επιβεβαιώνουν πως εάν η διαταραχή δεν επηρεάσει καθόλου την τοπολογία του δικτύου, οι σύγχρονες μηχανές θα επανέλθουν στην αρχική κατάσταση λειτουργίας τους με προεξέχον χαρακτηριστικό την επάνοδο στην ονομαστική συχνότητα λειτουργίας.

# Abstract

The purpose of this thesis is the formulation and simulation of the full nonlinear state space equations of a typical synchronous generator (SG) expressed as a set of seven (7) coupled nonlinear differential equations (ODEs). Two different SG modeling approaches are encountered in the bibliography: a) the flux model b) the current model. This thesis is focusing on the flux modeling and the state space equations are grouped as a set of five equations concerning the electrical subsystem (five flux linkages) and two more equations concerning the mechanical subsystem i.e. the mechanical speed of the rotor ( $\omega$ ) and the power/torque angle ( $\delta$ ). This set of seven ODEs is simulated via MATLAB using an integration routine for “stiff ODEs” and subsequently used for stability analysis. Stability is tested and verified by checking the simulated responses of the seven state variables in different operating points and with different mechanical torque profiles. Our simulations empirically verify the desired stability and performance behavior in various operating conditions.

# Πίνακας Περιεχομένων

|  |    |
|--|----|
| Πρόλογος .....   | 1  |
| Περίληψη .....   | 2  |
| Abstract .....   | 3  |
| Κεφάλαιο 1 .....   | 6  |
| Εισαγωγή στις Σύγχρονες Μηχανές .....                          | 6  |
| 1.1 Περιγραφή της Σύγχρονης Μηχανής .....                      | 6  |
| Κεφάλαιο 2 .....   | 9  |
| Μοντελοποίηση Σύγχρονης Γεννήτριας .....                       | 10 |
| 2.1 Μετασχηματισμός Park .....                                 | 10 |
| 2.2 Εξισώσεις Μαγνητικής Ζεύξης .....                          | 15 |
| 2.2.1 Αυτεπαγωγή στο Στάτη .....                               | 15 |
| 2.2.2 Αυτεπαγωγή στο Δρομέα .....                              | 16 |
| 2.2.3 Αμοιβαία Επαγωγή στο Στάτη .....                         | 16 |
| 2.2.4 Αμοιβαία Επαγωγή στο Δρομέα .....                        | 17 |
| 2.2.5 Αμοιβαία Επαγωγή Στάτη-Δρομέα .....                      | 18 |
| 2.3 Μετασχηματισμός των Επαγωγών .....                         | 20 |
| 2.4 Εξισώσεις Τάσεων .....                                     | 22 |
| 2.5 Εξισώσεις Χώρου Κατάστασης .....                           | 26 |
| 2.6 Ισοδύναμο Κύκλωμα Σύγχρονης Γεννήτριας .....               | 27 |
| 2.7 Μοντέλο Χώρου Κατάστασης πεπλεγμένων Μαγνητικών Ροών ..... | 31 |
| 2.7.1 Εξισώσεις Τάσεων .....                                   | 33 |
| 2.7.2 Εξίσωση Ροπής .....                                      | 34 |
| 2.7.3 Αγνοώντας τον Κορεσμό .....                              | 35 |
| 2.8 Εξισώσεις Φορτίου .....                                    | 38 |
| 2.8.1 Σύγχρονη Γεννήτρια Σε Άπειρο Ζυγό .....                  | 38 |

|                                    |   |           |
|------------------------------------|---|-----------|
| 2.8.2                              | Μοντέλο πεπλεγμένων Μαγνητικών Ροών.....  | 40        |
| <b>Κεφάλαιο 3</b>                  | .....   | <b>43</b> |
|                                    | <b>Πειράματα Μη Γραμμικής Προσομοίωσης</b> .....  | <b>43</b> |
| 3.1                                | Προσομοίωση Σύγχρονης Γεννήτριας.....   | 43        |
| 3.1.1                              | Προσδιορισμός Αρχικών Συνθηκών .....  | 44        |
| 3.2                                | Αποκρίσεις της πλήρως μη Γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας χωρίς σύνδεση σε άπειρο ζυγό. ....                                      | 47        |
| 3.3                                | Αποκρίσεις της πλήρως Μη Γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας συνδεδεμένη σε άπειρο ζυγό με βηματική διαταραχή στη ροπή εισόδου. .... | 52        |
| 3.4                                | Αποκρίσεις της πλήρως Μη γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας με κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου. ....                | 56        |
| <b>Κεφάλαιο 4</b>                  | .....   | <b>60</b> |
|                                    | <b>Συμπεράσματα και Μελλοντική εργασία</b> .....  | <b>60</b> |
| <b>Παράρτημα Α':Κώδικας MATLAB</b> | .....   | <b>61</b> |
| A.1                                | Προσδιορισμός Αρχικών Συνθηκών .....  | 61        |
| <b>Βιβλιογραφία</b>                | .....   | <b>63</b> |

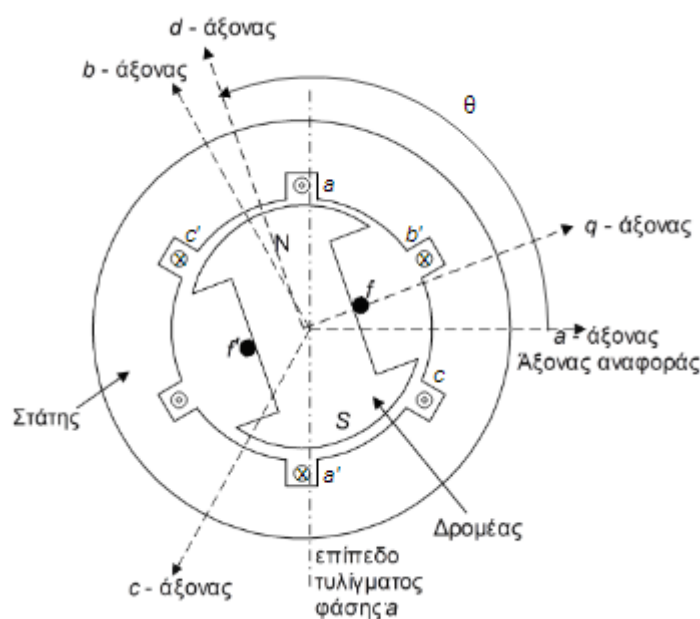
# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή στις Σύγχρονες Μηχανές

Η σύγχρονη γεννήτρια, ο τριφασικός μετασχηματιστής ισχύος και η γραμμή μεταφοράς αποτελούν τις βασικές συνιστώσες ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Η βασική θεωρία όλων αυτών των συσκευών είναι λίγο-πολύ γνωστή από την ύλη άλλων μαθημάτων. Παρόλα αυτά κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν στη συνέχεια περιληπτικά εκείνα τα χαρακτηριστικά αυτών των συσκευών που είναι σημαντικά από τη σκοπιά του συστήματος, αυτά δηλαδή που καθορίζουν τη συμπεριφορά τους όταν λειτουργούν στα πλαίσια ενός μεγάλου διασυνδεδεμένου συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας.

### 1.1 Περιγραφή της Σύγχρονης Μηχανής

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η σχηματική παράσταση της τομής μια σύγχρονης μηχανής, όπου διακρίνουμε τα 2 βασικά μέρη από τα οποία αυτή αποτελείται: το στάτη, που είναι ακίνητο μέρος, και το δρομέα, που είναι περιστρεφόμενο μέρος. Αν η μηχανή λειτουργεί ως γεννήτρια ο δρομέας περιστρέφεται από στρόβιλο (ατμού, αερίου ή ύδατος).



Σχήμα 1.1: Σχηματική παράσταση τομής σύγχρονης μηχανής

Ο στάτης είναι μια κοίλη κυλινδρική κατασκευή από σιδηρομαγνητικό υλικό σε μορφή ελασμάτων που φέρει διαμήκεις αύλακες στην εσωτερική του επιφάνεια. Στις αύλακες αυτές τοποθετούνται τα τυλίγματα του στάτη, που διευθετούνται σε τρεις συμμετρικές ζώνες (μία για κάθε φάση) που απέχουν μεταξύ τους στο χώρο  $120^\circ$ . Παρόλο που τα τυλίγματα του στάτη έχουν πολλές σπείρες που είναι κατανεμημένες σε έναν αριθμό αυλάκων της εσωτερικής του επιφάνειας, στο σχήμα το τύλιγμα κάθε φάσης δείχνεται παραστατικά με μία μόνο σπείρα οι 2 πλευρές της οποίας συμβολίζονται με ένα γράμμα και το νούμερό του. Το τύλιγμα της φάσης α, για παράδειγμα, που σχεδιάστηκε στο κατακόρυφο επίπεδο, συμβολίζεται με τα γράμματα α και α'. Σε κάθε τύλιγμα του στάτη αντιστοιχεί ένα άξονας, που είναι κάθετος στο επίπεδο του αντίστοιχου τυλίγματος. Ο στάτης, δηλαδή, έχει 3 άξονες α, β και γ που είναι ακίνητοι. Ο α-άξονας λαμβάνεται πάντοτε ως άξονας αναφοράς.

Ο δρομέας είναι μια συμπαγής σιδηρομαγνητική κατασκευή που τοποθετείται στον άξονα της μηχανής και περιστρέφεται μέσα στο στάτη. Στο δρομέα υπάρχει επίσης τύλιγμα, το τύλιγμα πεδίου, που τροφοδοτείται από πηγή συνεχούς ρεύματος, τη διεγέρτρια. Σκοπός αυτού του τυλίγματος, που στο σχήμα δείχνεται επίσης με μία σπείρα, είναι η παραγωγή ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Η διεγέρτρια μπορεί να είναι μια γεννήτρια συνεχούς που μοντάρεται στον ίδιον άξονα με αυτόν της μηχανής ή μια ξεχωριστή πηγή συνεχούς ρεύματος που συνδέεται στο τύλιγμα πεδίου με ψήκτρες. Οι μεγάλες γεννήτριες έχουν συνήθως διεγέρτριες που αποτελούνται από μια πηγή εναλλασσόμενου με ανορθωτική διάταξη.

Το τύλιγμα πεδίου δημιουργεί στο δρομέα δύο μαγνητικούς πόλους, που συμβολίζονται στο σχήμα Ν και S. Ο άξονας των πόλων του δρομέα ονομάζεται ευθύς άξονας (d-άξονας), ενώ ο κάθετος προς αυτόν ονομάζεται εγκάρσιος άξονας (q-άξονας). Η θετική κατεύθυνση του d-άξονα λαμβάνεται να προηγείται της θετικής κατεύθυνσης του q-άξονα κατά  $90^\circ$ . Η γωνία  $\theta = \omega t + \theta_0$ , όπου  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα του δρομέα και  $\theta_0$  η αρχική τιμή της γωνίας  $\theta$  τη χρονική στιγμή  $t=0$ , καθορίζει τη στιγμιαία θέση του d-άξονα

του δρομέα ως προς τον ακίνητο άξονα αναφοράς που είναι ο α-άξονας του στάτη. Η αρχική θέση του q-άξονα που βρίσκεται  $90^\circ$  πίσω από το d-άξονα, δίνεται από τη γωνία  $\delta = \theta_0 - \pi / 2$ . Θέτοντας  $\theta_0 = \delta + \pi / 2$  λαμβάνουμε:

$$\theta = \omega t + \theta_0 = \omega t + \delta + \frac{\pi}{2} \quad (1.1)$$

Όπου  $\delta$  η γωνία του q-άξονα τη χρονική στιγμή  $t=0$ .

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι δρομέα, ο κυλινδρικός δρομέας (που είναι ουσιαστικά δρομέας δύο πόλων) και ο δρομέας με έκτυπους πόλους. Η



σχεδίαση με έκτυπους πόλους χρησιμοποιείται για γεννήτριες μικρής ταχύτητας.Επειδή οι υδροστρόβιλοι λειτουργούν πιο αποδοτικά σε χαμηλές ταχύτητες,οι γεννήτριες που σχεδιάζονται για τέτοιες εφαρμογές έχουν γενικά πολλούς έκτυπους πόλους και περιστρέφονται ως προς τον κατακόρυφο άξονα.Η σχεδίαση με κυλινδρικό δρομέα συνηθίζεται για γεννήτριες υψηλής ταχύτητας.Επειδή οι ατμοστρόβιλοι λειτουργούν πιο αποδοτικά σε υψηλές ταχύτητες,οι γεννήτριες που σχεδιάζονται για αυτές τις εφαρμογές έχουν κυλινδρικούς δρομείς και περιστρέφονται ως προς τον οριζόντιο άξονα.

Οι μηχανές με έκτυπους πόλους έχουν συνήθως τυλίγματα απόσβεσης που αποτελούνται από βραχυκυκλωμένες ράβδους χαλκού που είναι τοποθετημένες κατά μήκος της επιφάνειας των πόλων.Σκοπός αυτών των τυλιγμάτων είναι η μείωση των μηχανικών ταλαντώσεων του δρομέα γύρω από τη σύγχρονη ταχύτητα.

Ο στάτης και ο δρομέας σχεδιάζονται έτσι ώστε για σταθερή ταχύτητα δρομέα,να παράγεται μια ημιτονοειδής τάση σε κάθε ένα από τα τυλίγματα του στάτη.Οι τρεις αυτές τάσεις έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια συχνότητα και παρουσιάζουν φασική διαφορά 120° η μία από την άλλη.Συνδέοντας συνεπώς τα τρία αυτά τυλίγματα σε τριφασική διάταξη,σχηματίζουμε μία τριφασική πηγή.

Σε μια μηχανή με δρομέα δύο πόλων,σε κάθε τύλιγμα του στάτη παράγεται ένας κύκλος τάσης ανά πλήρη περιστροφή του δρομέα.Σε μηχανή με δρομέα τεσσάρων πόλων,παράγονται δύο κύκλοι τάσης ανά περιστροφή του δρομέα.Επειδή ο αριθμός των κύκλων τάσης που παράγονται ανά περιστροφή του δρομέα ισούται με τον αριθμό των ζευγών πόλων,η συχνότητα της παραγόμενης τάσης είναι:

$$f = \frac{P}{2} \frac{N}{60} = \frac{P}{2} f_m \text{ Hz} \quad (1.2)$$

όπου P=ο αριθμός των πόλων,

N=η ταχύτητα του δρομέα σε στροφές ανά λεπτό,

f<sub>m</sub>=N/60, η μηχανική συχνότητα σε στροφές ανά δευτερόλεπτο.

Η εξίσωση (1.2) μας λέει ότι μία μηχανή τεσσάρων πόλων,συχνότητας 50 Hz,λειτουργεί στις 1500 στροφές/λεπτό,ενώ μία μηχανή δύο πόλων

λειτουργεί στις 3000 στροφές/λεπτό.Επειδή σε αυτές τις ταχύτητες η αντίσταση του αέρα κατά την περιστροφή του δρομέα είναι σημαντική, ο δρομέα δύο πόλων σχεδιάζεται να έχει κυκλική διατομή.

Επειδή ένα κύκλος τάσης (που αντιστοιχεί σε 360°) παράγεται κάθε φορά που ένα ζεύγος πόλων περνά από ένα τύλιγμα στάτη,θα πρέπει να κάνουμε διάκριση μεταξύ ηλεκτρικής γωνίας,που χρησιμοποιείται για να εκφράσει τάσεις και ρεύματα, και μηχανικής γωνίας,που χρησιμοποιείται για να εκφράσει θέση του δρομέα.Για μηχανή με δύο πόλους οι γωνίες αυτές είναι ίσες,άλλα για  $P > 2$  έχουμε :

$$\theta_e = \frac{P}{2} \theta_m \quad (1.3)$$

Όπου  $\theta_e$  είναι η γωνία  $\theta$  εκφρασμένη σε ηλεκτρικές μοίρες (ή ακτίνα) και  $\theta_m$  είναι η ίδια γωνία εκφρασμένη σε μηχανικές μοίρες (ή ακτίνα).

## Κεφάλαιο 2

## Μοντελοποίηση Σύγχρονης Γεννήτριας

Στην παρούσα ενότητα, επιχειρούμε να αναπτύξουμε ένα μαθηματικό μοντέλο μιας σύγχρονης γεννήτριας, το οποίο προορίζεται για χρήση σε προσομοιώσεις προβλημάτων ευστάθειας. Στο μοντέλο αυτό, θα χρησιμοποιηθεί ο φορμαλισμός του χώρου κατάστασης για τη γεννήτρια.

