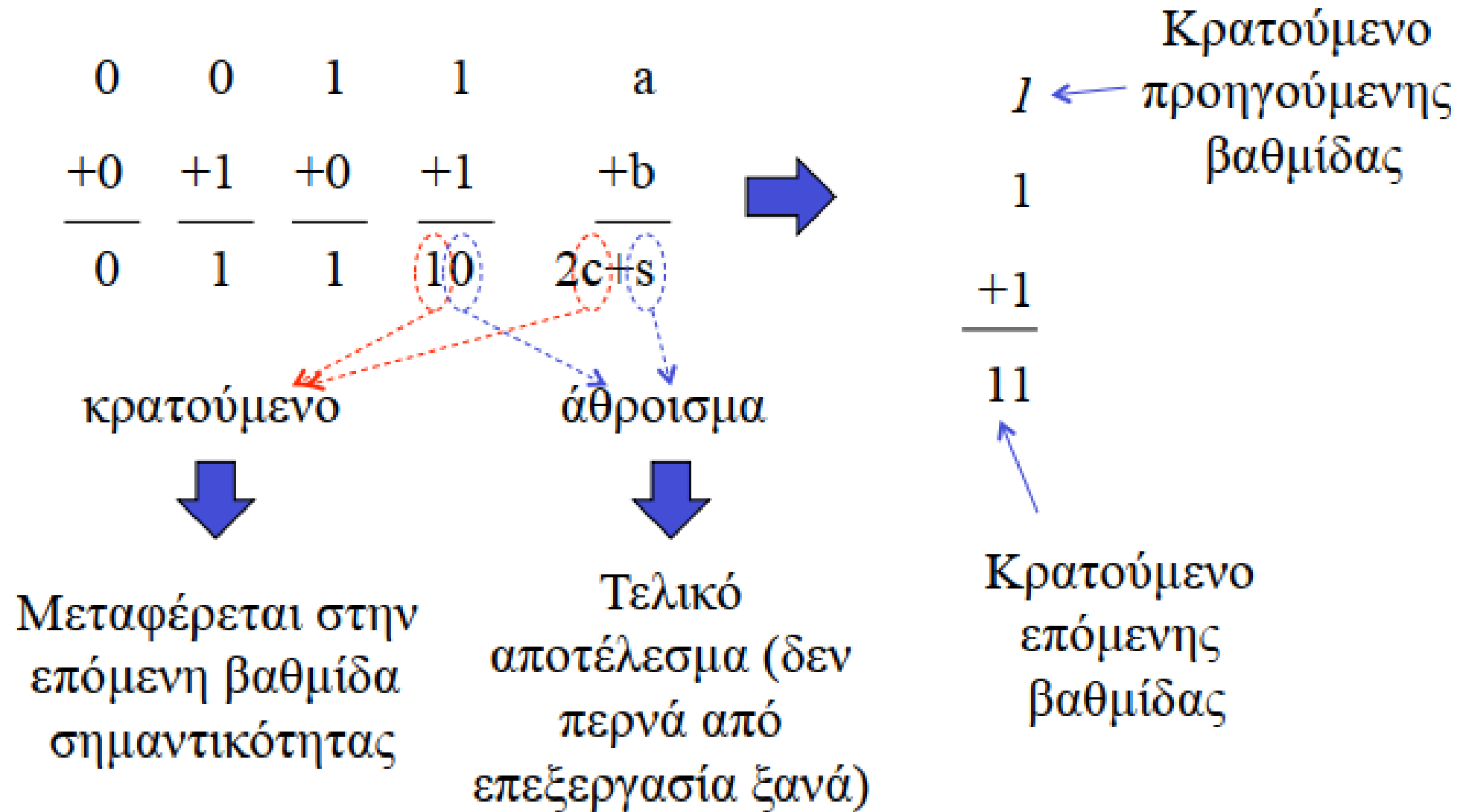


Άθροιση



Ημι-Αθροιστής (Half Adder)

1.Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να προσθέτει δύο δυαδικά ψηφία.

2.Πλήθος εισόδων/εξόδων: 2 είσοδοι – 2 έξοδοι.

3.Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x , y οι δύο είσοδοι (προσθετέοι) και C (κρατούμενο), S (άθροισμα) οι δύο έξοδοι.

4.Πίνακας αλήθειας:

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

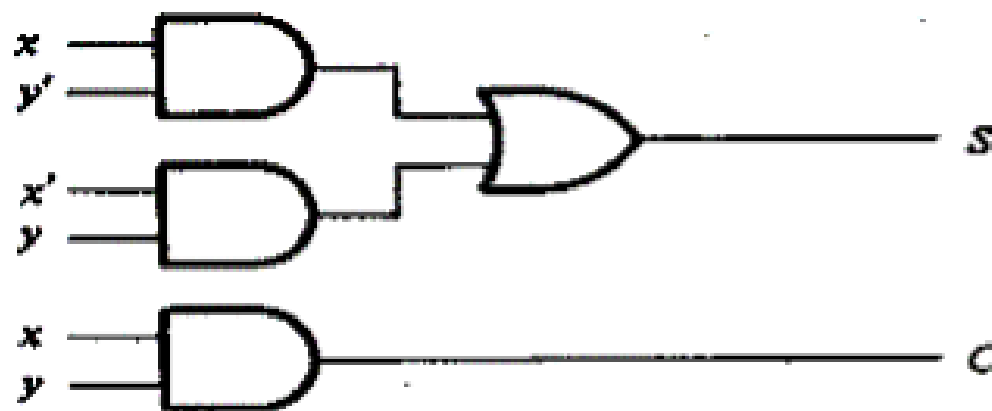
Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(α)

$$S = x'y + xy'$$

$$C = xy$$



(α) $S = xy' + x'y$
 $C = xy$

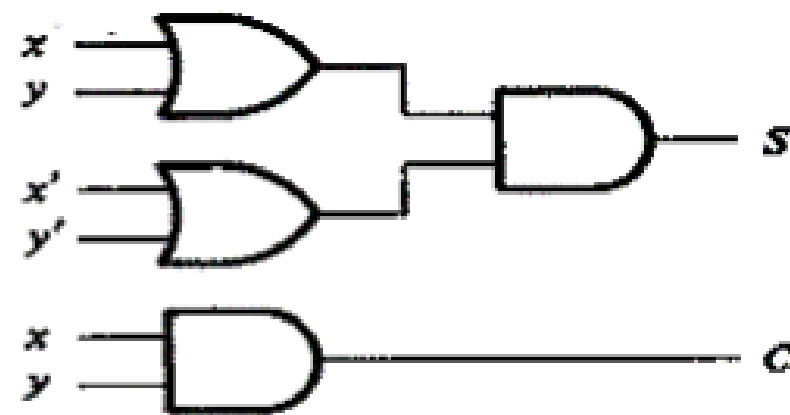
(β)

$$S' = xy + x'y'$$

$$S'' = S = (xy + x'y')' =$$

$$(x' + y')(x + y)$$

$$C = xy$$



(β) $S = (x + y)(x' + y')$
 $C = xy$

Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(γ)

$$S'' = S = (xy + x'y')'$$

$$S = (C + x'y')'$$

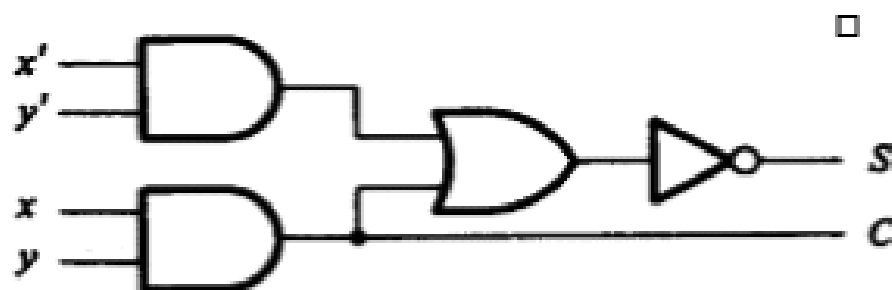
$$C = xy$$

(δ)

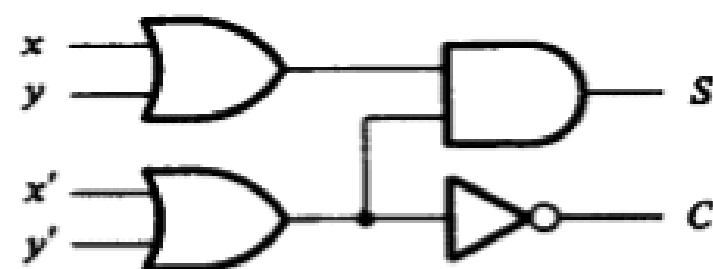
$$C = (xy)'' = (x' + y')'$$

$$S = (C + x'y')'$$

$$S = C'(x + y) = (x' + y')(x + y)$$



(γ) $S = (C + x'y')'$
 $C = xy$



(δ) $S = (x + y)(x' + y')$
 $C = (x' + y')$

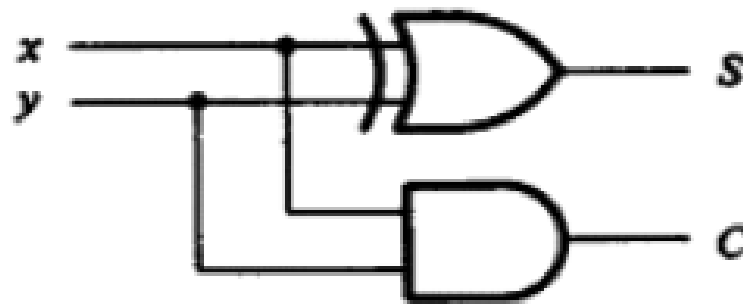
Ημι-Αθροιστής

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(ε)

$$S = x \oplus y$$

$$C = xy$$



(ε) $S = x \oplus y$
 $C = xy$

Πλήρης Αθροιστής (Full Adder)

1.Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να προσθέτει τρία δυαδικά ψηφία.

2.Πλήθος εισόδων/εξόδων: 3 είσοδοι – 2 έξοδοι.

3.Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x, y οι δύο είσοδοι (προσθετέοι), z το κρατούμενο της προηγούμενης βαθμίδας και C (κρατούμενο), S (άθροισμα) οι δύο έξοδοι.