Η σύγχρονη γεννήτρια, στην πιο απλουστευμένη της μορφή, θεωρούμε ότι αποτελείται από τρία τυλίγματα στο στάτη, ένα τυλίγμα πεδίου στο δρομέα, καθώς και δυο τυλίγματα απόσβεσης. Τα εξι αυτά τυλίγματα βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη, η οποία είναι συνάρτηση της θέσης του δρομέα. Η στιγμιαία τάση στα άκρα των τυλιγμάτων, δίνεται από τη σχέση 1.1.

$$u = \pm \sum r i \pm \sum \dot{\lambda} \quad (2.1)$$

Στην παραπάνω σχέση 1.1, με συμβολίζουμε τη μαγνητική ζεύξη (μαγνητική ροή που διαπερνά το τυλίγμα), με  $r$  την αντίσταση του κάθε τυλιγματος και με  $i$  τα ρεύματα. Ως θετική φορά για τα ρεύματα του στάτη έχει οριστεί αυτή που βγαίνει από τους ακροδέκτες της γεννήτριας. Η επιλογή πρόσημου δείχνει πως η άθροιση συμβαίνει με σεβασμό στα πρόσημα των όρων που αθροίζονται.

Η πολυπλοκότητα της σχέσης 1.1 για την τάση των τυλιγμάτων, προκύπτει από το γεγονός ότι η μαγνητική ζεύξη είναι συνάρτηση της θέσης του δρομέα.

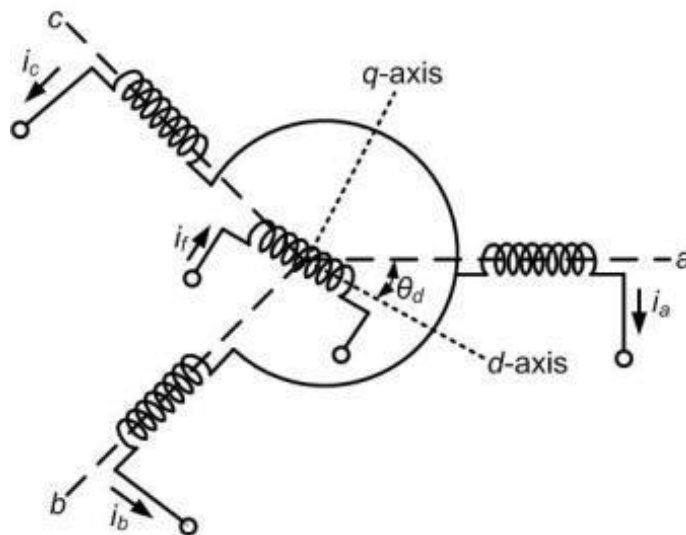
### 2.1 Μετασχηματισμός Park

Με χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών επιτυγχάνεται σημαντική απλοποίηση στην μαθηματική περιγραφή της σύγχρονης γεννήτριας, όπου επηρεάζονται χρονομεταβαλλόμενοι όροι ( $\lambda$ ).

Ο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενος τέτοιος μετασχηματισμός καλείται μετασχηματισμός Park. Ουσιαστικά, ο μετασχηματισμός αυτός ορίζει ένα νέο σύνολο μεταβλητών στο στάτη, όπως ρεύματα, τάσεις, μαγνητικές ζεύξεις που προκύπτουν από μετατροπή των αντίστοιχων προηγούμενων μεταβλητών.

Αυτές οι νέες ποσότητες προκύπτουν από την προβολή των αρχικών μεταβλητών πάνω σε τρεις άξονες: στον άξονα του τυλιγματος πεδίου στο δρομέα (ευθύς άξονας - direct axis), στον άξονα που είναι κάθετος στον προηγούμενο (εγκάρσιος άξονας - quadrature axis), καθώς και στον άξονα

μηδενικής ακολουθίας - stationary axis. Οι άξονες αυτοί, συμβολίζονται αντίστοιχα με τα γράμματα d, q και 0, ενώ τα μεγέθη που προκύπτουν από την προβολή των αρχικών μεγεθών πάνω σε αυτούς τους άξονες φέρουν ως δείκτη το σύμβολο του αντίστοιχου άξονα.



Σχήμα 2.1: Γραφική απεικόνιση μιας Σύγχρονης Γεννήτριας

Ο μετασχηματισμός Park λειτουργεί ως εξής: Κατά τη λειτουργία στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση, η συνιστώσα μηδενικής ακολουθίας είναι μηδέν και συνεπώς το προκύπτων σύστημα αποτελείται αποκλειστικά από τις άλλες δυο συνιστώσες. Θεωρούμε πως κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , ο άξονας d του δρομέα βρίσκεται σε γωνία ( $rad$ ) σε σχέση με τον άξονα αναφοράς a, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Επιπλέον, θεωρούμε τα ρεύματα  $i_a$ ,  $i_b$  και  $i_c$  στο στάτη, με φορά προς τους ακροδέκτες της γεννήτριας. Οι προβολές αυτών των ρευμάτων πάνω στους άξονες d και q δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} i_q &= \left(\frac{2}{3}\right) \left[ i_a \sin \theta + i_b \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ i_d &= \left(\frac{2}{3}\right) \left[ i_a \cos \theta + i_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Να σημειωθεί πως σε περίπτωση που δεν χρησιμοποιήσουμε τον άξονα της φάσης a ως άξονα αναφοράς, θα πρέπει να προσθέσουμε στις παραπάνω

σχέσεις 1.2 τη γωνιακή απόσταση σε rad του άξονα a από τον άξονα αναφοράς που επιλέγουμε.

Ο ρόλος του μετασχηματισμού Park είναι να μετατρέψουμε όλες τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν από το σύστημα αναφοράς των φάσεων a, b, c σε μεταβλητές εκφρασμένες ως προς ένα νέο σύστημα αναφοράς που στρέφεται μαζί με το δρομέα. Θα περιμέναμε επομένως, να περάσουμε από τις αρχικές μας μεταβλητές  $i_a; i_b; i_c$  σε τρεις νέες μεταβλητές. Κατά τον μετασχηματισμό Park κάνουμε χρήση μόνο δυο μεταβλητών, των συνιστωσών d και q. Η τρίτη μεταβλητή είναι το ρεύμα μηδενικής ακολουθίας  $i_0$ .

Ο μετασχηματισμός Park μπορεί να οριστεί μέσω της ακόλουθης μαθηματικής σχέσης 1.3:

$$i_{0dq} = P i_{abc} \quad (2.3)$$

όπου τα διανύσματα  $i_{0dq}$  και  $i_{abc}$  ορίζονται ως ακολούθως:

$$i_{0dq} = \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ο μετασχηματισμός Park (**P**) ορίζεται ως εξής:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Αντίστοιχες εκφράσεις με την 1.3 μπορούν να γραφούν για τις τάσεις και τις μαγνητικές ροές:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0dq} &= \mathbf{P}\mathbf{u}_{abc} \\ \lambda_{0dq} &= \mathbf{P}\lambda_{abc} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Αν ο μετασχηματισμός 1.5 είναι μοναδικός, τότε υπάρχει και ο αντίστροφός του ( $\mathbf{P}^{-1}$ ), ο οποίος σχετίζει τα μεγέθη  $i_{0dq}$  και  $i_{abc}$  ως:

$$\mathbf{i}_{abc} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{i}_{0dq} \quad (2.7)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Park δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{P}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{P}$  είναι ορθογώνιος, καθώς  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ . Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι η ισχύς είναι αναλλοίωτο μέγεθος και άρα έχει την ίδια έκφραση σε οποιοδήποτε από τα δυο συστήματα αναφοράς a-b-c και 0-d-q. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} p &= u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = \mathbf{u}_{abc}^T \mathbf{i}_{abc} = \\ &(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_{0dq})^T (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{i}_{0dq}) = \mathbf{u}_{0dq}^T (\mathbf{P}^{-1})^T \mathbf{P}^{-1}\mathbf{i}_{0dq} = \\ &\mathbf{u}_{0dq}^T \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{i}_{0dq} = \mathbf{u}_{0dq}^T \mathbf{i}_{0dq} = u_0 i_0 + u_d i_d + u_q i_q \end{aligned} \quad (2.9)$$



## 2.2 Εξισώσεις Μαγνητικής Ζεύξης

Η Σ.Γ. όπως την έχουμε περιγράψει μέχρι τώρα, είναι ένα σύστημα έξι τυλίγμάτων τα οποία βρίσκονται σε μαγνητική ζεύξη. Τα τυλίγματα αυτά είναι τα τρία τυλίγματα των φάσεων a, b, c, το τυίγμα πεδίου f, καθώς και τα δυο τυλίγματα απόσβεσης D και Q. Οι εξισώσεις μαγνητικής ζεύξης για τα έξι αυτά τυλίγματα, γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ - \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & | & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & | & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & | & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ - & - & - & + & - & - & - \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & | & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & | & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & | & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

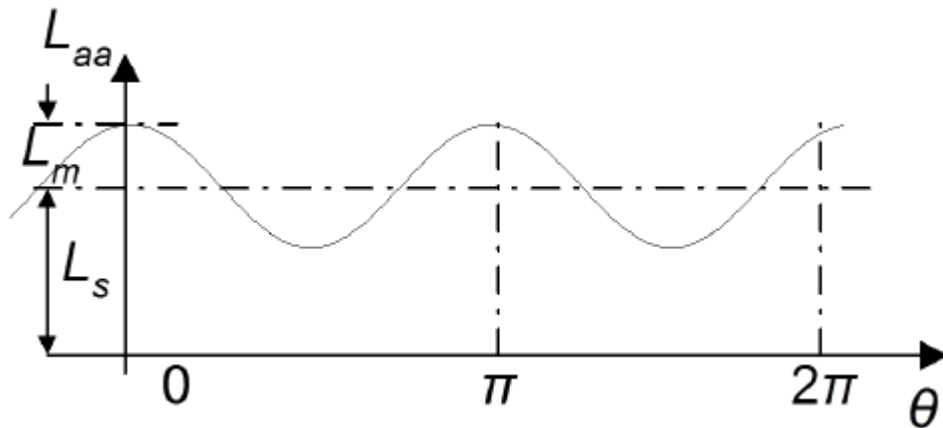
όπου με  $L_{jk}$  συμβολίζουμε την αυτεπαγωγή του τυλίγματος όταν  $j = k$  ή την αμοιβαία επαγωγή όταν  $j \neq k$ . Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι  $L_{jk} = L_{kj}$ . Οι περισσότερες από τις επαγωγές που εμφανίζονται στην εξίσωση 1.10 είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$  μεταξύ του άξονα d και του άξονα αναφοράς a. Σύμφωνα με την αναφορά (Fouad p.86: Prentice [14]), οι επαγωγές αυτές μπορούν να γραφούν ως εξής:

### 2.2.1 Αυτεπαγωγή στο Στάτη

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_s + L_m \cos 2\theta H \\ L_{bb} &= L_s + L_m \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)H \\ L_{cc} &= L_s + L_m \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)H \end{aligned} \quad (2.11)$$



όπου  $L_s$  και  $L_m$  είναι σταθερές για τις οποίες ισχύει ότι  $L_s > L_m$ .



Σχήμα 2.2: Μεταβολή αυτεπαγωγής  $L_{aa}$  του τυλίγματος α του στάτη περιοδικά με τη γωνία  $\theta$

### 2.2.2 Αυτεπαγωγή στο Δρομέα

Αν αγνοήσουμε το φαινόμενο του κορεσμού και τις σχισμές στο στάτη, οι αυτεπαγωγές στο δρομέα είναι σταθερές και συμβολίζονται ως:

$$L_{FF} = L_F H$$

$$L_{DD} = L_D H$$

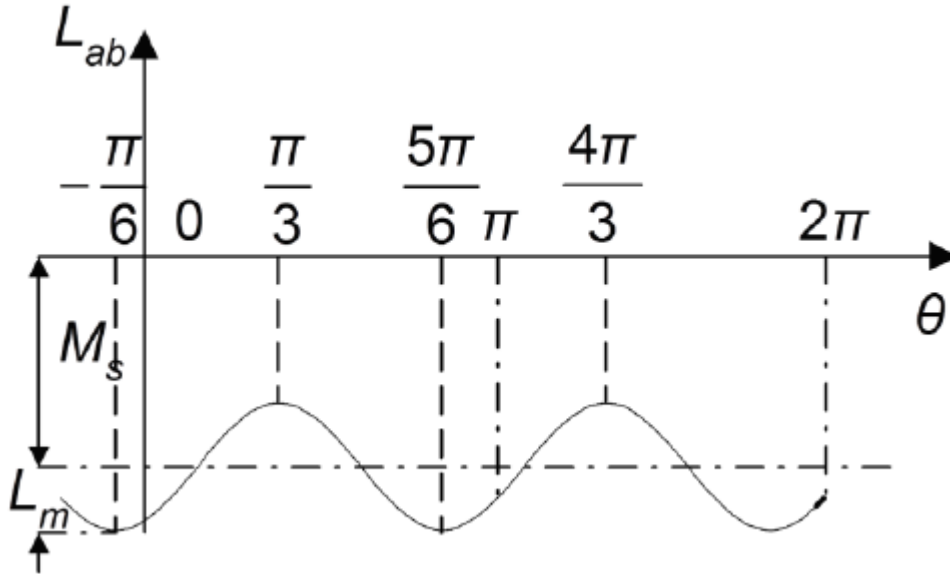
$$L_{QQ} = L_Q H$$

(2.12)

### 2.2.3 Αμοιβαία Επαγωγή στο Στάτη

Οι αμοιβαίες επαγωγές των τυλιγμάτων φάσεων του στάτη, είναι συμμετρικές συναρτήσεις του  $\theta$ .

$$\begin{aligned}
L_{ab} &= L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)H \\
L_{bc} &= L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)H \\
L_{ca} &= L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)H
\end{aligned} \tag{2.13}$$



Σχήμα 2.3: Μεταβολή αμοιβαίας επαγωγής  $L_{ab}$  περιοδικά με τη γωνία  $\theta$

#### 2.2.4 Αμοιβαία Επαγωγή στο Δρομέα

Η αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των τυλιγμάτων F και D είναι σταθερή (ανεξάρτητη της γωνίας  $\theta$ ). Επιπλέον, όλα τα ζεύγη τυλιγμάτων τα οποία βρίσκονται σε γωνία  $90^\circ$  μεταξύ τους, θα έχουν μηδενική αμοιβαία επαγωγή. Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
L_{FD} &= L_{DF} = M_R H \\
L_{FQ} &= L_{QF} = 0H \\
L_{DQ} &= L_{QD} = 0H
\end{aligned} \tag{2.14}$$

## 2.2.5 Αμοιβαία Επαγωγή Στάτη-Δρομέα

Όλες οι αμοιβαίες επαγωγές από τα τυλίγματα του στάτη στα τυλίγματα του δρομέα, είναι συναρτήσεις της γωνίας του δρομέα  $\theta$ . Οι επαγωγές από τα τυλίγματα φάσης στο τύλιγμα πεδίου, είναι:

$$\begin{aligned}L_{aF} &= L_{Fa} = M_F \cos \theta H \\L_{bF} &= L_{Fb} = M_F \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) H \\L_{cF} &= L_{Fc} = M_F \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) H\end{aligned}$$

(2.15)

Αντίστοιχα, οι επαγωγές από τα τυλίγματα φάσης στο τύλιγμα απόσβεσης D, είναι:

$$\begin{aligned}L_{aD} &= L_{Da} = M_D \cos \theta H \\L_{bD} &= L_{Db} = M_D \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) H \\L_{cD} &= L_{Dc} = M_D \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) H\end{aligned}$$

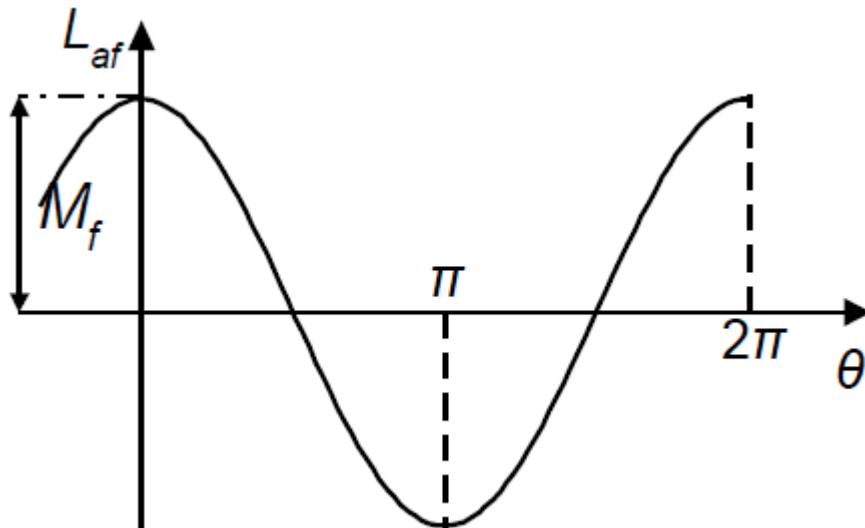
(2.16)

Οι επαγωγές από τα τυλίγματα φάσης στο τύλιγμα απόσβεσης Q, είναι :

$$\begin{aligned}L_{aQ} &= L_{Qa} = M_Q \cos \theta H \\L_{bQ} &= L_{Qb} = M_Q \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) H \\L_{cQ} &= L_{Qc} = M_Q \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) H\end{aligned}$$

(2.17)

Τα πρόσημα στους όμοιους όρους, καθορίζονται από τις φορές των ρευμάτων και από τους προσανατολισμούς των τυλιγμάτων.



Σχήμα 2.4: Μεταβολή αμοιβαίας επαγωγής  $L_{af}$  περιοδικά με τη γωνία  $\theta$

## 2.3 Μετασχηματισμός των Επαγωγών

Έχοντας ορίσει όλα τα στοιχεία του πίνακα 1.10, παρατηρούμε πως σχεδόν όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι συναρτήσεις του χρόνου καθώς η γωνία  $\theta$  είναι συνάρτηση του χρόνου. Κατά συνέπεια, στην εξίσωση 1.1, ο όρος  $\lambda$  θα είναι μια σχέση της μορφής  $\lambda = L i + L' \dot{i}$ . Μπορούμε να σκεφτούμε πως η απλούστερη λύση στο πρόβλημα είναι να μετατρέψουμε όλες τις επαγωγές, οι οποίες είναι χρονοεξαρτώμενες στο σύστημα αναφοράς του στάτη, στο σύστημα αναφοράς του δρομέα, μέσω του μετασχηματισμού Park. Ο μετασχηματισμός Park θα πρέπει να επιδράσει μόνο στις συνιστώσες a-b-c. Κατά τον τρόπο αυτό, υπολογίζουμε:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον ακόλουθο συμβολισμό (βλ. εξίσωση 1.10):

$L_{aa}$ =αυτεπαγωγές στο στάτη

$L_{aR}, L_{Ra}$ =επαγωγές στάτη-δρομέα

$L_{RR}$ =αυτεπαγωγές στο δρομέα

(2.19)

Το σύμβολο  $U_3$  εξίσωση 1.18 συμβολίζει έναν 3x3 μοναδιαίο πίνακα. Πραγματοποιώντας τον μετασχηματισμό της εξίσωσης 1.18 προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ - \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & | & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & | & 0 & 0 & kM_Q \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & kM_F & 0 & | & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & | & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & | & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ - \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ακόλουθες σταθερές:

$$\begin{aligned}
L_d &= L_s + M_s + \frac{3}{2} L_m H \\
L_q &= L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m H \\
L_0 &= L_s - 2M_s H \\
k &= \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \quad (2.21)$$

Στην εξίσωση 1.20, ο όρος  $\lambda_d$  είναι η μαγνητική ροή ενός κυκλώματος το οποίο κινείται μαζί με τον δρομέα και βρίσκεται πάνω στον d άξονα. Ομοίως, ο όρος  $\lambda_q$  για τον άξονα q. Η μαγνητική ροή  $\lambda_0$  είναι τελείως ασυσχέτιστη με τα υπόλοιπα κυκλώματα καθώς όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης, πλην του διαγώνιου στοιχείου, είναι μηδενικά.

Αυτό που έχει σημασία να παρατηρήσουμε στον πίνακα των επαγωγών της εξίσωσης 1.20 είναι πως όλοι οι όροι είναι ανεξάρτητοι του χρόνου. Η αξία του μετασχηματισμού Park έγκειται στη δυνατότητα του να απαλείψει όλες τις εξαρτήσεις από τον χρόνο στην παραπάνω εξίσωση. Κάτι ακόμα που έχει σημασία να παρατηρήσουμε στην εξίσωση 1.20 είναι πως ο πίνακας των επαγωγών είναι συμμετρικός και επομένως μπορεί να υλοποιηθεί από ένα ισοδύναμο κύκλωμα.

## 2.4 Εξισώσεις Τάσεων

Οι εξισώσεις των τάσεων είναι στην μορφή της εξίσωσης 1.1. Η εξίσωση των τάσεων σε μορφή πινάκων μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ - \\ -U_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ - \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \\ - \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_n \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Όπου η ουδέτερη τάση  $U_n$ , ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} U_n &= -r_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - L_n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \end{bmatrix} \\ &= -R_n i_{abc} - L_n \dot{\lambda}_{abc} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Στη συνηθισμένη περίπτωση όπου  $r_a = r_b = r_c = r$ , μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα

$$R_{abc} = rU_3\Omega \quad (2.24)$$

Η εξίσωση 1.22 παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} u_{abc} \\ u_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Όπου έχουμε ορίσει

$$\mathbf{u}_{FDQ} = \begin{bmatrix} -u_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_{FDQ} = \begin{bmatrix} i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda}_{FDQ} = \begin{bmatrix} \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Η πολυπλοκότητα της εξίσωσης 1.25 έγκειται στην παρουσία του χρονοεξαρτημένου όρου  $\lambda$ , ο οποίος μπορεί να απαληφθεί κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Park πάνω στις μεταβλητές που είναι εκπεφρασμένες στο σύστημα αναφοράς του στάτη (a-b-c). Επομένως, είναι ανάγκη να πολλαπλασιάσουμε και τις δυο πλευρές της εξίσωσης 1.25 με τον όρο

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix}$$

Όπου για την αριστερή πλευρά της εξίσωσης, ισχύει εξ'ορισμού ότι:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0dq} \\ \mathbf{u}_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Για τον όρο της πτώσης τάσεων μέσω των αντιστάσεων, υπολογίζουμε :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PR_{abc}P^{-1} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ο δεύτερος όρος στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης 1.25 μετασχηματίζεται ως:



$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Park (εξίσωση 1.6)  $\lambda_{0dq} = P\lambda_{abc}$ , συνεπάγεται ότι  $\dot{\lambda}_{0dq} = P\dot{\lambda}_{abc} + \dot{P}\lambda_{abc}$ . Επομένως:

$$P\dot{\lambda}_{abc} = \dot{\lambda}_{0dq} - \dot{P}\lambda_{abc} = \dot{\lambda}_{0dq} - \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq} \quad (2.30)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$\dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Ο τρίτος και τελευταίος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης 1.25 μετασχηματίζεται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pu_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{0dq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

όπου με τον όρο  $n_{0dq}$  συμβολίζουμε την πτώση τάσης μεταξύ ουδέτερου - γης στο σύστημα αναφοράς του δρομέα (0-d-q). Χρησιμοποιώντας την έκφραση για το  $U_n$  της εξίσωσης 1.23, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
n_{0dq} &= PV_n = -PR_n P^{-1} P i_{abc} - PL_n P^{-1} P i_{abc} = -PR_n P^{-1} i_{0dq} - PL_n P^{-1} i_{0dq} \\
&= \begin{bmatrix} 3r_n i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3L_n i_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

Παρατηρούμε από την παραπάνω εξίσωση, ότι αυτή η πτώση τάσης συμβαίνει μόνο κατά τη μηδενική ακολουθία, όπως θα έπρεπε άλλωστε. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 1.27, 1.28, 1.29, 1.30 και 1.32 στην εξίσωση 1.25, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{bmatrix} u_{0dq} \\ u_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{0dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{0dq} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{0dq} \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{2.34}$$

Το σημαντικό στην εξίσωση 1.34 είναι πως όλοι οι όροι της εξίσωσης είναι γνωστοί. Για περιορισμένες εισόδους, η τάση μηδενικής ακολουθίας είναι μηδενική. Μπορούμε να απλοποιήσουμε επομένως την εξίσωση 1.34 και να την γράψουμε ως:

$$\begin{bmatrix} u_{dq} \\ u_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dq} \\ i_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{dq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix}
\tag{2.35}$$

Όπου έχουμε ορίσει για χάριν απλότητας :

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad R_R = \begin{bmatrix} r_F & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix}
\tag{2.36}$$

## 2.5 Εξισώσεις Χώρου Κατάστασης

Απώτερος σκοπός μας είναι να καταστρώσουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη σύγχρονη γεννήτρια, στη μορφή:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.37)$$

όπου με  $x$  συμβολίζουμε το διάνυσμα των μεταβλητών του συστήματος, με  $u$  το διάνυσμα των εισόδων, ενώ το  $f$  παριστάνει ένα σύστημα μη-γραμμικών συναρτήσεων. Αν οι εξισώσεις που περιγράφουν τη σύγχρονη γεννήτρια είναι γραμμικές, τότε το σύστημα 1.37 θα είναι της γνωστής μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.38)$$

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να φέρουμε το σύστημα των πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων 1.34 στη μορφή των 1.37, 1.38, δηλαδή στη μορφή εξισώσεων χώρου κατάστασης. Παρατηρώντας το σύστημα 1.34, βλέπει κανείς πως χρησιμοποιούνται ρεύματα ( $i$ ) και ροές ( $\lambda$ ) ως μεταβλητές, όπου ως μεγέθη είναι αλληλοεξαρτώμενα.

Μπορούμε κατά συνέπεια να απαλείψουμε το ένα από τα δυο μεγέθη και να εκφράσουμε το σύστημα 1.34 σε συνάρτηση του ενός μόνο μεγέθους. Υπάρχουν αμέτρητες δυνατότητες για την επιλογή των μεταβλητών του χώρου κατάστασης. Συνήθως όμως, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι δυο:

1. χρήση των ρευμάτων ως μεταβλητών χώρου κατάστασης:  $x^t = [i_d i_q i_F i_D i_Q]$ . Η επιλογή αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει απλές σχέσεις μεταξύ των τάσεων  $U_d, U_q$  και των μεταβλητών κατάστασης.

2. χρήση των μαγνητικών ροών ως μεταβλητών του χώρου κατάστασης. Η επιλογή των ροών εξαρτάται από την ευκολία με την οποία αυτές μπορούν να εκφραστούν, συναρτήσει των ρευμάτων και των τάσεων του στάτη. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιείται ο ακόλουθος φορμαλισμός:  $x^t = [\lambda_d \lambda_q \lambda_F \lambda_D \lambda_Q]$ .

## 2.6 Ισοδύναμο Κύκλωμα Σύγχρονης Γεννήτριας

Για ισορροπημένες συνθήκες, οι κανονικοποιημένες εξισώσεις ροής προκύπτουν από τη σχέση 1.20, έχοντας παραλείψει την τιμή που αντιστοιχεί στο  $\lambda_0$ .

$$\begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Έτσι οι μαγνητικές ροές κατά τον άξονα d, μπορούν να γραφούν ως :

$$\begin{aligned} \lambda_d &= [(L_d - l_d) + l_d] i_d + kM_F i_F + kM_D i_D \\ \lambda_F &= kM_F i_d + [(L_F - l_F) + l_F] i_F + M_R i_D \\ \lambda_D &= kM_D i_d + M_R i_F + [(L_D - l_D) + l_D] i_D \end{aligned} \quad (2.40)$$

όπου με  $l_d$ ,  $l_F$ ,  $l_D$  συμβολίζουμε τους συντελεστές αυτεπαγωγής που αντιστοιχούν στην σκεδαζόμενη μαγνητική ροή για τα κυκλώματα d, F και D αντίστοιχα. Θεωρώντας  $i_F = i_D = 0$ , η μαγνητική ροή που διαπερνά τα υπόλοιπα κυκλώματα ισούται με  $\lambda_d - l_d i_d$  ή  $(L_d - l_d) i_d$ .

Έχοντας ορίσει  $L_{md} = L_d - l_d$ , η μαγνητική ροή στα υπόλοιπα κυκλώματα ισούται με  $L_{md} i_d$ . Αντίστοιχα, ισχύει  $\lambda_F = kM_F i_d$  και  $\lambda_D = kM_D i_d$ . Προκειμένου οι ροές αυτές να είναι ίσες, θα πρέπει να ισχύει  $L_{md} = kM_F = kM_D$ . Σε μονάδες pu, αυτή η ποσότητα συμβολίζεται με  $L_{AD}$ :

$$L_{AD} = L_d - l_d = kM_F = kM_D \text{ pu} \quad (2.41)$$

Αποδεικνύεται επίσης, ότι:

$$L_{AD} = L_D - l_D = L_F - l_F = L_d - l_d = kM_F = kM_D = M_R \quad (2.42)$$

Αντίστοιχα για τον άξονα q, ορίζουμε :

$$L_{AQ} = L_q - l_q = L_Q - l_Q = kM_Q pu \quad (2.43)$$

Από κάθε κύκλωμα αφαιρείται η συντελεστής αυτεπαγωγής της σκεδαζόμενης ροής και η εναπομένουσα μαγνητική ροή είναι όμοια σε όλα τα κυκλώματα τα οποία βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη. Επομένως:

$$\lambda_d - l_d i_d = \lambda_F - l_F i_F = \lambda_D - l_D i_D = \lambda_{AD} pu \quad (2.44)$$

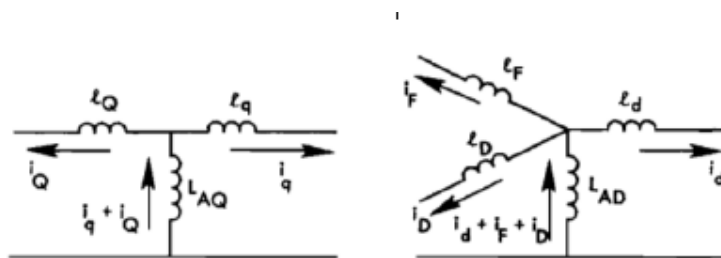
Όπου :

$$\lambda_{AD} = i_d (L_d - l_d) + kM_F i_F + kM_D i_D = L_{AD} (i_d + i_F + i_D) pu \quad (2.45)$$

Αντίστοιχα για τον άξονα q:

$$\lambda_{AQ} = i_q (L_q - l_q) + kM_Q i_Q = L_{AQ} (i_q + i_Q) pu \quad (2.46)$$

Για να αντιστοιχίσουμε τις παραπάνω εξισώσεις με ισοδύναμα κυκλώματα, χρησιμοποιούμε όμοια διαδικασία με αυτή που εφαρμόζεται στους μετασχηματιστές. Τα κυκλώματα αυτά φαίνονται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 2.5: Ισοδύναμα κυκλώματα επαγωγών σύγχρονης γεννήτριας

Για να συμπληρώσουμε το ισοδύναμο κύκλωμα, αρκεί να λαβουμε υπόψη τις εξισώσεις τάσεων:

$$\begin{aligned}
 u_d &= -r i_d - \dot{\lambda}_d - \omega \lambda_q \\
 &= -r i_d - l_d \dot{i}_d - \left[ (L_d - l_d) \dot{i}_d + k M_F \dot{i}_F + k M_D \dot{i}_D \right] - \omega \lambda_q \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_d = -r i_d - l_d \dot{i}_d - L_{AD} (\dot{i}_d + \dot{i}_F + \dot{i}_D) - \omega \lambda_q$$

$$u_F = -r_F i_F - l_F \dot{i}_F - L_{AD} (\dot{i}_d + \dot{i}_F + \dot{i}_D) \quad (2.48)$$

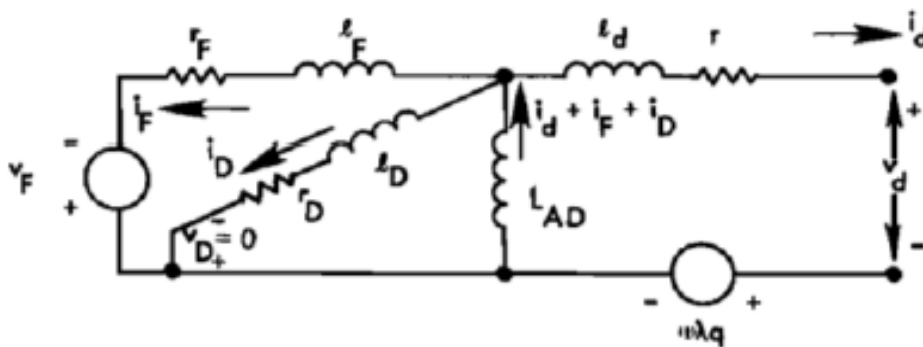
$$u_D = 0 = -r_D i_D - l_D \dot{i}_D - L_{AD} (\dot{i}_d + \dot{i}_F + \dot{i}_D) \quad (2.49)$$

Στο σχήμα 1.3 παρουσιάζεται το ισοδύναμο κύκλωμα που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις. Τα τρία κυκλώματα του d άξονα βρίσκονται σε μαγνητική ζεύξη μέσω της κοινής μαγνητικής επαγωγής  $L_{AD}$ , ενώ στο κύκλωμα υπάρχει μια ελεγχόμενη πηγή τάσης  $\omega \lambda_q$ , η πολικότητα της οποίας φαίνεται στο σχήμα 1.3. Αντίστοιχα, για τα κυκλώματα του q άξονα, οι εξισώσεις τάσεων:

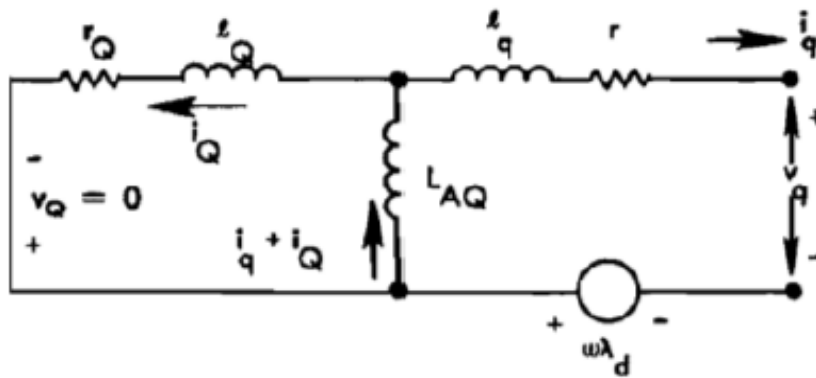
$$u_q = -r i_q - l_q \dot{i}_q - L_{AQ} (\dot{i}_q + \dot{i}_Q) + \omega \lambda_d \quad (2.50)$$

$$u_Q = 0 = -r_Q i_Q - l_Q \dot{i}_Q - L_{AQ} (\dot{i}_q + \dot{i}_Q) \quad (2.51)$$

δίνουν το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος 1.4.