4.Πίνακας αλήθειας:

x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Πλήρης-Αθροιστής

x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

S

	yz		y	
	00	01	11	10
x				
0		1		1
1	1		1	

$\underbrace{\hspace{10em}}_z$

C

	yz		y	
	00	01	11	10
x				
0			1	
1		1	1	1

$\underbrace{\hspace{10em}}_z$

$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz \Rightarrow$$

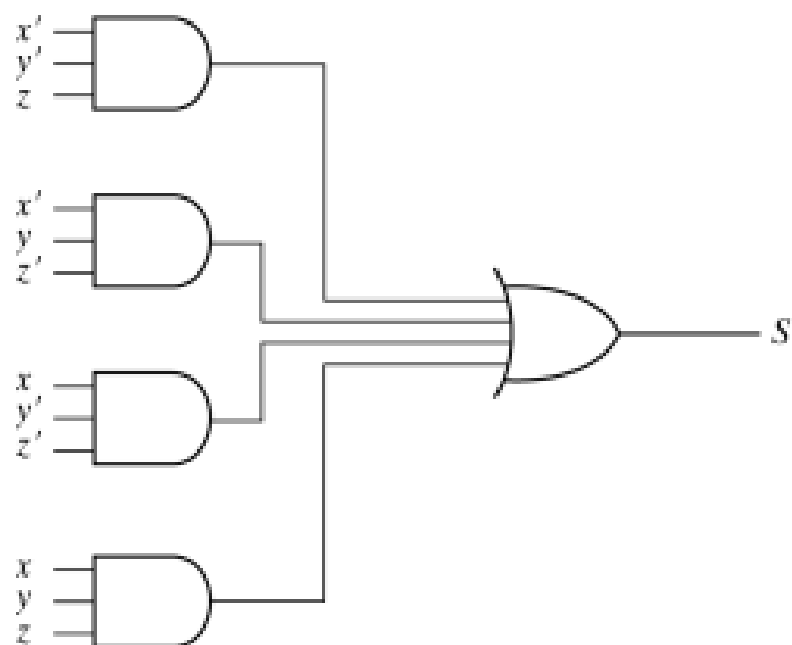
$$S = (x'y' + xy)z + (x'y + xy')z' \Rightarrow$$

$$S = (x \oplus y)'z + (x \oplus y)z' \Rightarrow$$

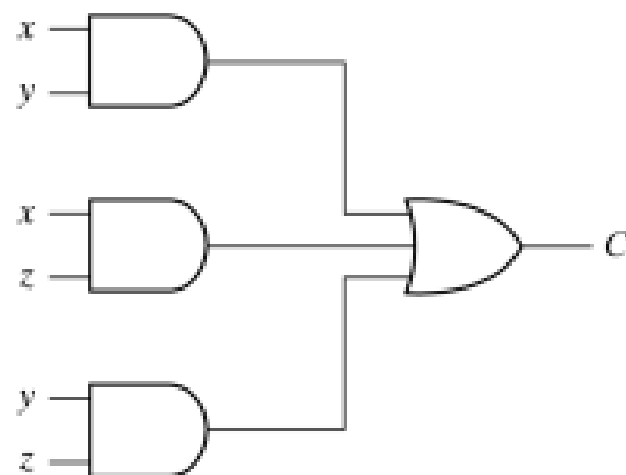
$$S = x \oplus y \oplus z$$

$$C = xy + yz + xz$$

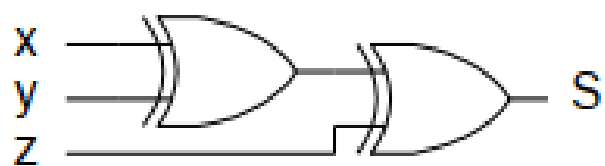
Πλήρης-Αθροιστής



$$S = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$



$$C = xy + yz + xz$$



$$S = x \oplus y \oplus z$$

Πλήρης-Αθροιστής

Ένας πλήρης αθροιστής μπορεί να υλοποιηθεί με δύο ημιαθροιστές και μία πύλη H .

$$S = x \oplus y \oplus z \qquad C = xy + yz + xz$$

Οι συναρτήσεις που υλοποιεί ο ημιαθροιστής HA_1 είναι εξ ορισμού:

$$S_1 = x \oplus y \qquad C_1 = xy \quad (HA_1 \text{ με εισόδους } x, y, \text{ εξόδους } S_1, C_1)$$

Το γενικό άθροισμα πρέπει να είναι $S = x \oplus y \oplus z = \underline{S_1} \oplus z$

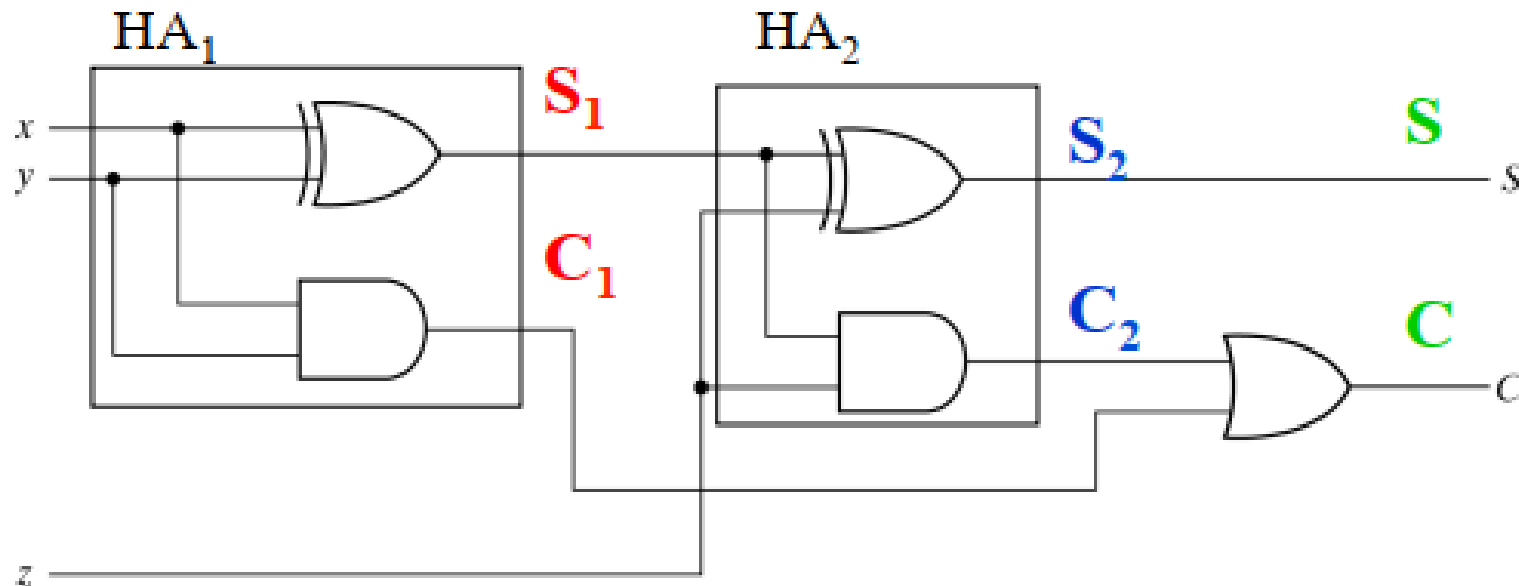
Το γενικό κρατούμενο πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} C &= xy + yz + xz = xy + (x + x')yz + x(y + y')z = xy + xyz + x'yz + xyz + xy'z = \\ &= xy + xyz + (x'yz + xy'z) + xyz = xy + xyz + (x \oplus y)z = xy(1 + z) + (x \oplus y)z = \\ &= xy + (x \oplus y)z = C_1 + \underline{S_1}z. \end{aligned}$$

Πλήρης-Αθροιστής

$$\begin{array}{c|c|c} \mathbf{S_1} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} & \mathbf{S_2} = \mathbf{S_1} \oplus \mathbf{z} & \mathbf{S} = \mathbf{S_2} \\ \mathbf{C_1} = \mathbf{xy} & \mathbf{C_2} = \mathbf{S_1 z} & \mathbf{C} = \mathbf{C_1} + \mathbf{C_2} \end{array}$$

Αν ο 2^{ος} ημιαθροιστής έχει εισόδους S_1 , z , και εξόδους S_2 , C_2 τότε το S_2 είναι το γενικό άθροισμα αφού $S_2 = S_1 \oplus z = S$, ενώ το κρατούμενο του είναι $C_2 = S_1 z$ οπότε το γενικό κρατούμενο γίνεται $C = C_1 + C_2$ (HA₂ με εισόδους S_1, z , εξόδους S_2, C_2)



Ημι-Αφαιρέτης (Half Subtractor)

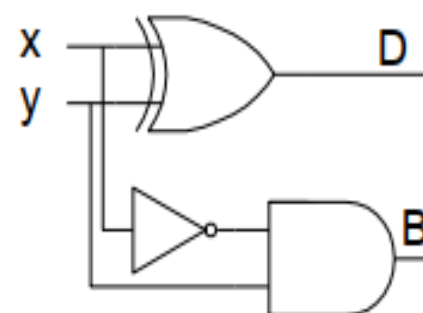
1. Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να αφαιρεί δύο δυαδικά ψηφία ($x - y$).

2. Πλήθος εισόδων/εξόδων: 2 εισοδοι – 2 εξοδοι.

3. Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x, y οι δύο εισοδοι και B (δανεικό-κρατούμενο), D (διαφορά) οι δύο εξοδοι.

4. Πίνακας αλήθειας:

x	y	B	D
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0



5. Απλοποίηση συναρτήσεων: $D = x'y + xy' = x \oplus y$, $B = x'y$

Πλήρης Αφαιρέτης (Full Subtractor)

1. Καθορισμός προβλήματος: κύκλωμα που να αφαιρεί δύο δυαδικά ψηφία και να λαμβάνει υπόψη πιθανό δανεικό από την προηγούμενη βαθμίδα.

2. Πλήθος εισόδων/εξόδων: 3 είσοδοι – 2 έξοδοι.