Σχήμα 2.6: Ισοδύναμο κύκλωμα d άξονα



Σχήμα 2.7: Ισοδύναμο κύκλωμα q άξονα

## 2.7 Μοντέλο Χώρου Κατάστασης πεπλεγμένων Μαγνητικών Ροών

Οι μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτό το μοντέλο χώρου κατάστασης, είναι οι ροές  $\lambda_d, \lambda_F, \lambda_D, \lambda_q, \lambda_Q$ . Από τις εξισώσεις 2.44, συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} i_d &= \left( \frac{1}{l_d} \right) (\lambda_d - \lambda_{AD}) \\ i_F &= \left( \frac{1}{l_F} \right) (\lambda_F - \lambda_{AD}) \\ i_D &= \left( \frac{1}{l_D} \right) (\lambda_D - \lambda_{AD}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ενώ από την εξίσωση 1.45, ισχύει ότι  $\lambda_{AD} = L_{AD}(i_d + i_F + i_D)$ . Συνδυάζοντας τις δυο αυτές εξισώσεις, προκύπτει:

$$\lambda_{AD} \left( \frac{1}{L_{AD}} + \frac{1}{l_d} + \frac{1}{l_F} + \frac{1}{l_D} \right) = \frac{\lambda_d}{l_d} + \frac{\lambda_F}{l_F} + \frac{\lambda_D}{l_D} \quad (2.53)$$

Θέτοντας :

$$\frac{1}{L_{MD}} \equiv \frac{1}{L_{AD}} + \frac{1}{l_d} + \frac{1}{l_F} + \frac{1}{l_D} \quad (2.54)$$

η σχέση 1.53 γίνεται :

$$\lambda_{AD} = \left( \frac{L_{MD}}{l_d} \right) \lambda_d + \left( \frac{L_{MD}}{l_F} \right) \lambda_F + \left( \frac{L_{MD}}{l_D} \right) \lambda_D \quad (2.55)$$



Αντίστοιχα, έχοντας ορίσει

$$\frac{1}{L_{MQ}} \equiv \frac{1}{L_{AQ}} + \frac{1}{l_q} + \frac{1}{l_Q} \quad (2.56)$$

μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\lambda_{AQ} = \left( \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) \lambda_q + \left( \frac{L_{MQ}}{l_Q} \right) \lambda_Q \quad (2.57)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα ρεύματα του q άξονα, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$i_q = \left( \frac{1}{l_q} \right) (\lambda_q - \lambda_{AQ}) \quad i_Q = \left( \frac{1}{l_Q} \right) (\lambda_Q - \lambda_{AQ}) \quad (2.58)$$

μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις 1.52 και 1.58 σε μορφή πινάκων, ως:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ - \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_d} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_d} & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_F} & 0 & -\frac{1}{l_F} & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_D} & -\frac{1}{l_D} & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & + & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{l_q} & & -\frac{1}{l_q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & & \frac{1}{l_Q} & -\frac{1}{l_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_{AD} \\ - \\ \lambda_q \\ \lambda_Q \\ \lambda_{AQ} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

### 2.7.1 Εξισώσεις Τάσεων

Οι εξισώσεις τάσεων, έχουν ήδη διατυπωθεί στη σχέση 1.35. Για τον d άξονα, ισχύει:

$$u_d = -ri_d - \dot{\lambda}d - \omega\lambda_q \quad (2.60)$$

Αντικαθιστώντας το ρεύμα  $i_d$  από την εξίσωση 1.59, παίρνουμε :

$$\dot{\lambda}_d = -\left(\frac{r}{l_d}\right)\lambda_d + \left(\frac{r}{l_d}\right)\lambda_{AD} - \omega\lambda_q - u_d \quad (2.61)$$

Με όμοιο τρόπο, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\dot{\lambda}_F = -\left(\frac{r_F}{l_F}\right)\lambda_F + \left(\frac{r_F}{l_F}\right)\lambda_{AD} - (-u_F) \quad (2.62)$$

$$\dot{\lambda}_D = -\left(\frac{r_D}{l_D}\right)\lambda_D + \left(\frac{r_D}{l_D}\right)\lambda_{AD} \quad (2.63)$$

$$\dot{\lambda}_q = -\left(\frac{r}{l_q}\right)\lambda_q + \left(\frac{r}{l_q}\right)\lambda_{AQ} - \omega\lambda_d - u_q \quad (2.64)$$

$$\dot{\lambda}_Q = -\left(\frac{r_Q}{l_Q}\right)\lambda_Q + \left(\frac{r_Q}{l_Q}\right)\lambda_{AQ} \quad (2.65)$$

Οι μόνες επαγωγές στις οποίες μπορεί να εμφανιστεί κορεσμός, είναι οι  $L_{AD}$  και  $L_{AQ}$ . Επομένως, δεδομένου ότι στις παραπάνω εξισώσεις εμφανίζονται οι ροές  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$ , το σύστημα αυτό είναι ιδιαίτερα βολικό αν θελήσουμε να λάβουμε υπόψη τον μαγνητικό κορεσμό. Σε περίπτωση που αυτό δεν μας ενδιαφέρει, μπορούμε να απαλείψουμε τους όρους  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$ .

## 2.7.2 Εξίσωση Ροπής

Δεδομένου ότι  $T_{e\Phi} = i_q \lambda_d - i_d \lambda_q$ , αντικαθιστώντας τα ρεύματα  $i_q$  και  $i_d$  από τη σχέση 1.59, προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_{e\Phi} &= -\lambda_q \left( \frac{\lambda_d - \lambda_{AD}}{l_d} \right) + \lambda_q \left( \frac{\lambda_d - \lambda_{AQ}}{l_q} \right) \\ &= -\frac{1}{l_q} \lambda_d \lambda_{AQ} + \frac{1}{l_d} \lambda_q \lambda_{AD} + \left( \frac{1}{l_q} - \frac{1}{l_d} \right) \lambda_d \lambda_q \end{aligned} \quad (2.66)$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι  $\ell_q = \ell_d$ , η ηλεκτρομηχανική εξίσωση θα έχει τη μορφή:

$$\dot{\omega} = -\left( \frac{\lambda_{AD}}{l_d 3_{Tj}} \right) \lambda_q + \left( \frac{\lambda_{AQ}}{l_q 3_{Tj}} \right) \lambda_d - \left( \frac{D}{T_j} \right) \omega + \frac{T_m}{T_j} \quad (2.67)$$

Ακόμα, η εξίσωση για τη γωνία  $\delta$  θα δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\delta} = \omega - 1.$$

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις (1.61 - 1.65, 1.67 και η σχέση για τη γωνία  $\delta$ ), είναι σε μορφή εξισώσεων χώρου κατάστασης. Κάνοντας χρήση και των εξισώσεων 1.55 και 1.57, μπορούμε να συσχετίσουμε τα  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$  με τις μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης. Οι μεταβλητές επομένως του διανύσματος κατάστασης, είναι οι:  $\lambda_d, \lambda_F, \lambda_D, \lambda_q, \lambda_Q, \omega$  και  $\delta$ .

Αντίστοιχα, οι είσοδοι του συστήματος, είναι οι  $u_d, u_q, u_F$  και  $T_m$ . Η μορφή της εξίσωσης, διευκολύνει την περίπτωση που ο κορεσμός λαμβάνεται υπόψη, καθώς αυτός επηρεάζει μόνο τα  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$ .

### 2.7.3 Αγνοώντας τον Κορεσμό

Αν αγνοήσουμε τον κορεσμό, τα  $L_{AD}$  και  $L_{AQ}$  είναι σταθερά. Επομένως, σταθερά είναι και τα  $L_{MD}$ ,  $L_{MQ}$ . Κατά συνέπεια, οι ροές  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$  θα δίνονται από σχέσεις με σταθερούς συντελεστές ως προς τις μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης (βλ σχέσεις 1.55, 1.57). Μπορούμε επομένως να απαλείψουμε τα  $\lambda_{AD}$  και  $\lambda_{AQ}$  από το σύστημα των εξισώσεων. Αντικαθιστώντας επομένως τη σχέση 1.55 στη σχέση 1.52, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 i_d &= \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \frac{\lambda_d}{l_d} - \frac{L_{MD}}{l_d} \frac{\lambda_F}{l_F} - \frac{L_{MD}}{l_d} \frac{\lambda_D}{l_D} \\
 i_F &= -\frac{L_{MD}}{l_F} \frac{\lambda_d}{l_d} + \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_F}\right) \frac{\lambda_F}{l_F} - \frac{L_{MD}}{l_F} \frac{\lambda_D}{l_D} \\
 i_D &= -\frac{L_{MD}}{l_D} \frac{\lambda_d}{l_d} - \frac{L_{MD}}{l_D} \frac{\lambda_F}{l_F} + \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_D}\right) \frac{\lambda_D}{l_D}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Αντικαθιστώντας τα ρεύματα αυτά στις εξισώσεις τάσεων του d άξονα 1.35, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_d &= -r \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \frac{\lambda_d}{l_d} + r \frac{L_{MD}}{l_d} \frac{\lambda_F}{l_F} + \frac{L_{MD}}{l_d} \frac{\lambda_D}{l_D} - \omega \lambda_q - u_d \\
 \dot{\lambda}_F &= r_F \frac{L_{MD}}{l_F} \frac{\lambda_d}{l_d} - r_F \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_F}\right) \frac{\lambda_F}{l_F} + r_F \frac{L_{MD}}{l_F} \frac{\lambda_D}{l_D} + u_F \\
 \dot{\lambda}_D &= r_D \frac{L_{MD}}{l_D} \frac{\lambda_d}{l_d} + r_D \frac{L_{MD}}{l_D} \frac{\lambda_F}{l_F} - r_D \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_D}\right) \frac{\lambda_D}{l_D}
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για τον q άξονα, είναι:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_q &= -r \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) \frac{\lambda_q}{l_q} + r \frac{L_{MQ}}{l_q} \frac{\lambda_Q}{l_Q} + \omega \lambda_d - u_q \\ \dot{\lambda}_Q &= r_Q \frac{L_{MQ}}{l_Q} \frac{\lambda_q}{l_q} - r_Q \frac{L_{MQ}}{l_Q} \frac{\lambda_Q}{l_Q}\end{aligned}\quad (2.70)$$

ενώ η εξίσωση της ηλεκτρικής ροπής, δίνεται από τη σχέση:

$$T_{e\Phi} = \lambda_d \lambda_q \left( \frac{L_{MD} - L_{MQ}}{l_d^2} \right) - \lambda_d \lambda_Q \frac{L_{MQ}}{l_q l_Q} + \lambda_q \lambda_F \frac{L_{MD}}{l_d l_F} + \lambda_q \lambda_D \frac{L_{MD}}{l_d l_D} \quad (2.71)$$

Το σύστημα των εξισώσεων, σε μορφή χώρου κατάστασης, γίνεται τώρα:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ - \\ \dot{\lambda}_q \\ \dot{\lambda}_Q \\ - \\ \dot{\omega} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{l_d} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_d} \right) & \frac{r}{l_d} \frac{L_{MD}}{l_F} & \frac{r}{l_d} \frac{L_{MD}}{l_D} & | & -\omega & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{r_F}{l_F} \frac{L_{MD}}{l_d} & -\frac{r_F}{l_F} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_F} \right) & \frac{r_F}{l_F} \frac{L_{MD}}{l_D} & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{r_D}{l_D} \frac{L_{MD}}{l_d} & \frac{r_D}{l_D} \frac{L_{MD}}{l_F} & -\frac{r_D}{l_D} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_D} \right) & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ \omega & 0 & 0 & | & -\frac{r}{l_q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) & \frac{r}{l_q} \frac{L_{MQ}}{l_Q} & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{r_Q}{l_Q} \frac{L_{MQ}}{l_q} & -\frac{r_Q}{l_Q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_Q} \right) & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ -\frac{L_{MD}}{3_{Tj} l_d^2} \lambda_q & -\frac{L_{MD}}{3_{Tj} l_d l_F} \lambda_q & -\frac{L_{MD}}{3_{Tj} l_d l_D} \lambda_q & | & \frac{L_{MQ}}{3_{Tj} l_q^2} \lambda_d & \frac{L_{MQ}}{3_{Tj} l_d l_Q} \lambda_d & | & -\frac{D}{Tj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ - \\ \lambda_q \\ \lambda_Q \\ - \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_d \\ u_F \\ 0 \\ - \\ -u_q \\ 0 \\ - \\ \frac{Tm}{Tj} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση 1.72, είναι της μορφής

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Η περιγραφή του συστήματος δεν είναι πλήρης, αφού οι τάσεις  $u_d$  και  $u_q$  είναι συναρτήσεις των ρευμάτων και άρα θα εξαρτώνται από το φορτίο της μηχανής. Επιπλέον, παρατηρούμε πως στον  $7 \times 7$  πίνακα της παραπάνω εξίσωσης, εμπεριέχονται κάποιες από τις μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης. Γίνεται έτσι εύκολα αντιληπτός ο μη - γραμμικός χαρακτήρας του συστήματος.

## 2.8 Εξισώσεις Φορτίου

Το σύστημα 1.72 μας δίνει για κάθε γεννήτρια ένα σύστημα εξισώσεων, της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, v, T_m) \quad (2.73)$$

Με  $x$  συμβολίζουμε το διάνυσμα κατάστασης, το οποίο περιλαμβάνει τις πέντε ροές, τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και την ηλεκτρική γωνία  $\delta$ , ενώ το διάνυσμα  $v$  περιλαμβάνει τις τάσεις  $u_d$ ,  $u_q$  και  $u_F$ .

Θεωρώντας γνωστά τα μεγέθη  $U_F$ ,  $T_m$ , παραμένει μια απροσδιοριστία στο σύστημα 1.73, η οποία οφείλεται στις μεταβλητές  $u_d$  και  $u_q$ . Χρειάζονται επομένως δυο ακόμα εξισώσεις, οι οποίες να συσχετίζουν τα  $u_d$ ,  $u_q$  στις μεταβλητές κατάστασης. Οι βοηθητικές αυτές εξισώσεις ενδέχεται να αυξήσουν την τάξη του συστήματος αναλόγως αν είναι αλγεβρικές ή διαφορικές εξισώσεις ή αν προϋποθέτουν την εισαγωγή επιπλέον μεταβλητών. Σε κάθε περίπτωση, για να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις που θα συσχετίζουν τα  $u_d$ ,  $u_q$  με τις μεταβλητές κατάστασης, είναι απαραίτητη προϋπόθεση να γνωρίζουμε τις συνθήκες στους ακροδέκτες της γεννήτριας, δηλαδή το φορτίο.