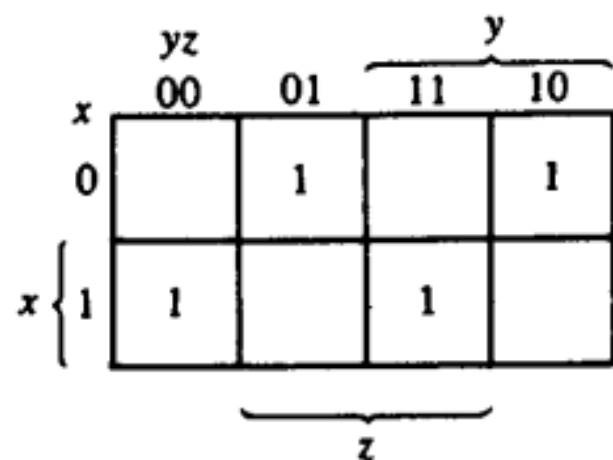
3. Ονομασία εισόδων/εξόδων: έστω x , y , z οι τρεις είσοδοι (μειωτέος, αφαιρετέος, δανεικό), και B (δανεικό-κρατούμενο), D (διαφορά) οι δύο έξοδοι.

4. Πίνακας αλήθειας: $x-y-z$

x	y	z	B	D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

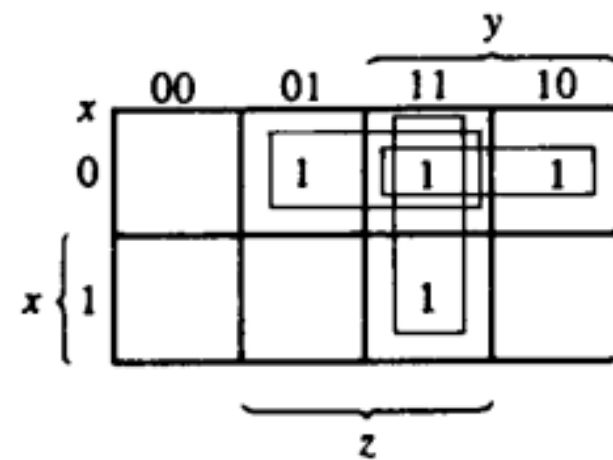
Πλήρης Αφαιρέτης

x	y	z	B	D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



$$D = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$$

$$D = x \oplus y \oplus z$$



$$B = x'y + x'z + yz$$

Η συνάρτηση D είναι ίδια με τη συνάρτηση S του πλήρη αθροιστή.

Πλήρης Αφαιρέτης

Η δυαδική αφαίρεση δεν
γίνεται με τον κλασσικό
τρόπο



Χρήση αριθμητικής
συμπληρωμάτων ως
προς 2

Παράδειγμα: 13-6

$$13 = 00001101$$

$$6 = 00000110 \Rightarrow -6 = 11111010$$

$$13 - 6 = 13 + (-6)$$

$$00001101 - 00000110 =$$

$$00001101 + 11111010 =$$

$$(1)00000111 = +7$$

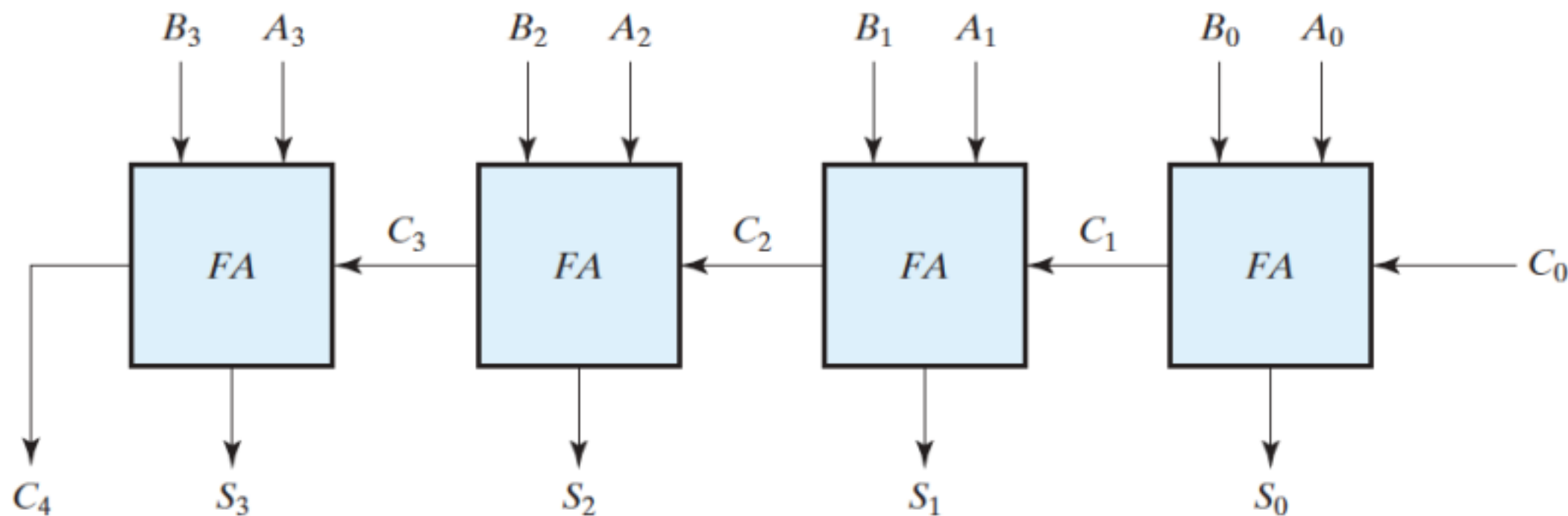
*Η σημασία των
αθροιστών
είναι μεγάλη!!*

Δυαδικός Αθροιστής

Δείκτης i	4	3	2	1	
Κρατούμενο εισόδου	0	1	1	0	C_i
Προσθετέος	1	0	1	1	A_i
Προσθετέος	0	0	1	1	B_i
Άθροισμα	1	1	1	0	S_i
Κρατούμενο εξόδου	0	0	1	1	C_{i+1}

Το άθροισμα δύο δυαδικών αριθμών των n bits
μπορεί να παραχθεί είτε σειριακά είτε παράλληλα.

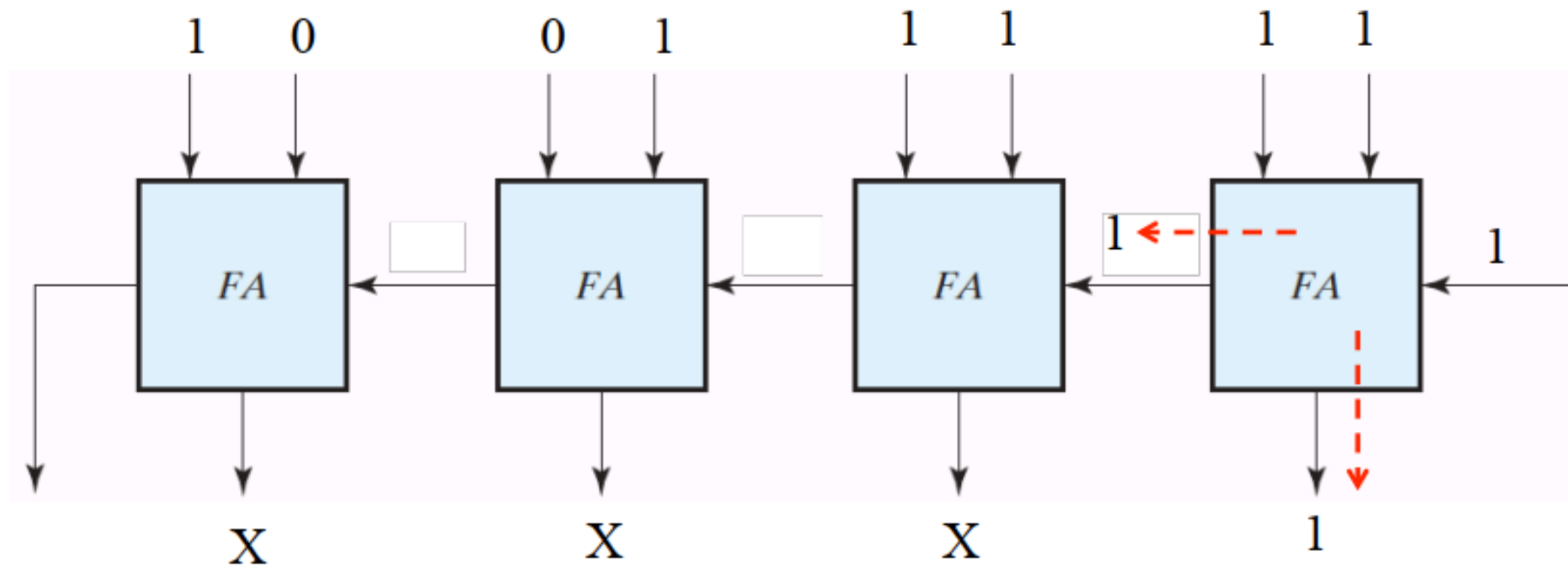
Παράλληλος Δυναδικός Αθροιστής



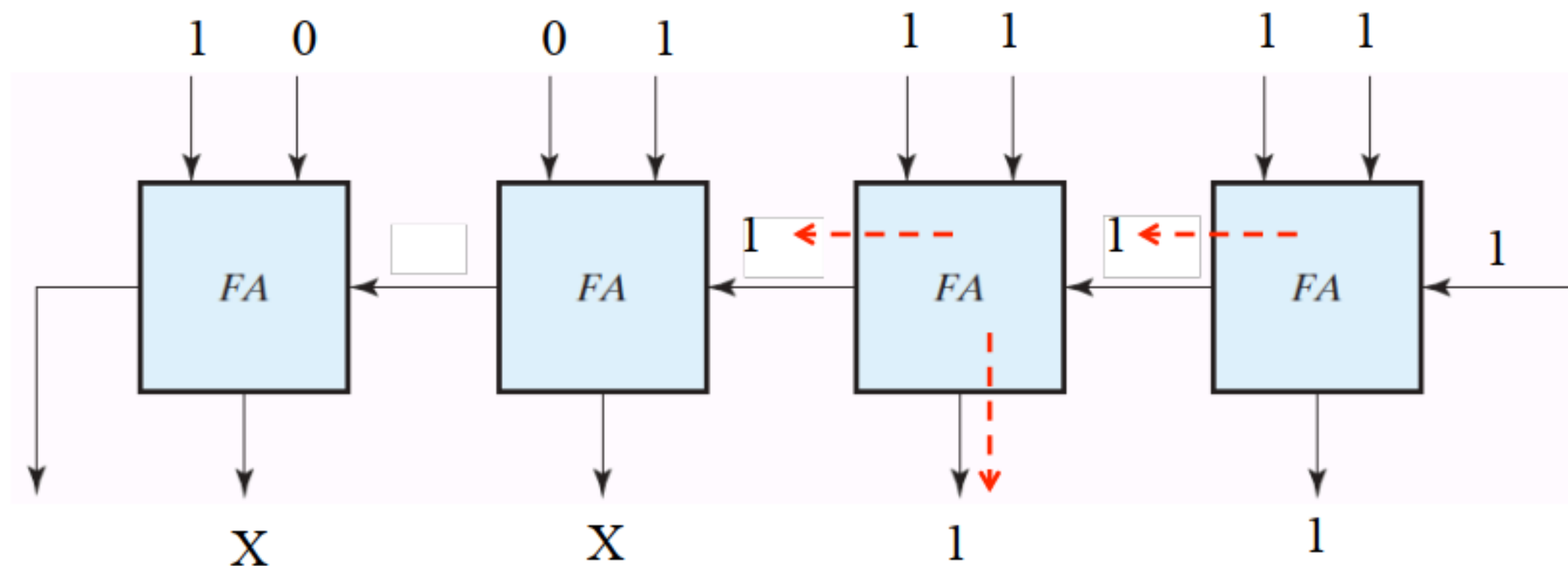
Ο Παράλληλος Αθροιστής αποτελείται από n πλήρεις αθροιστές και παράγει το αποτέλεσμα σε 1 κύκλο ρολογιού.

Υλοποίηση με συναρτήσεις: Πίνακας αλήθειας με 9 εισόδους και $2^9=512$ καταστάσεις.