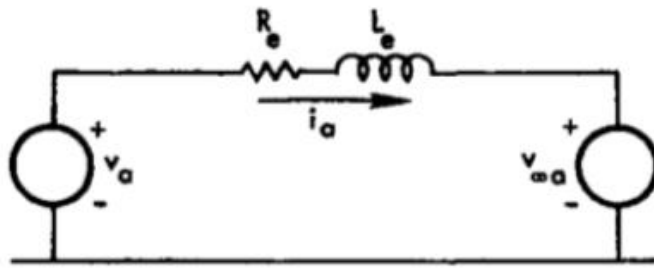
Υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αναπαραστήσει κανείς το ηλεκτρικό φορτίο σε μια σύγχρονη γεννήτρια. Στην προκειμένη περίπτωση, κυρίως για λόγους απλότητας, επιλέγουμε για την αναπαράσταση του φορτίου το πρόβλημα της σύγχρονης γεννήτριας συνδεδεμένης σε άπειρο ζυγό.

### 2.8.1 Σύγχρονη Γεννήτρια Σε Άπειρο Ζυγό

Θεωρούμε το σύστημα του σχήματος 1.5, το οποίο παριστάνει μια σύγχρονη γεννήτρια συνδεδεμένη σε άπειρο ζυγό μέσω μιας γραμμής μεταφοράς με αντίσταση  $R_e$  και συντελεστή αυτεπαγωγής  $L_e$ . Δεδομένου ότι οι φάσεις  $a$ ,  $b$ ,  $c$  είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, στο σχήμα παρουσιάζεται μόνο το κύκλωμα που αντιστοιχεί στη φάση  $a$ . Σύμφωνα με το σχήμα 1.5:

$u_a = u_{\infty a} + R_e i_a + L_e \dot{i}_a$  ή για τις τρεις φάσεις:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\infty a} \\ u_{\infty b} \\ u_{\infty c} \end{bmatrix} + R_e U \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + L_e U \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \quad (2.74)$$



Σχήμα 2.8: Σύγχρονη γεννήτρια συνδεδεμένη σε άπειρο ζυγό

Μπορούμε να μεταφέρουμε την εξίσωση 1.74 στο σύστημα αναφοράς 0-d-q, μέσω του μετασχηματισμού Park:

$$u_{0dq} = Pu_{abc} = Pu_{\infty abc} + R_e i_{0dq} + L_e \dot{i}_{abc} \quad (2.75)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της σχέσης 1.75 ισούται με  $u_{\infty 0dq}$  και μπορεί να προσδιοριστεί αν θεωρήσουμε πως οι τάσεις  $u_{\infty abc}$  είναι περιορισμένες:

$$U_{\infty abc} = \sqrt{2}V_{\infty} \begin{bmatrix} \cos(\omega_R t + a) \\ \cos(\omega_R t + a - 120^\circ) \\ \cos(\omega_R t + a + 120^\circ) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

όπου με  $V_{\infty}$  συμβολίζεται η μέση τετραγωνική τιμή της τάσης. Αποδεικνύεται ότι:

$$U_{\infty 0dq} = Pu_{\infty abc} = \sqrt{3}V_{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\delta - \alpha) \\ \cos(\delta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Ο τελευταίος όρος στο δεξί μέλος της σχέσης 1.75, υπολογίζεται ως εξής. Εξ' ορισμού ισχύει:  $\dot{i}_{0dq} = P\dot{i}_{abc} \Rightarrow \dot{i}_{0dq} = \mathbf{P}\dot{i}_{abc} + \dot{\mathbf{P}}i_{abc}$ . Επομένως:

$$\dot{\mathbf{P}}i_{abc} = \dot{i}_{0dq} - \mathbf{P}\dot{i}_{abc} = \dot{i}_{0dq} - \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}i_{0dq} \quad (2.78)$$



όπου το γινόμενο  $\dot{P}P^{-1}$  έχει υπολογιστεί νωρίτερα στη σχέση 1.31. Η εξίσωση 1.75 μπορεί επομένως να γραφεί:

$$U_{0dq} = \sqrt{3}V_{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\delta - \alpha) \\ \cos(\delta - \alpha) \end{bmatrix} + R_e i_{0dq} + L_e \dot{i}_{0dq} - \omega L_e \begin{bmatrix} 0 \\ -i_q \\ i_d \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Η σχέση 1.79 συσχετίζει τις τάσεις στους ακροδέκτες της γεννήτριας  $V_{0dq}$  με τα ρεύματα  $i_{0dq}$  για δεδομένη γωνία  $\delta$ . Στη σχέση αυτή υπάρχουν οι εξής μη - γραμμικότητες: οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στον πρώτο όρο καθώς και το γινόμενο  $\omega L_e \dot{i}$ .

Η γωνία  $\delta$  σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , δίνεται από τη σχέση  $\dot{\delta} = \omega - 1$  σε ρυ ή αλλιώς σε rad

$$\delta = \delta_0 + \int_{t_0}^t (\omega - \omega_R) dt \quad (2.80)$$

Παρατηρούμε επομένως, πως ακόμα και αυτή η απλοϊκή αναπαράσταση φορτίου εισάγει νέες μη - γραμμικότητες αλλά η τάξη του συστήματος παραμένει η ίδια.

## 2.8.2 Μοντέλο Πεπλεγμένων Μαγνητικών Ροών

Αν στις εξισώσεις 1.79 αντικαταστήσουμε τα ρεύματα  $i_d$  και  $i_q$  όπως δίνονται από τις σχέσεις 1.68, τότε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τις τάσεις  $u_d, u_q$ :

$$\begin{aligned}
u_d = & -\sqrt{3}V_\infty \sin(\delta - \alpha) + \frac{R_e}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \lambda_d - \frac{R_e L_{MD}}{l_d l_F} \lambda_F - \frac{R_e L_{MD}}{l_d l_D} \lambda_D + \frac{\omega L_e}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right) \lambda_q \\
& - \frac{\omega L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} \lambda_Q + \frac{L_e}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \dot{\lambda}_d - \frac{L_e L_{MD}}{l_d l_F} \dot{\lambda}_F - \frac{L_e L_{MD}}{l_d l_D} \dot{\lambda}_D
\end{aligned}
\tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
u_q = & \sqrt{3}V_\infty \sin(\delta - \alpha) + \frac{R_e}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right) \lambda_q - \frac{R_e L_{MQ}}{l_q l_Q} \lambda_Q - \frac{\omega L_e}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \lambda_d + \frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_F} \lambda_F \\
& + \frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_D} \lambda_D + \frac{L_e}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right) \dot{\lambda}_q - \frac{L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} \dot{\lambda}_Q
\end{aligned}
\tag{2.82}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές (1.81, 1.82) με το σύστημα 1.69, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{L_e}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right)\right] \dot{\lambda}_d - \frac{L_e L_{MD}}{l_d l_F} \dot{\lambda}_F - \frac{L_e L_{MD}}{l_d l_D} \dot{\lambda}_D = & \frac{-\hat{R}}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right) \lambda_d + \frac{\hat{R} L_{MD}}{l_d l_F} \lambda_F + \frac{\hat{R} L_{MD}}{l_d l_D} \lambda_D \\
-\omega \left[1 + \frac{L_e}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right)\right] \lambda_q + \frac{\omega L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} \lambda_Q + & \sqrt{3}V_\infty \sin(\delta - \alpha)
\end{aligned}
\tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{L_e}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right)\right] \dot{\lambda}_q - \frac{L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} \dot{\lambda}_Q = & \frac{-\hat{R}}{l_q} \left(1 - \frac{L_{MQ}}{l_q}\right) \lambda_q + \frac{\hat{R} L_{MQ}}{l_q l_Q} \lambda_Q + \omega \left[1 + \frac{L_e}{l_d} \left(1 - \frac{L_{MD}}{l_d}\right)\right] \lambda_d \\
- \frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_F} \lambda_F - \frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_D} \lambda_D - & \sqrt{3}V_\infty \cos(\delta - \alpha)
\end{aligned}
\tag{2.84}$$

Αν στην πρώτη και στην τέταρτη γραμμή του πίνακα 1.72 αντικαταστήσουμε τις σχέσεις 1.83, 1.84, παίρνουμε το πλήρες μοντέλο χώρου κατάστασης, το οποίο είναι της μορφής:

$$T\dot{x} = Cx + D \quad (2.85)$$

Οι πίνακες **T**, **C** και **D** είναι οι εξής:

$$T = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 + \frac{L_e}{l_d} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_d} \right) & -\frac{L_e L_{MD}}{l_d l_F} & -\frac{L_e L_{MD}}{l_d l_D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{L_e}{l_q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) & -\frac{L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.86)$$

$$C = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{-\hat{R}}{l_d} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_d} \right) & \frac{\hat{R} L_{MD}}{l_d l_F} & \frac{\hat{R} L_{MD}}{l_d l_D} & -\omega \left[ 1 + \frac{L_e}{l_q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) \right] & \frac{\omega L_e L_{MQ}}{l_q l_Q} & 0 & 0 \\ \frac{r_F L_{MD}}{l_F l_d} & -\frac{r_F}{l_F} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_F} \right) & \frac{r_F L_{MD}}{l_F l_D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_D L_{MD}}{l_D l_d} & \frac{r_D L_{MD}}{l_D l_F} & -\frac{r_D}{l_D} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_D} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ \omega \left[ 1 + \frac{L_e}{l_d} \left( 1 - \frac{L_{MD}}{l_d} \right) \right] & -\frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_F} & -\frac{\omega L_e L_{MD}}{l_d l_D} & \frac{-\hat{R}}{l_q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_q} \right) & \frac{\hat{R} L_{MQ}}{l_q l_Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_Q L_{MQ}}{l_Q l_q} & -\frac{r_Q}{l_Q} \left( 1 - \frac{L_{MQ}}{l_Q} \right) & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ -\frac{L_{MD}}{3\tau_J l_d^2} \lambda_q & -\frac{L_{MD}}{3\tau_J l_d l_F} \lambda_q & -\frac{L_{MD}}{3\tau_J l_d l_D} \lambda_q & \frac{L_{MQ}}{3\tau_J l_q^2} \lambda_d & \frac{L_{MQ}}{3\tau_J l_q l_Q} \lambda_d & -\frac{D}{\tau_J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

(2.87)

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{3}V_{\infty} \sin(\delta - \alpha) \\ u_F \\ 0 \\ -\sqrt{3}V_{\infty} \cos(\delta - \alpha) \\ 0 \\ \frac{T_m}{T_j} \\ T_j \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Αν ο πίνακας  $T$  είναι αντιστρέψιμος, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση 1.85 με  $T^{-1}$  ώστε να πάρουμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\dot{x} = T^{-1}Cx + T^{-1}D \quad (2.89)$$

που είναι στην επιθυμητή μορφή  $\dot{x} = f(x, u, t)$ . Το σύστημα αυτό είναι μη - γραμμικό, καθώς περιέχει γινόμενα των μεταβλητών κατάστασης και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

## Κεφάλαιο 3

### Πειράματα Μη Γραμμικής Προσομοίωσης

#### 3.1 Προσομοίωση Σύγχρονης Γεννήτριας

Το παρόν κεφάλαιο αποσκοπεί στην κάλυψη των πρακτικών προβληματισμών που προκύπτουν από τα μαθηματικά μοντέλα της σύγχρονης γεννήτριας που παρουσιάστηκαν έως τώρα. Συγκεκριμένα, επιχειρείται η προσομοίωση του πλήρους μοντέλου (2.89). Πρώτο μέλημα είναι ο προσδιορισμός των αρχικών συνθηκών του συστήματος, των παραμέτρων της γεννήτριας που προκύπτουν από τα χαρακτηριστικά της, καθώς και η μελέτη της συμπεριφοράς της σε συγκεκριμένες συνθήκες.

### 3.1.1 Προσδιορισμός Αρχικών Συνθηκών

Τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της υπό μελέτης γεννήτριας προέρχονται από τα παραδείγματα 4.1, 4.2 και 4.3 του βιβλίου του *Anderson & Fouad (Power Systems Controls and Stability 2<sup>nd</sup>)* και δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

|                            |                          |                    |                           |
|----------------------------|--------------------------|--------------------|---------------------------|
| Όνομαστική Φαινόμενη Ισχύς | 160 MVA                  | $L_Q$              | $1.423 \times 10^{-3}$ H  |
| Όνομαστική τάση            | 15 kV, Y                 | $I_d = I_q$        | $0.5595 \times 10^{-3}$ H |
| Τάση διέγερσης             | 375 V                    | $kM_D$             | $5.782 \times 10^{-3}$ H  |
| Ρεύμα Στάτη                | 6158.40 A                | $kM_Q$             | $2.779 \times 10^{-3}$ H  |
| Ρεύμα Πεδίου               | 926 A                    | $r(125^\circ C)$   | $1.542 \times 10^{-3}$ Ω  |
| Συντ. Ισχύος               | 0.85                     | $r_F(125^\circ C)$ | 0.371 Ω                   |
| $L_d$                      | $6.341 \times 10^{-3}$ H | $r_D$              | $18.421 \times 10^{-3}$ Ω |
| $L_F$                      | 2.189 H                  | $r_Q$              | $18.969 \times 10^{-3}$ Ω |
| $L_D$                      | $5.989 \times 10^{-3}$ H | Ροπή Αδράνειας     | 1.765 kW/s/hp             |
| $L_q$                      | $6.118 \times 10^{-3}$ H |                    |                           |

Πίνακας 3.1: Κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της υπό μελέτης σύγχρονης γεννήτριας.

Οι παράμετροι της μηχανής σε pu μονάδες, είναι:

|                              |          |
|------------------------------|----------|
| $L_d$                        | 1.70     |
| $L_F$                        | 1.651    |
| $L_D$                        | 1.605    |
| $I_d = I_q$                  | 0.15     |
| $L_q$                        | 1.64     |
| $L_Q$                        | 1.526    |
| $L_{AD} = kM_D = kM_F = M_R$ | 1.55     |
| $L_{AQ} = kM_Q$              | 1.49     |
| $r$                          | 0.001096 |
| $r_F$                        | 0.000742 |

|       |        |
|-------|--------|
| $r_D$ | 0.0131 |
| $r_Q$ | 0.0540 |
| $x_d$ | 1.700  |
| $x_q$ | 1.640  |

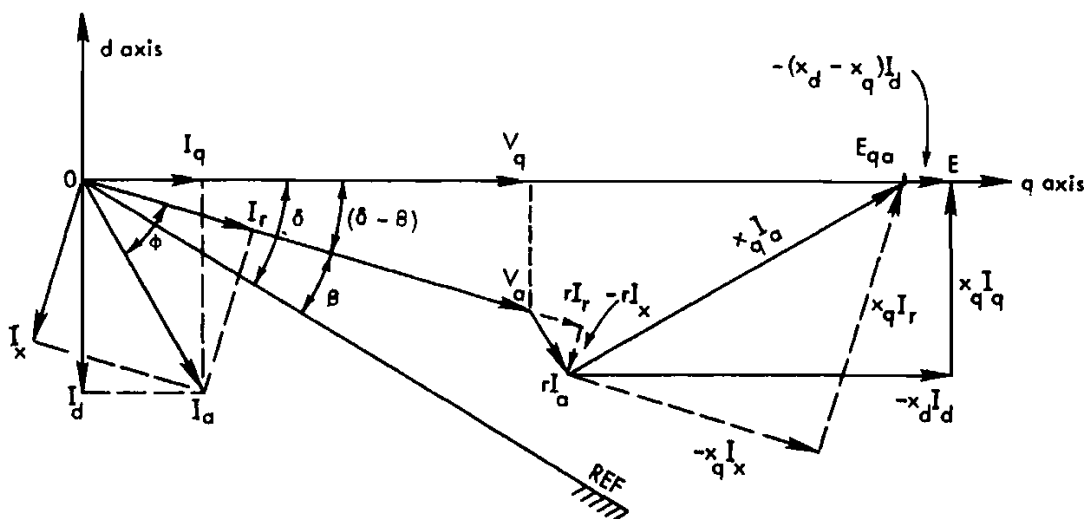
Πίνακας 3.2: Ηλεκτρικές παράμετροι μηχανής σε pu μονάδες

Θεωρούμε πως στους ακροδέκτες της γεννήτριας αυτής εφαρμόζεται τάση  $V_a = 1$  pu και πως αυτή είναι συνδεδεμένη σε άπειρο ζυγό μέσω μιας γραμμής μεταφοράς με εμπέδηση  $Z_e = 0.02 + j0.40$  pu. Δεδομένης της τάσης  $V_a$  και του συντελεστή ισχύος, υπολογίζουμε το ρεύμα  $I_a$  του στάτη ως:

$$I_a = 1.0 / 0.85 = 1.176 \text{ pu}$$

Επιπλέον, η γωνία ισχύος είναι  $\varphi = \cos^{-1} \times 0.85 = 31.788^\circ$ . Από το διανυσματικό διάγραμμα του παρακάτω σχήματος, υπολογίζουμε τα ρεύματα στους ακροδέκτες ως:

$$I_r = I_a \cos \varphi = 1.000 \quad I_x = -I_a \sin \varphi = -0.620$$



Σχήμα 3.1: Διανυσματικό διάγραμμα σύγχρονης γεννήτριας συνδεδεμένης σε άπειρο ζυγό μέσω γραμμής μεταφοράς

Η γωνία μεταξύ του άξονα q και της τάσης  $V_a$  είναι η:

$$\delta-\beta = \arctan[(x_q I_r + r I_x)/(V_a + r I_r - x_q I_x)] = 39.096^\circ$$

ενώ το ρεύμα  $I_a$  καθυστερεί σε σχέση με τον άξονα  $q$  κατά γωνία  $\delta-\beta+\varphi=70.884^\circ$ .