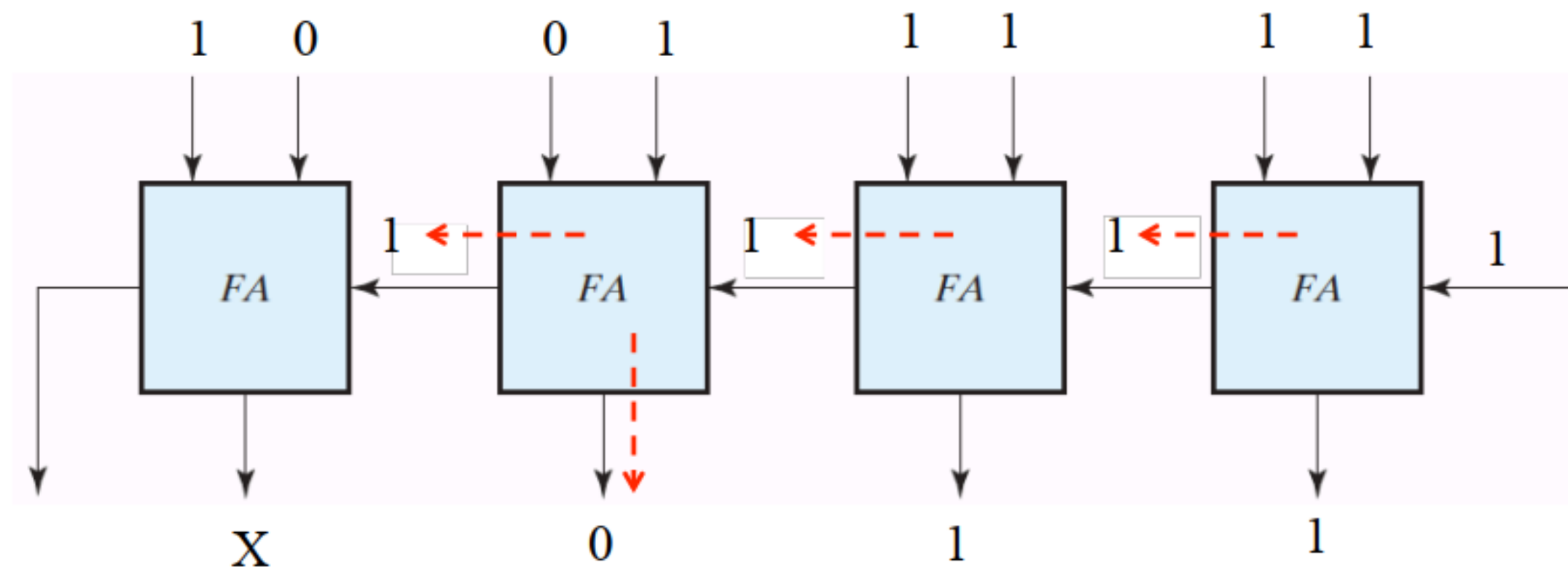
Παράδειγμα



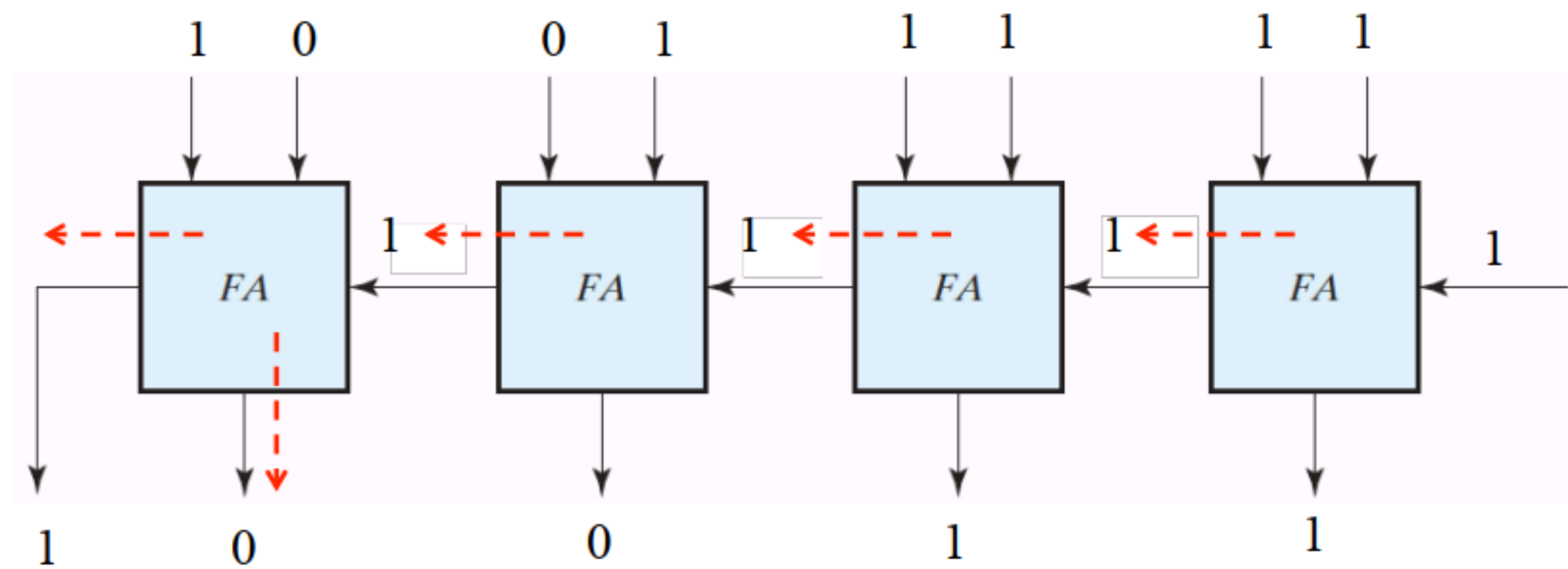
Παράδειγμα



Παράδειγμα

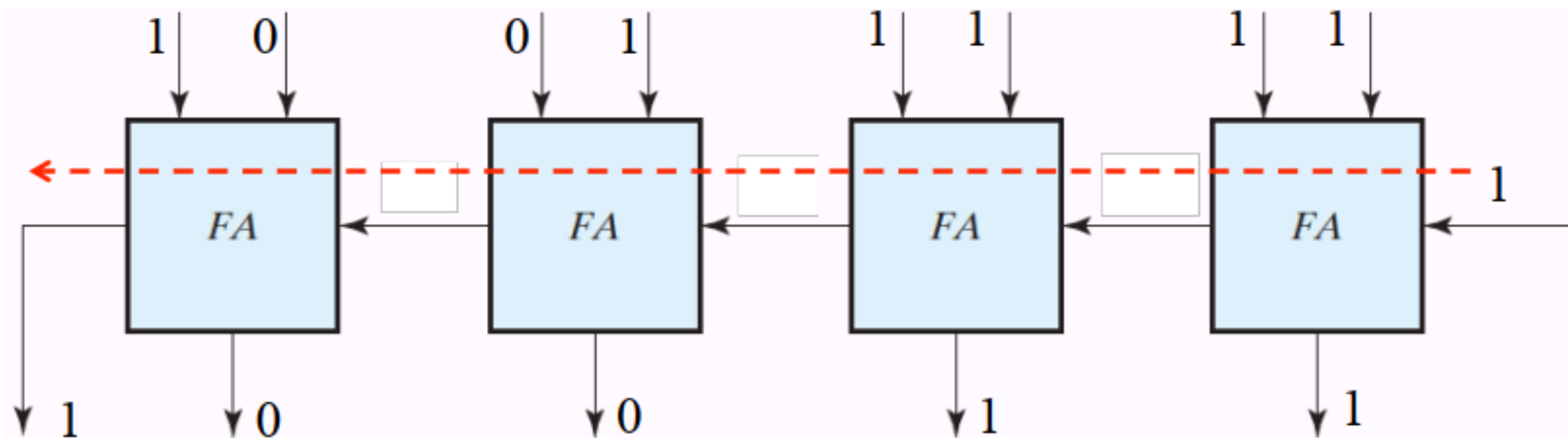


Παράδειγμα



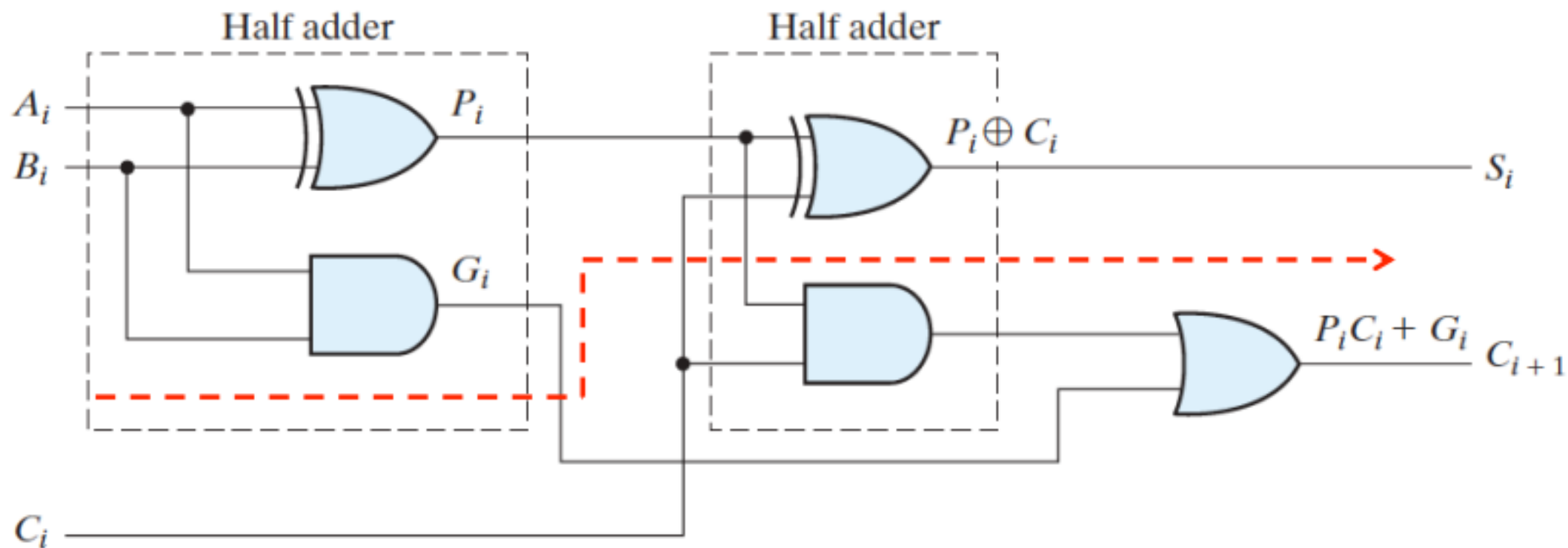
Διάδοση Κρατουμένου

Η διάδοση του κρατουμένου έχει καθυστέρηση η οποία αυξάνει με την αύξηση των βαθμίδων



Χρόνος Διάδοσης): Επίπεδα Πυλών × Καθυστέρηση Πύλης

Διάδοση Κρατουμένου



- 2 επίπεδα πυλών για κάθε διάδοση κρατουμένου.
- $2 \times n$ επίπεδα για τον παράλληλο αθροιστή n bits.

Διάδοση Κρατουμένου

Ο χρόνος διάδοσης
κρατουμένου είναι πολύ
μεγάλος.



Η πρόσθεση είναι η
συχνότερη πράξη.

Μείωση χρόνου
διάδοσης
κρατουμένου.

Χρήση γρηγορότερων πυλών (άνω όριο).



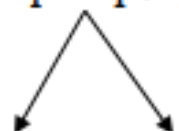
Αύξηση πολυπλοκότητας κυκλώματος
(πρόβλεψη κρατουμένου).

Χρειαζόμαστε γρήγορους αθροιστές

Πρόβλεψη Κρατούμενου (Carry Look-Ahead)

a_i	b_i	c_i	c_{i+1}	s_i		
0	0	0	0	0	Διαγραφφή	$d=a_i \cdot b_i$
0	0	1	0	1		
0	1	0	0	1	Διάδοση	$p=a_i \oplus b_i$
0	1	1	1	0		
1	0	0	0	1		
1	0	1	1	0		
1	1	0	1	0	Παραγωγή	$g=a_i \uparrow b_i$
1	1	1	1	1		

$$c_{i+1} = a_i b_i + c_i (a_i \oplus b_i)$$


$$c_{i+1} = g_i + p_i c_i \quad s_i = p_i \oplus c_i$$

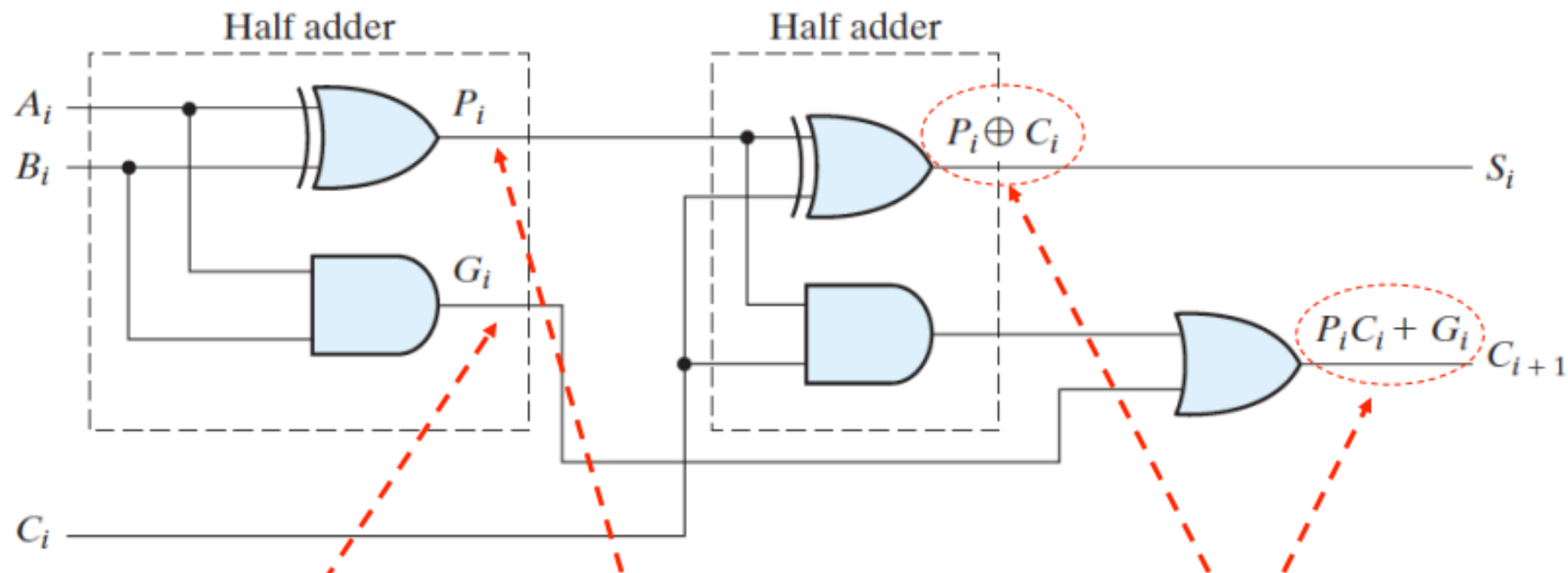
Παρατήρηση:

Όταν $a_i = b_i$ τότε $p = 0$ και το κρατούμενο είτε διαγράφεται είτε παράγεται



Δεν χρειάζεται αναμονή για το προηγούμενο κρατούμενο

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)



$$G_i = A_i B_i$$



Γεννητής
Κρατουμένου

$$P_i = A_i \oplus B_i$$



Διαδοτής
Κρατουμένου

Άθροισμα και
κρατούμενο παράγονται
από τα P , G και το
προηγούμενο κρατούμενο

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)

$$\begin{aligned}C_2 &= G_1 + P_1 C_1 \\C_3 &= G_2 + P_2 C_2 = G_2 + P_2(G_1 + P_1 C_1) = G_2 + P_2 G_1 + P_2 P_1 C_1 \\C_4 &= G_3 + P_3 C_3 = \dots = G_3 + P_3 G_2 + P_3 P_2 G_1 + P_3 P_2 P_1 C_1\end{aligned}$$



Η αναδρομικότητα
εισάγει την
καθυστέρηση και την
αναμονή των
κρατουμένων



Χωρίς αναδρομικότητα
έχουμε περισσότερο υλικό
αλλά δεν υπάρχει αναμονή
κρατουμένου

$$C_5 = G_4 + P_4 G_3 + P_4 P_3 G_2 + P_4 P_3 P_2 G_1 + P_4 P_3 P_2 P_1 G_0 + P_4 P_3 P_2 P_1 P_0 C_0$$

Πρόβλεψη Κρατουμένου (Carry Look-Ahead)