Επομένως:

$$\begin{aligned} I_q &= I_a \cos(\delta-\beta+\varphi) = 0.385 \text{ pu} & i_q &= 0.667 \text{ pu} \\ I_d &= -I_a \sin(\delta-\beta+\varphi) = -1.112 \text{ pu} & i_d &= -1.925 \text{ pu} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, οι τάσεις στους άξονες  $d$  και  $q$ :

$$\begin{aligned} V_q &= V_a \cos(\delta-\beta) = 0.776 \text{ pu} & u_q &= 1.344 \text{ pu} \\ V_d &= -V_a \sin(\delta-\beta) = -0.631 \text{ pu} & u_d &= -1.092 \text{ pu} \end{aligned}$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη  $E$  ισούται με:

$$E = V_q + r I_q - x_d I_d = 2.666$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι  $i_F = \sqrt{3} \frac{E}{L_{AD}} = 2.979 \text{ pu}$ . Οι ροές σε μονάδες pu, δίνονται από τις σχέσεις 1.20, 1.45, 1.46:

$$\begin{aligned} \lambda_d &= L_d i_d + k M_F i_F = 1.345 \\ \lambda_{AD} &= (i_d + i_F) k M_F = 1.634 \\ \lambda_q &= L_q i_q = 1.094 \\ \lambda_{AQ} &= k M_Q i_q = 0.994 \\ \lambda_F &= k M_F i_d + L_F i_F = 1.935 \\ \lambda_D &= \lambda_{AD} = k M_D i_d + M_R i_F = 1.634 \\ \lambda_Q &= \lambda_{AQ} = k M_Q i_q = 0.994 \end{aligned}$$

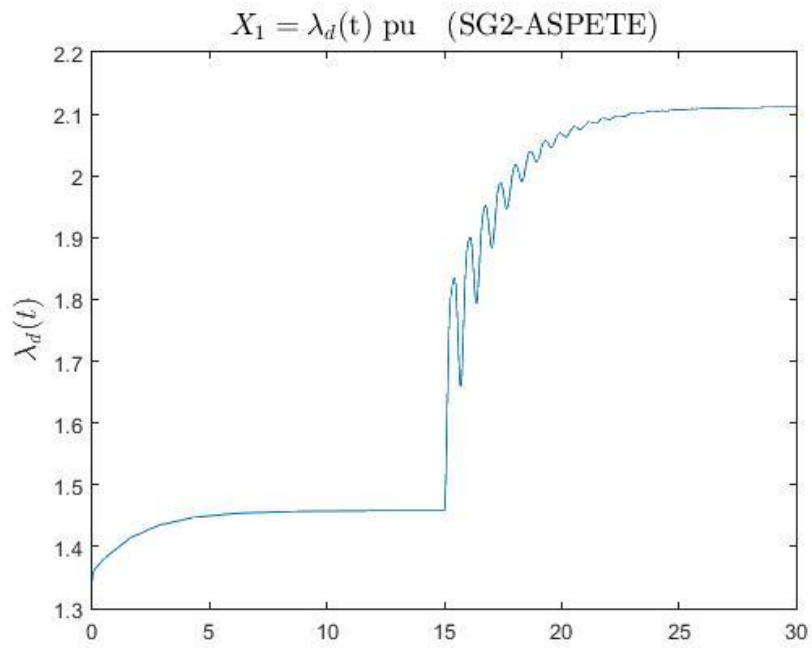
Επιπλέον, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την τάση του άπειρου ζυγού, καθώς ισχύει:  $\bar{V}_\infty = \bar{V}_a - \bar{Z}_e \bar{I}_a$ . Ύστερα από πράξεις, προκύπτει ότι  $V_\infty = 0.828 \angle -27.899^\circ$  με τη γωνία ( $\beta$ ) να εκφράζει την καθυστέρηση του  $\hat{V}_\infty$  σε σχέση με την τάση  $\hat{V}_a$ . Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε την γωνία  $\delta$  μεταξύ του άπειρου ζυγού και του άξονα  $q$  ως:

$$\delta = (\delta - \beta) + \beta = 66.995^\circ$$

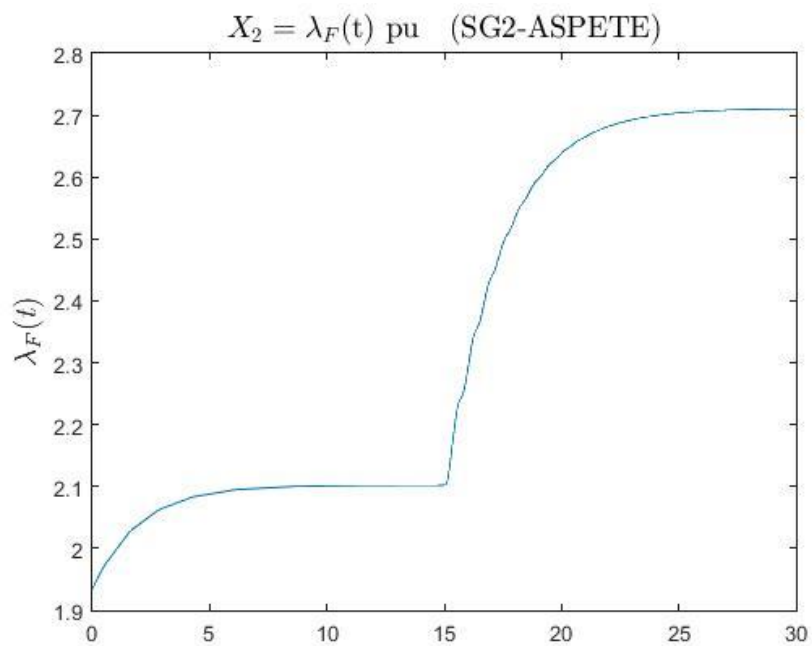
Όλα τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα, μπορούν να υπολογιστούν από τον κώδικα Matlab της ενότητας 3.1, θεωρώντας δεδομένα τα στοιχεία του πίνακα 3.2.

### 3.2 Αποκρίσεις της πλήρους μη Γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας χωρίς σύνδεση σε άπειρο ζυγό

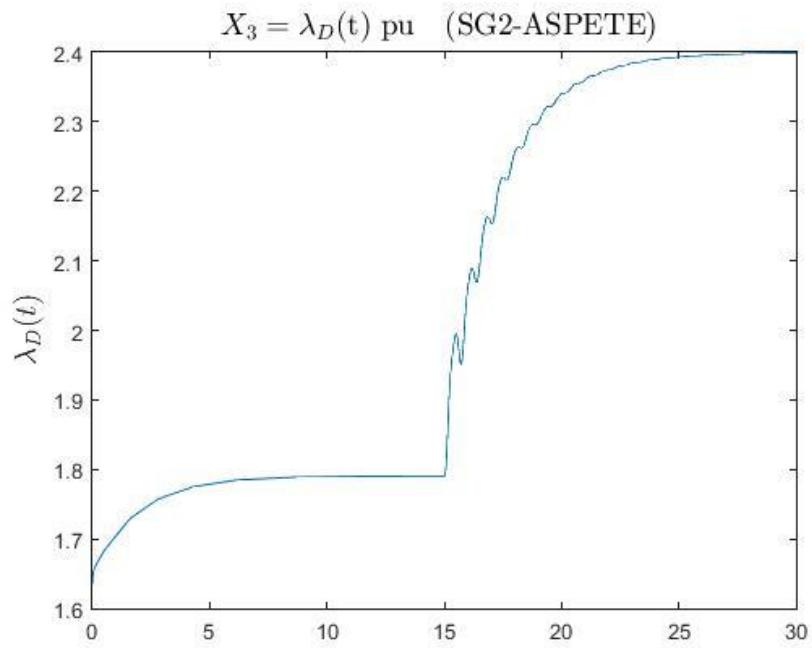




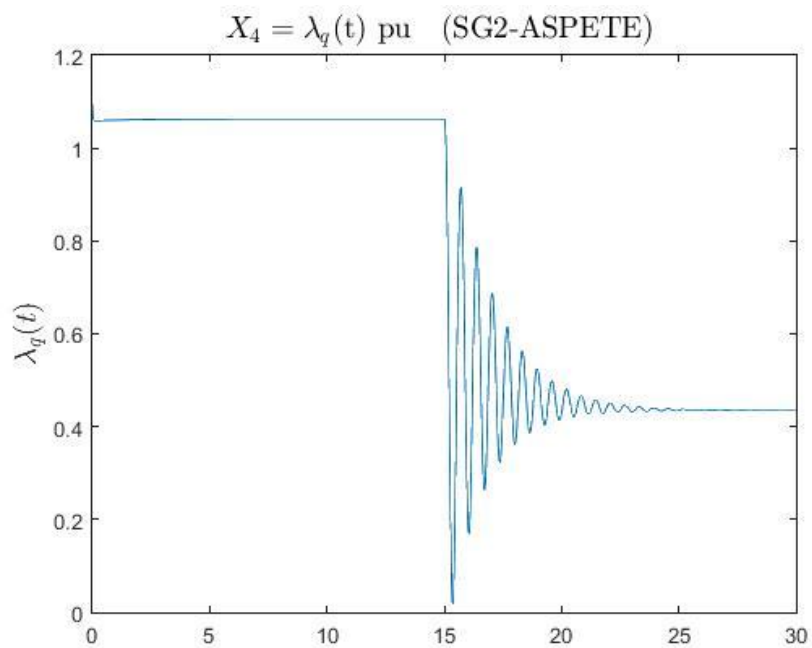
**Σχήμα 3.2:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_d(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



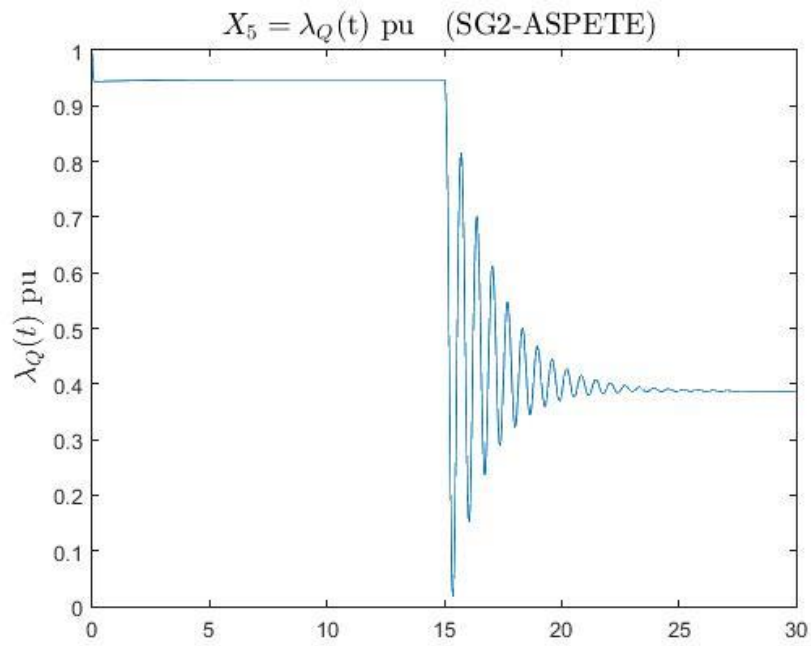
**Σχήμα 3.3:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_F(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



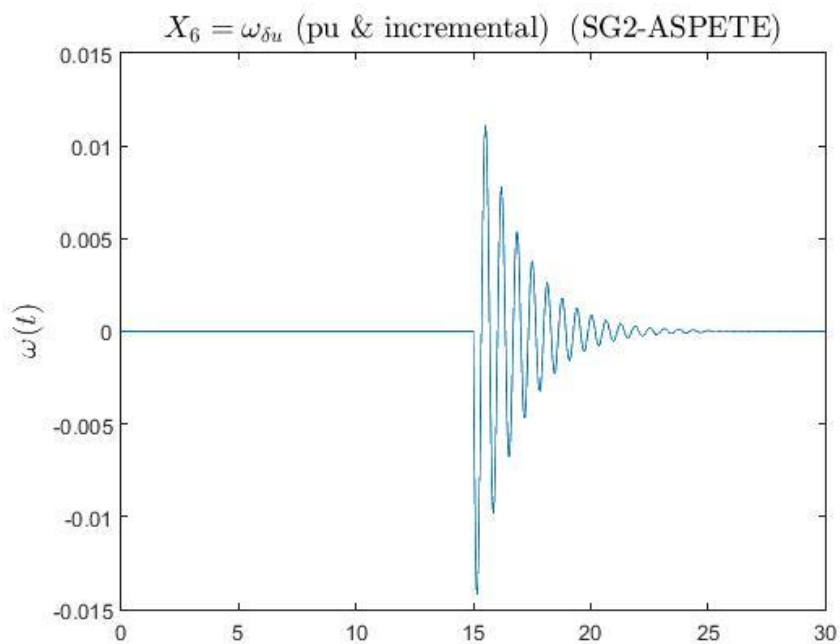
**Σχήμα 3.4:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_D(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



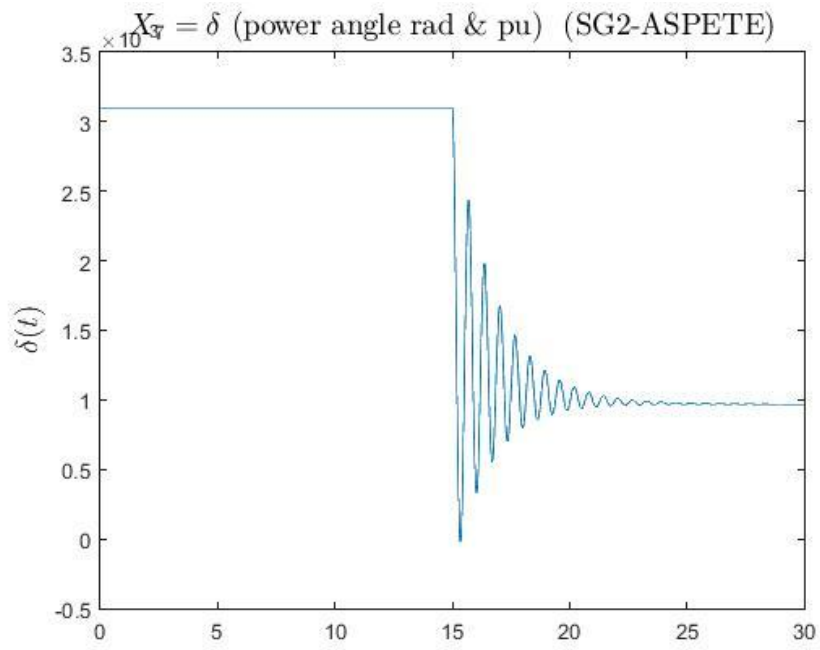
**Σχήμα 3.5:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_q(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.6:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_Q(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