$$c_3 = g_2 + p_2 g_1 + p_2 p_1 g_0 + p_2 p_1 p_0 c_0$$

Παραγωγή
κρατουμένου στην
βαθμ. 2

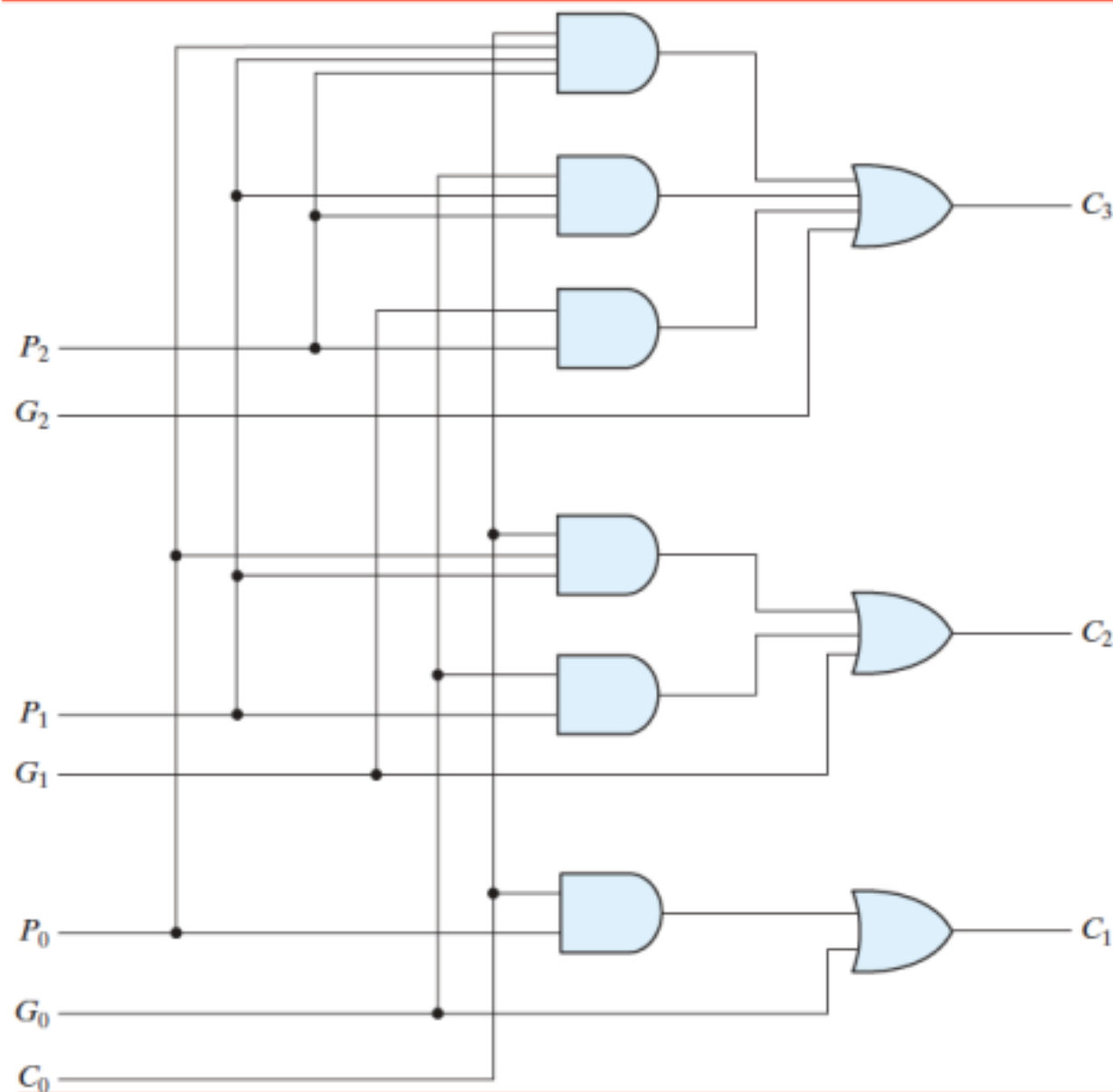
Διάδοση του κρατουμένου
εισόδου από τις βαθμ. 0, 1, 2

Παραγωγή κρατουμένου στην βαθμ.
0 και διάδοση από τις βαθμ. 1, 2

Παραγωγή κρατουμένου
στην βαθμ. 1 και διάδοση
από την βαθμ. 2

*Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε
να εκφράσουμε οποιοδήποτε
κρατούμενο.*

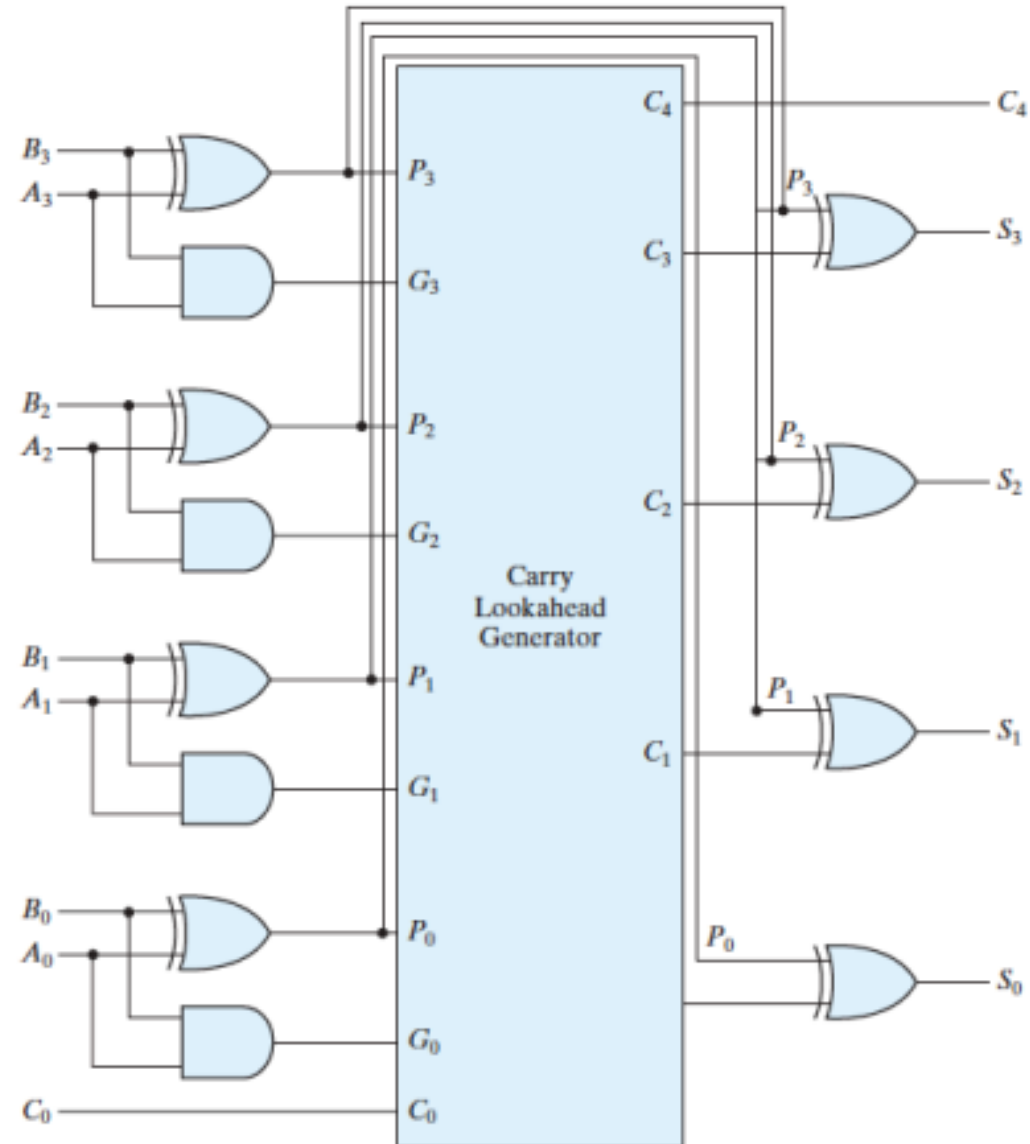
Γεννήτρια Πρόβλεψης Κρατουμένου



Τα ενδιάμεσα
κρατούμενα
χρειάζονται για την
παραγωγή των
αθροισμάτων

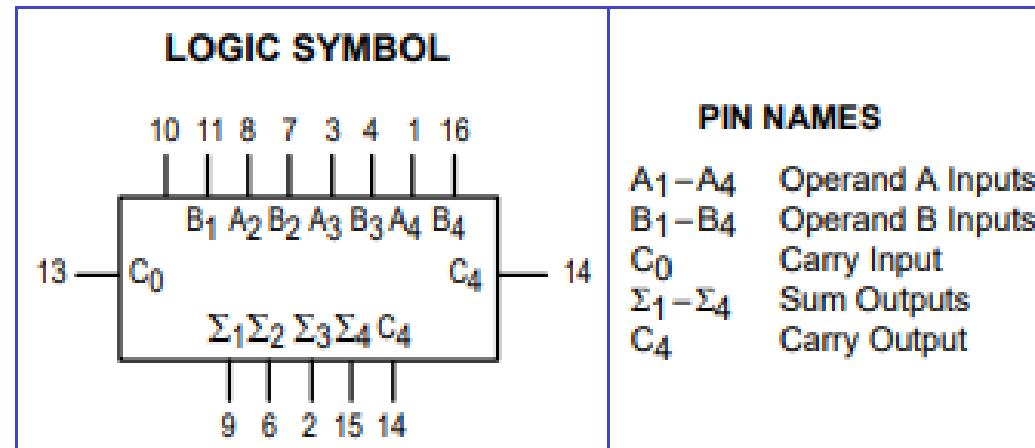
$$S_i = P_i \oplus C_i$$

Αθροιστής Πρόβλεψης Κρατουμένου



4-BIT BINARY FULL ADDER WITH CARRY LOOKAHEAD (74LS83)

The SN54/74LS83A is a high-speed 4-Bit binary Full Adder with internal carry lookahead. It accepts two 4-bit binary words ($A_1 - A_4$, $B_1 - B_4$) and a Carry Input (C_0). It generates the binary Sum outputs ($\Sigma_1 - \Sigma_4$) and the Carry Output (C_4) from the most significant bit. The LS83A operates with either active HIGH or active LOW operands (positive or negative logic).