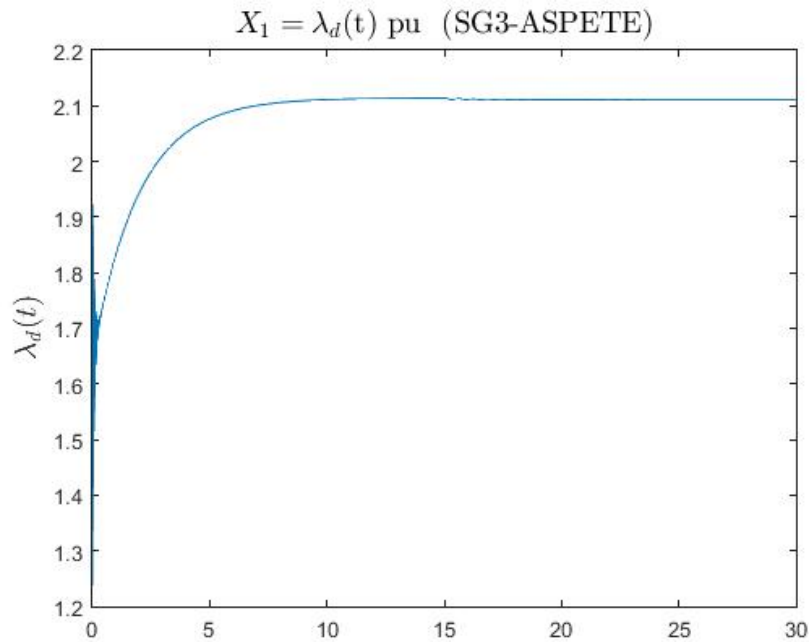


**Σχήμα 3.7:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\omega(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

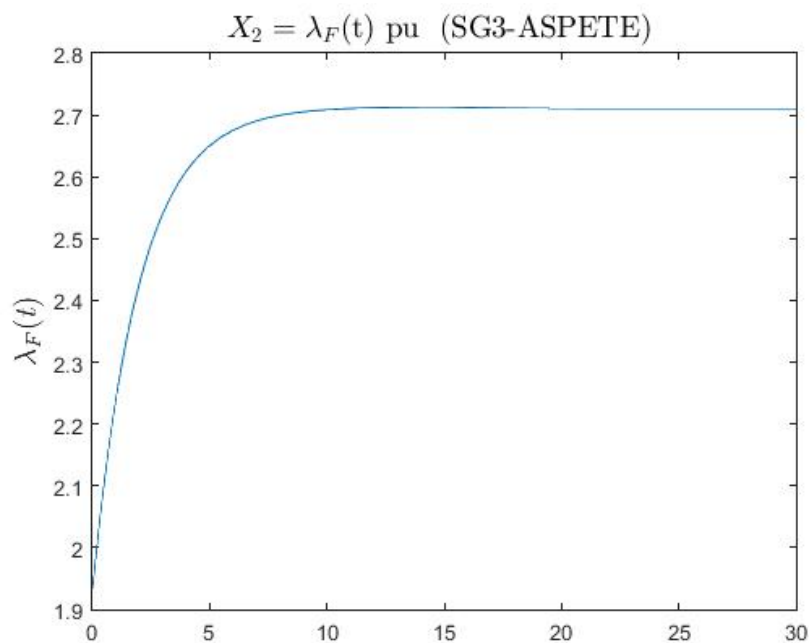


**Σχήμα 3.8:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\delta(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

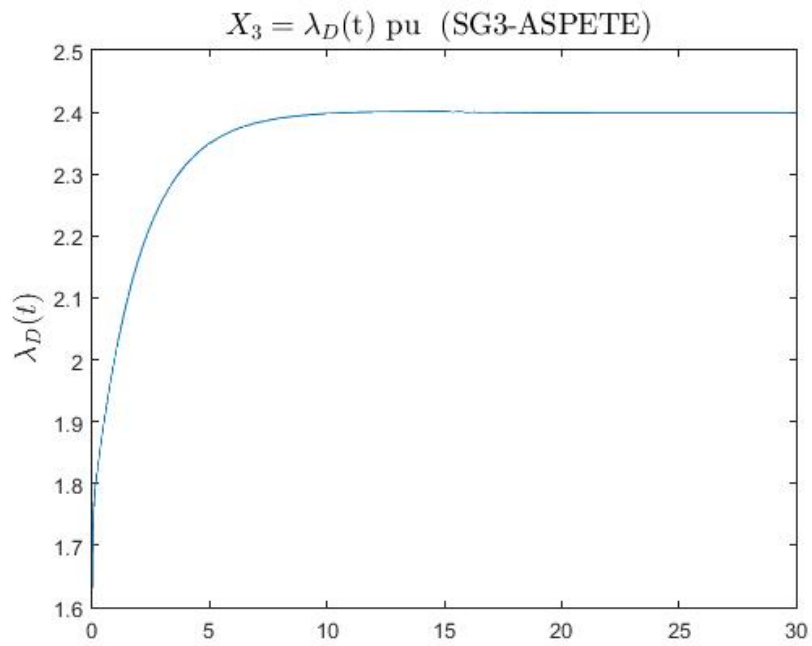
### 3.3 Αποκρίσεις της πλήρως Μη Γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας συνδεδεμένη σε άπειρο ζυγό με βηματική διαταραχή στη ροπή εισόδου



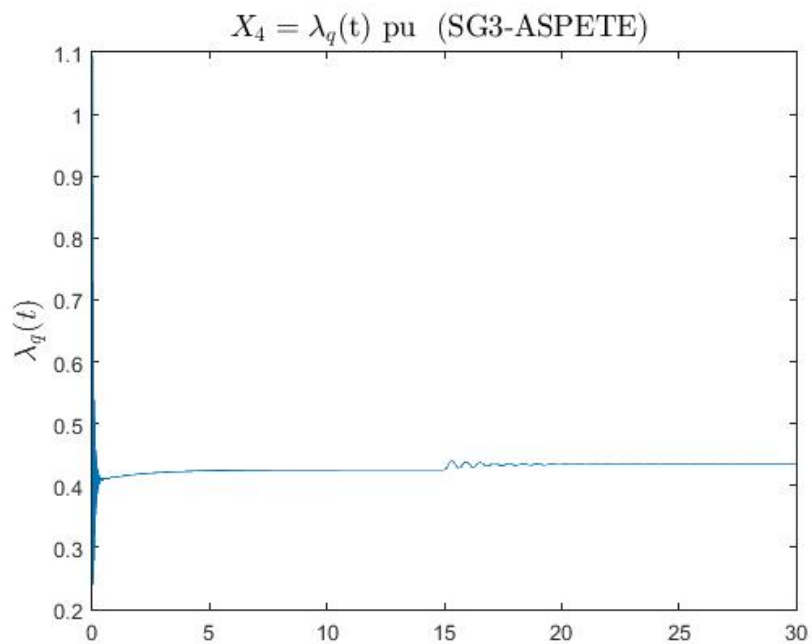
Σχήμα 3.9: Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_d(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



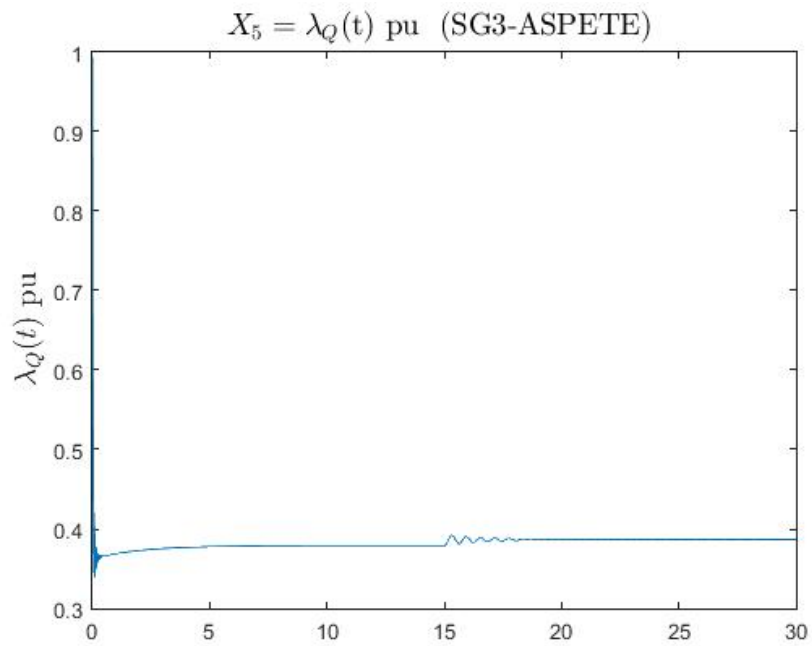
Σχήμα 3.10: Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_F(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



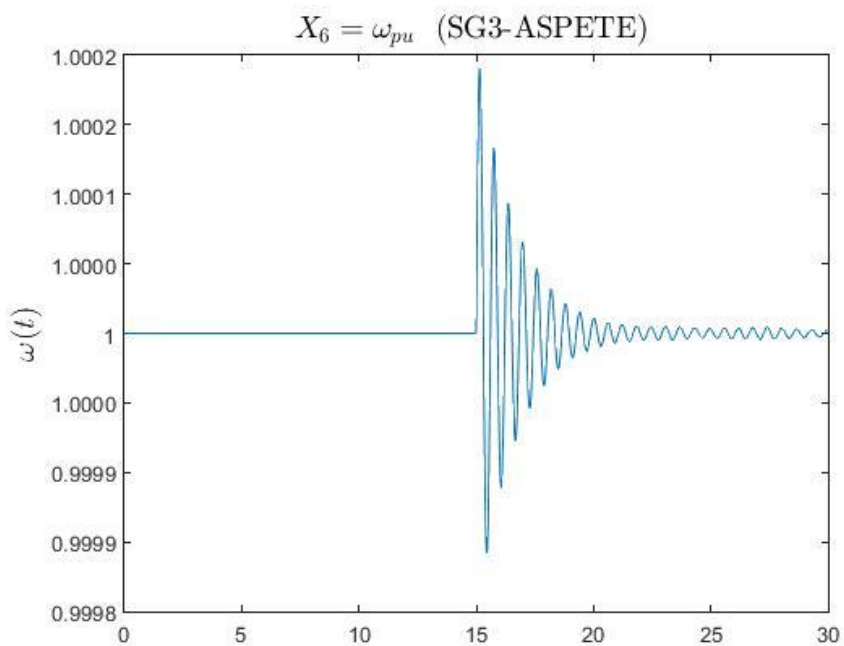
**Σχήμα 3.11:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_D(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



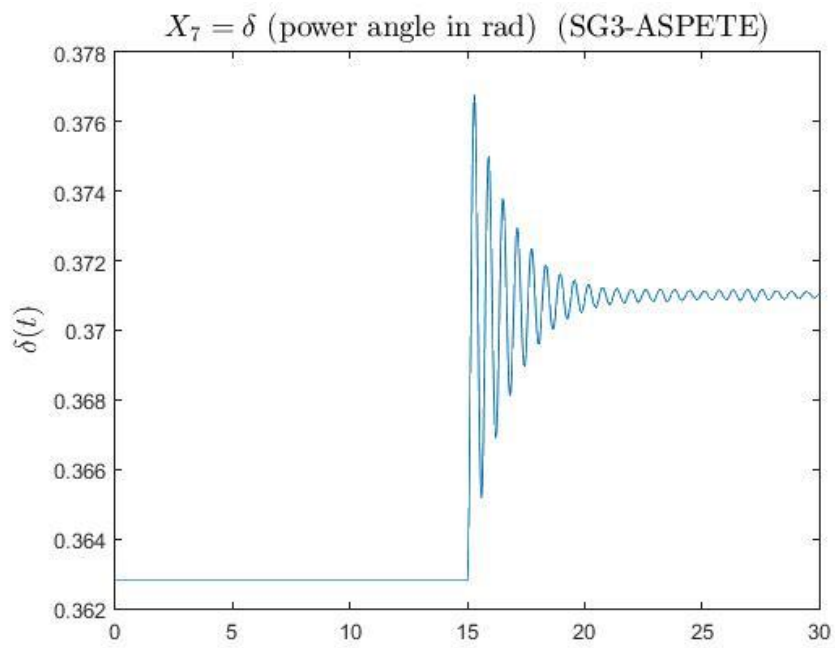
**Σχήμα 3.12:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_q(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.13:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_Q(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.14:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\omega(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

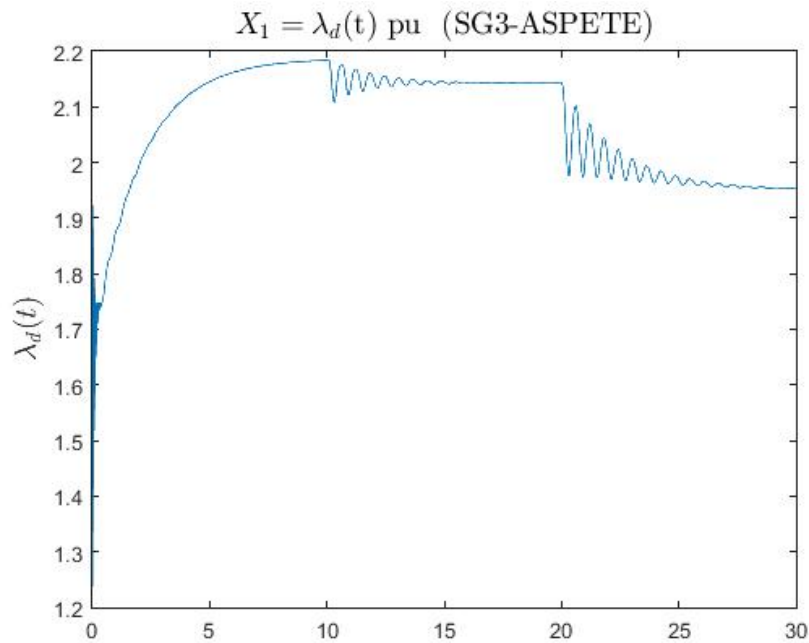


**Σχήμα 3.15:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\delta(t)$  σε βηματική διαταραχή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

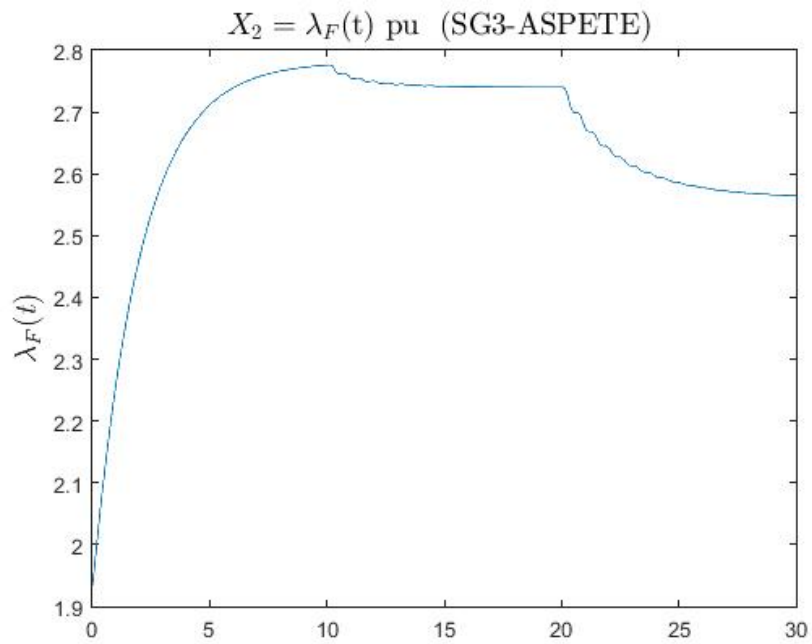


### 3.4 Αποκρίσεις της πλήρως Μη γραμμικής Δυναμικής της Σύγχρονης Γεννήτριας με κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου

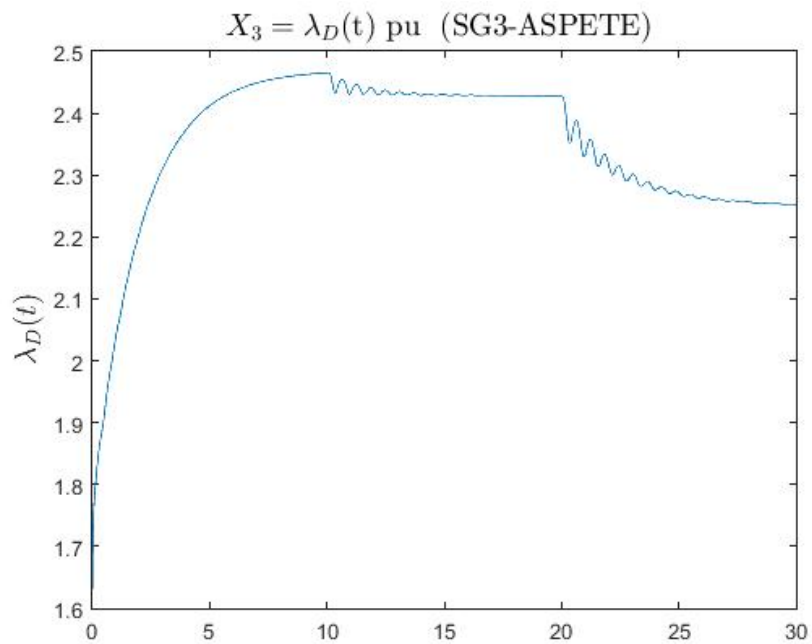
Για την παραγωγή των παρακάτω αποκρίσεων χρησιμοποιήσαμε τα στοιχεία της μηχανής καθώς επίσης και τις αρχικές συνθήκες που προσδιορίζονται στην ενότητα 3.1. Θεωρήσαμε σταθερή την είσοδο που αντιστοιχεί στην τάση διέγερσης  $u_F$  και ίση με  $0.00229\text{pu}$ . Ανά διαστήματα  $10\text{sec}$  εφαρμόζουμε αύξηση στην είσοδο που αντιστοιχεί στην μηχανική ροπή  $T_m$  κατά  $0.4\text{pu}$ . Η μηχανική ροπή θα ξεκινάει από  $T_m=0\text{pu}$  και θα καταλήγει σε  $T_m=0.8\text{pu}$



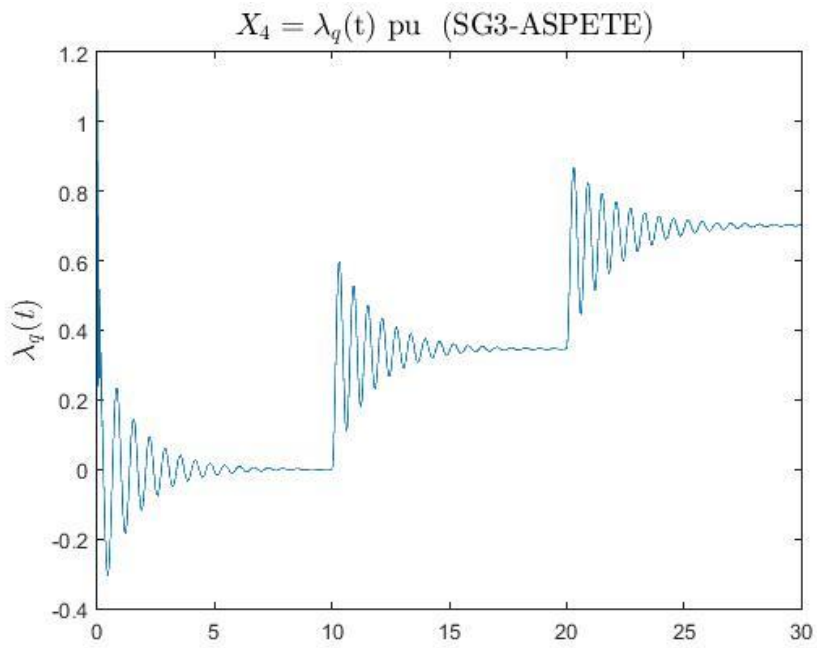
Σχήμα 3.16: Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_d(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



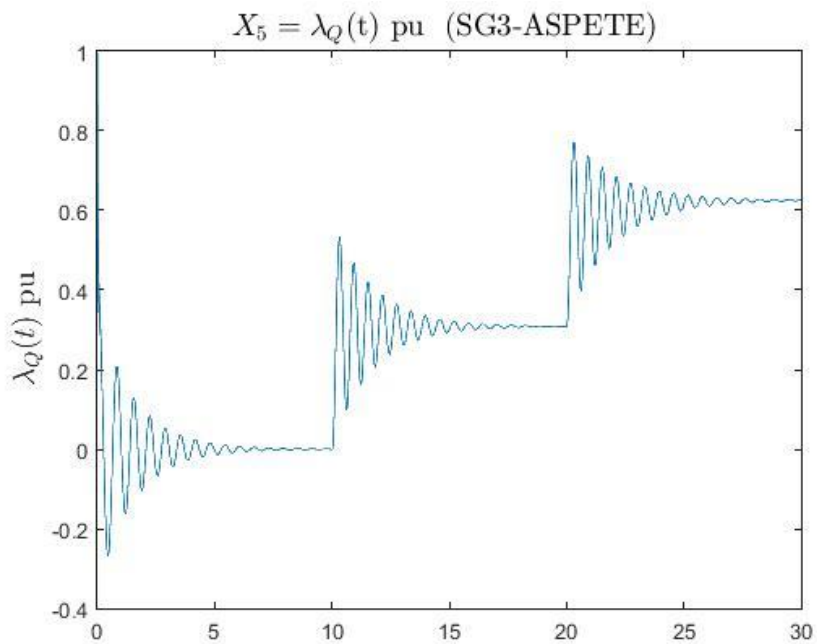
**Σχήμα 3.17:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_F(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



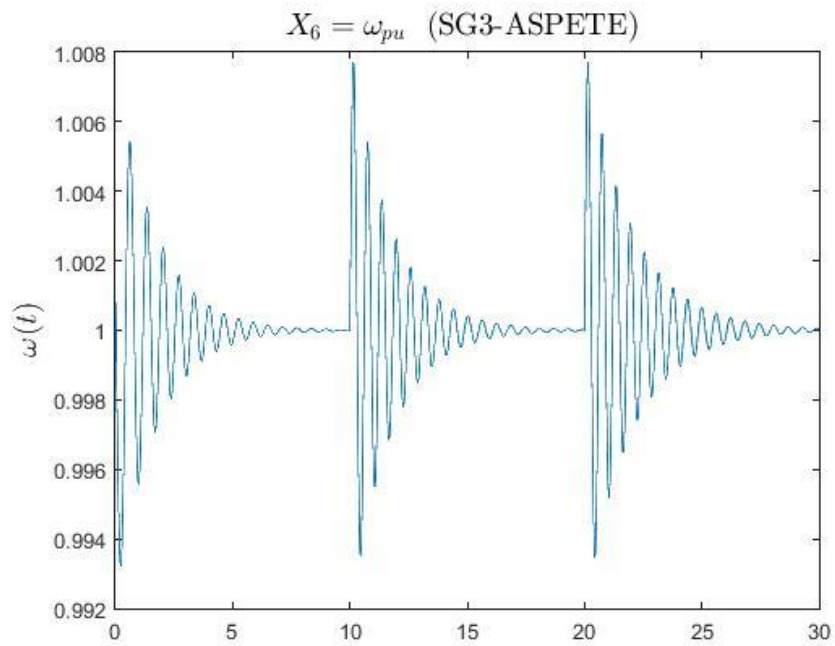
**Σχήμα 3.18:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_D(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



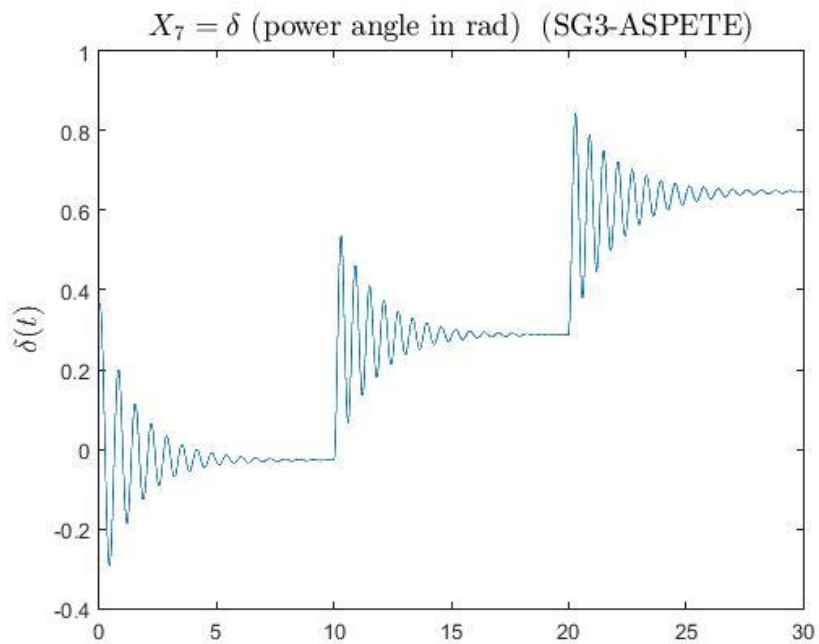
**Σχήμα 3.19:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_q(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.20:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\lambda_d(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.21:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\omega(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)



**Σχήμα 3.22:** Απόκριση της καταστατικής μεταβλητής  $\delta(t)$  σε κατά τμήματα σταθερή διαταραχή στη ροπή εισόδου  $T_m$  (είσοδος ελέγχου)

# Κεφάλαιο 4

## Συμπεράσματα και Μελλοντική εργασία

Εκτενή πειράματα προσομοίωσης στο πλήρες μη γραμμικό καταστατικό μοντέλο της Σ.Γ συνδεδεμένης σε άπειρο ζυγό, επιβεβαιώνουν εμπειρικά ότι το σύστημα είναι ευσταθές σε όλες τις συνθήκες λειτουργίας που μελετήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε πως ύστερα από κάθε μεταβολή της παρεχόμενης μηχανικής ροπής  $T_m$  οι καταστατικές μεταβλητές του ηλεκτρικού υποσυστήματος συγκλίνουν σε κάποια νέα σταθερή τιμή, ενώ η έκτη μεταβλητή που αντιστοιχεί στη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  (και κατά συνέπεια στην ηλεκτρική συχνότητα  $f$ ), συγκλίνει στην τιμή  $1pu$ . δηλαδή στην ονομαστική τιμή της συχνότητας, όπως ακριβώς είναι αναμενόμενο από μια Σ.Γ που λειτουργεί στην ευσταθή περιοχή λειτουργίας της. Μια ακόμα σημαντική παρατήρηση είναι ότι η έβδομη καταστατική μεταβλητή (γωνία ισχύος  $\delta$ ) βρίσκεται μονίμως σε τιμές χαμηλότερες από τις  $45^\circ$  πράγμα που εγγυάται την μεταβατική ευστάθεια του συστήματος.

Αξίζει τέλος να σημειωθεί πως στην μόνιμη κατάσταση δεν μηδενίζονται οι ροές των τυλιγμάτων απόσβεσης. Αυτό έχει σαν συνέπεια να περιπλέκεται η διαδικασία απλοποίησης του συστήματος καθώς στην μόνιμη κατάσταση οι συγκεκριμένες μεταβλητές συμβάλλουν και δε γίνεται να διαγραφούν απλά από το πλήρες σύστημα των 7 διαφορικών εξισώσεων. Η μελλοντική εργασία περιλαμβάνει δυο σημαντικά θέματα :

- το καταστατικό μοντέλο βασισμένο στα ρεύματα (current model)
- μελέτη ευστάθειας βασισμένη στην γραμμικοποίηση (Linearization) του μη γραμμικού καταστατικού μοντέλου που μελετήσαμε γύρω από κάποιο ευσταθές σημείο ισορροπίας και ακολούθως έλεγχος των ιδιοτιμών του παραχθέντος πίνακα «A».

# Παράρτημα Α': Κώδικας MATLAB

## A.1 Προσδιορισμός Αρχικών Συνθηκών

Στον παρακάτω κώδικα εισάγονται όλες οι παράμετροι της σύγχρονης γεννήτριας του πίνακα 3.2. Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι τιμές των μαγνητικών ροών  $\lambda$ , της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  καθώς και της ηλεκτρικής γωνίας  $\delta$  για το πρόβλημα της σύγχρονης γεννήτριας συνδεδεμένης σε άπειρο ζυγό που παρουσιάζεται στην ενότητα 2.1

```
% SG3_7state_NL_AF_InitialConditions

% times parametrwn p.u.
f = 60;

L_d = 1.70;
L_q = 1.64;
L_F = 1.651;
L_D = 1.605;
L_Q = 1.526;
kM_F = 1.55;
M_R = 1.55;
kM_D = 1.55;
l_d = 0.15;

l_q = 0.15;
kM_Q = 1.49;
r = 0.001096;
r_F = 0.000742;
r_D = 0.0131;
r_Q = 0.0540;
H = 2.37;
t_B = 2.6526 * 10^(-3); %oi times mexri edw einai apo ex.4.1 & 4.2
%apo 4.108
l_F = L_F - M_R; %4.108
l_D = L_D - M_R; %4.108
l_Q = L_Q - kM_Q; %4.109
L_AD = M_R; %4.107
L_MD = 1/((1/L_AD) + (1/l_d) + (1/l_F) + (1/l_D)); %4.119
L_AQ = kM_Q; %4.109
L_MQ = 1/((1/L_AQ) + (1/l_q) + (1/l_Q)); %4.122
omega_B = 1/t_B; %4.50
tau_j = 2 * H * omega_B; %4.85
D = 0; %ex.4.3
%orizw tis metavlhtes mou
syms omega lambda_q lambda_d i_q i_d v_d v_F v_q T_m v
% orismos initial conditions ex.5.1
x_d = L_d; %5.7
x_q = L_q; %5.7
F_p = 0.85; %ex.5.1
V_a = 1; %ex.5.1
R_e = 0.02; %ex.5.1
L_e = 0.4; %ex.5.1
```

```

Z_eabs = 0.4005; %ex.5.1
Z_eangle = 87.138; %ex.5.1
I_a = V_a/F_p;
phi = acosd(F_p);
I_r = I_a*cosd(phi);
I_x = -I_a*sind(phi);
delta_minus_beta = atand((x_q*I_r+r*I_x)/(V_a+r*I_r-x_q*I_x)); %5.42
I_q = I_a*cosd(delta_minus_beta+phi); %5.44
I_d = -I_a*sind(delta_minus_beta+phi); %5.44
i_q = sqrt(3)*I_q; %5.11
i_d = sqrt(3)*I_d; %5.11
V_d = -V_a*sind(delta_minus_beta); %5.43
V_q = V_a*cosd(delta_minus_beta); %5.43
v_d = sqrt(3)*V_d; %5.15
v_q = sqrt(3)*V_q; %5.15
E = V_q + r*I_q - x_d*I_d; %5.15
i_F = sqrt(3)*E/L_AD;
%initial fluxes
lambda_d = L_d*i_d + kM_F*i_F; %4.120
lambda_AD = (i_d + i_F)*kM_F; %4.111
lambda_q = L_q*i_q; %4.20
lambda_AQ = kM_Q*i_q; %4.112
lambda_F = kM_F*i_d + L_F*i_F; %4.20
lambda_D = kM_D*i_d + M_R*i_F; %4.20
lambda_Q = kM_Q*i_q; %4.20
T_ephi = i_q*lambda_d - i_d*lambda_q;
T_e = T_ephi/3;
V_inf = V_a-(Z_eabs*cos(Z_eangle)+Z_eabs*sin(Z_eangle)*j)*(I_a*cos(-
phi)+I_a*sin(-phi)*j);
beta_minus_alpha = angle(V_inf)*180/pi;
delta_minus_alpha = delta_minus_beta + beta_minus_alpha;
%for alpha = 0
delta = delta_minus_alpha;

%orizw initial values apo ex.5.1 & 5.2
lambda_d_ini = double(lambda_d); %1.676;
lambda_F_ini = double(lambda_F); %1.935;
lambda_D_ini = double(lambda_D); %1.914;
lambda_q_ini = double(lambda_q); %1.150;
lambda_Q_ini = double(lambda_Q); %1.045;
i_q_ini = double(i_q);
i_d_ini = double(i_d);
omega_ini = 1; %pu
delta_ini = (pi/180)*double(delta); %53.736; se rad
v_F_ini = 0.9*double(E);
v_d_ini = double(v_d);
v_q_ini = double(v_q);

```

# Βιβλιογραφία

1. A.A. Fouad P.M. Anderson. Power System Control and Stability. JOHN WILEY & SONS, 2003.
2. Ν. Βοβός, Γ. Γιαννακόπουλος, «Έλεγχος και Ευστάθεια Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας», εκδόσεις Ζήτη, 2008
3. Ν. Βοβός, Γ. Γιαννακόπουλος, «Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας», εκδόσεις Ζήτη, 2008
4. Π. Μαλατέστας, «Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας», εκδόσεις Τζιόλα, 2014
5. P. Kundur,, «Power System Stability and Control»
6. Wood, B. Wollenberg, G. Sheble, «Power Generation, Operation and Control», Wiley, 3<sup>rd</sup> edition, 2014
7. D. Glover, M. Sarma, Th. Overbye, «Power System Analysis and Design», Cengage Learning, 5<sup>th</sup> edition, 2012