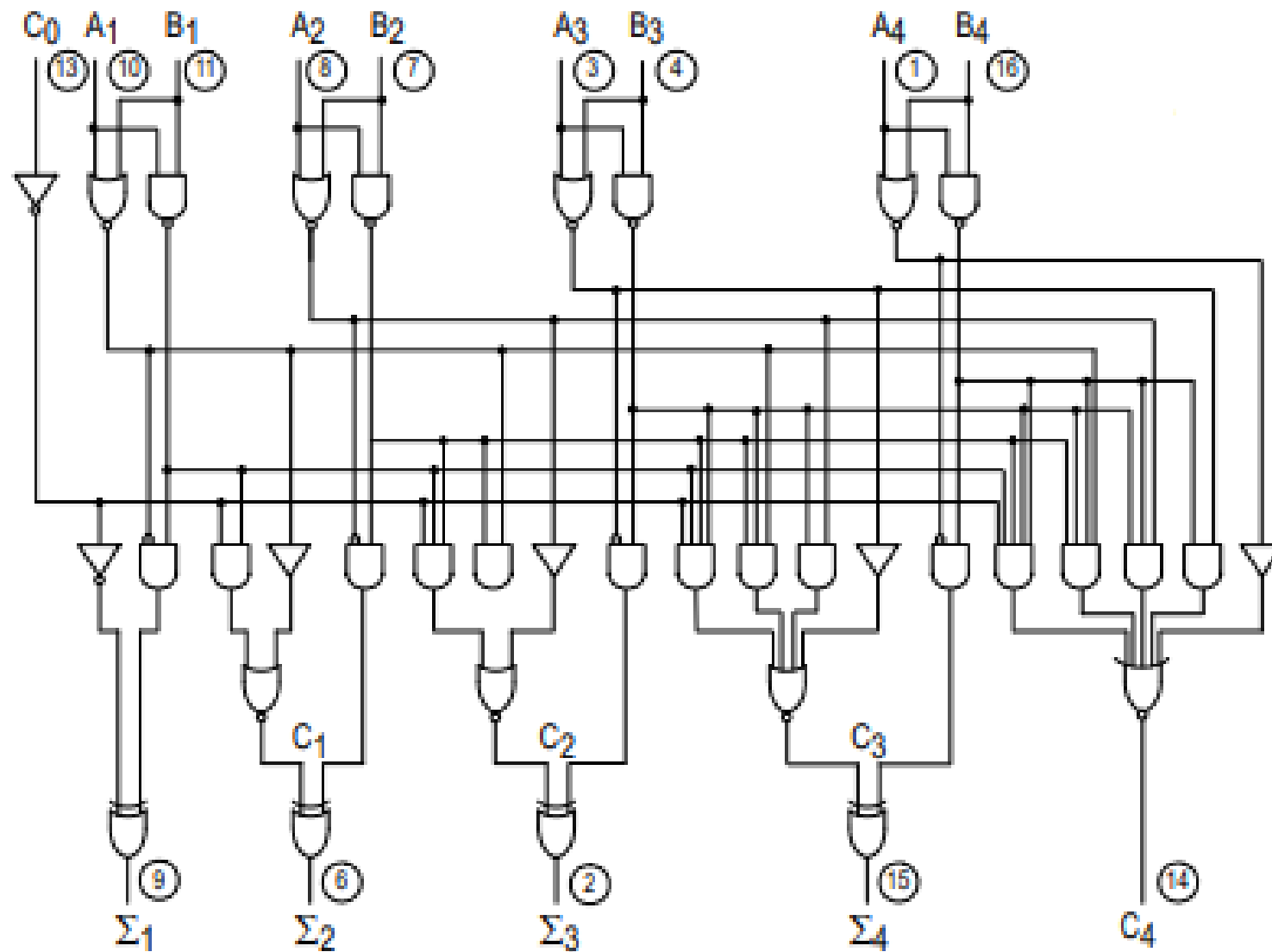


FUNCTIONAL TRUTH TABLE

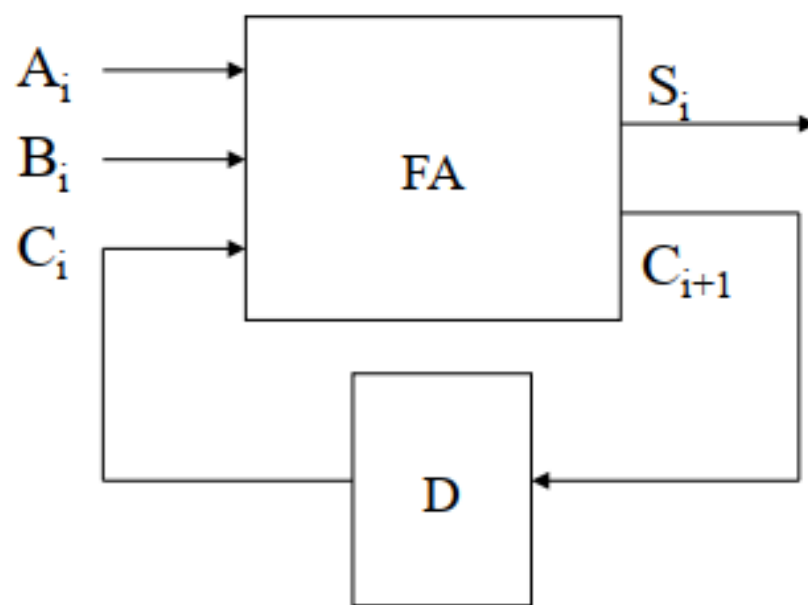
C (n-1)	A _n	B _n	Σ _n	C _n
L	L	L	L	L
L	L	H	H	L
L	H	L	H	L
L	H	H	L	H
H	L	L	H	L
H	L	H	L	H
H	H	L	L	H
H	H	H	H	H

4-BIT BINARY FULL ADDER WITH CARRY LOOKAHEAD (74LS83)

LOGIC DIAGRAM

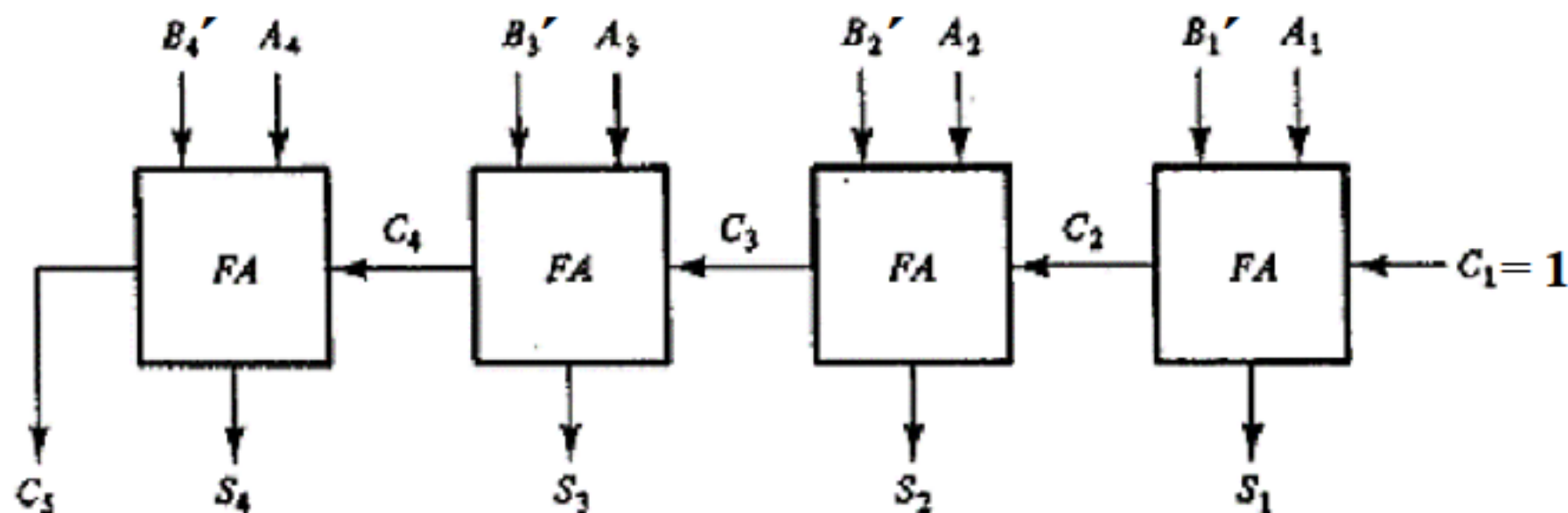


Σειριακός Δυναδικός Αθροιστής



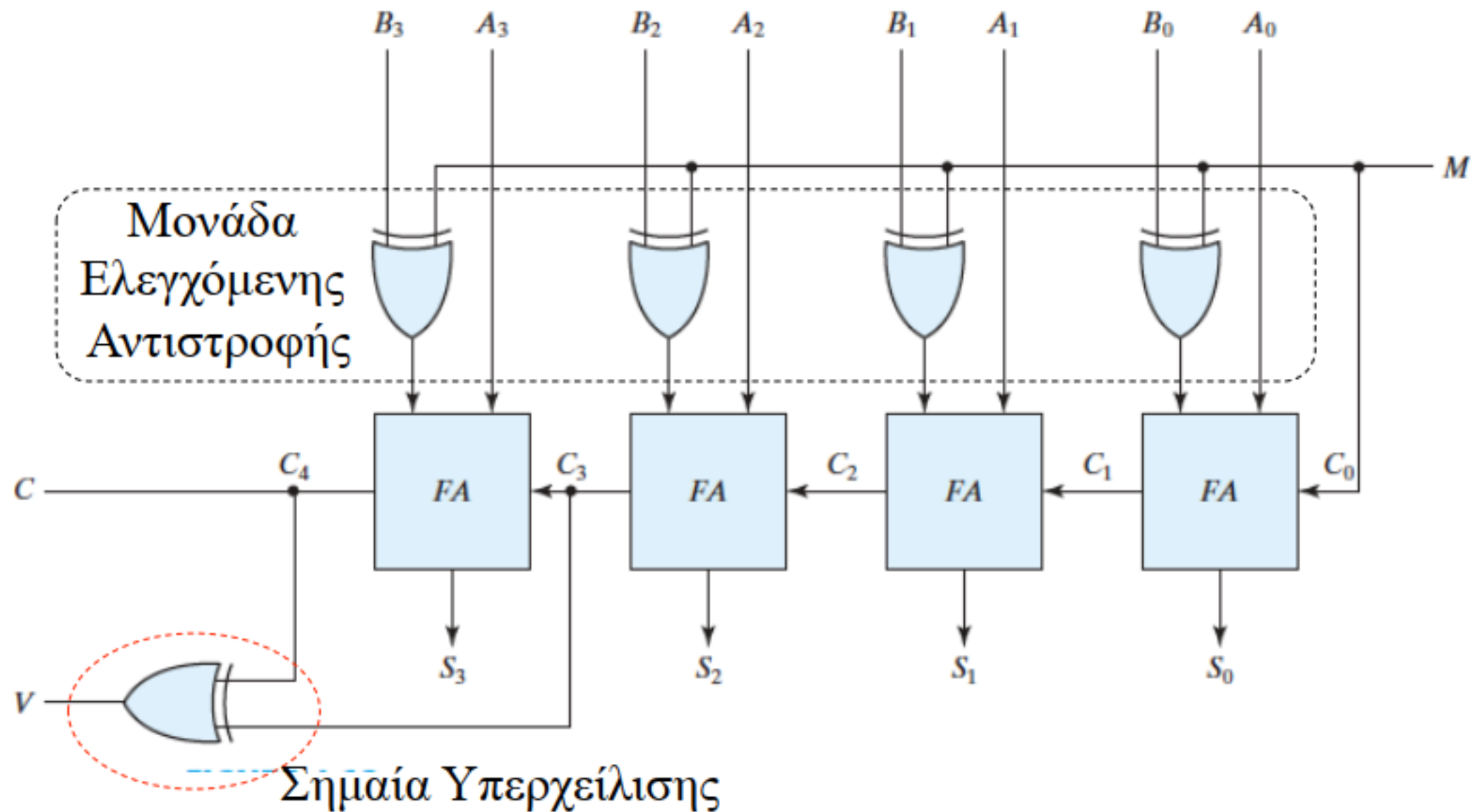
Ο Σειριακός Αθροιστής αποτελείται από 1 πλήρη αθροιστή και 1 στοιχείο μνήμης και παράγει το αποτέλεσμα σε n κύκλους ρολογιού.

Παράλληλος Δυαδικός Αφαιρέτης

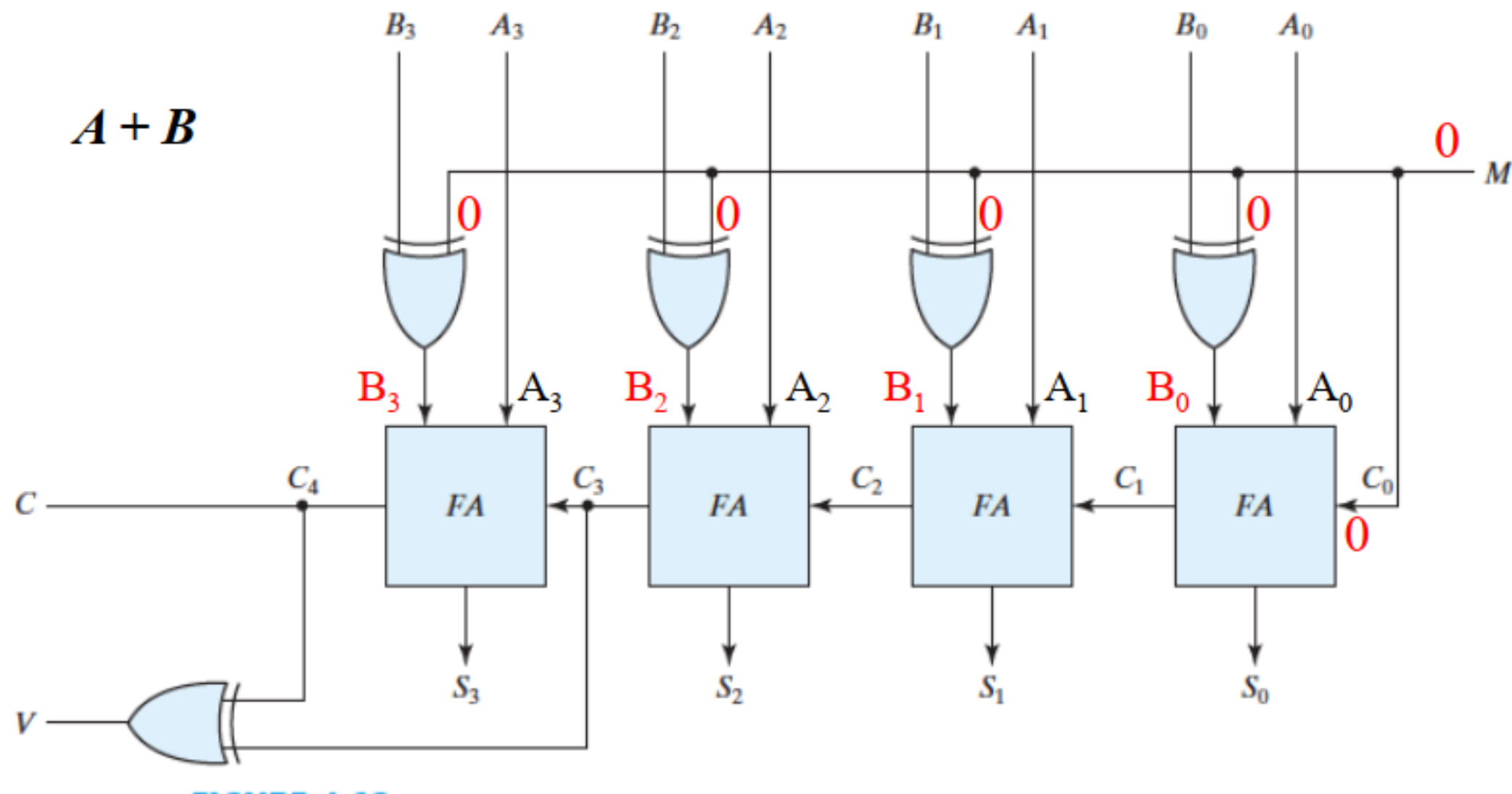


$$A - B = A + \text{συμπλήρωμα-2}(B) = A + B' + 1$$

Παράλληλος Δυαδικός Αθροιστής/Αφαιρέτης



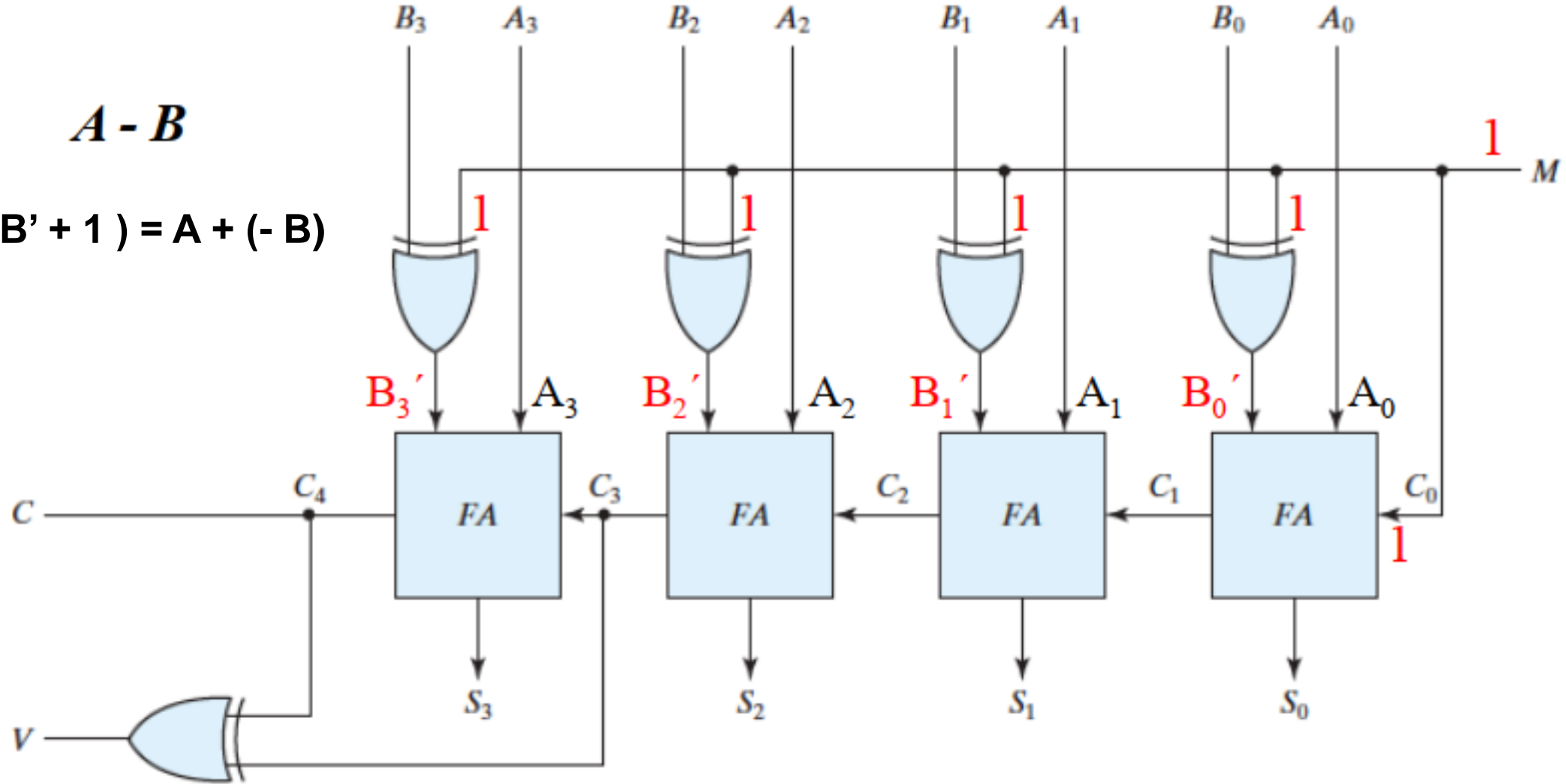
Παράδειγμα Πρόσθεσης



Παράδειγμα Αφαίρεσης

$A - B$

$$A + (B' + 1) = A + (-B)$$



Υπερχείλιση

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο δυαδικών αριθμών των n ψηφίων που απαιτεί $n+1$ ψηφία έχει υποστεί υπερχείλιση.



Σε ένα επεξεργαστικό σύστημα το αποτέλεσμα θα πρέπει να αποθηκευτεί σε n δυαδικά ψηφία (χάνεται το πιο σημαντικό ψηφίο)



Το επεξεργαστικό σύστημα πρέπει να ανιχνεύσει την υπερχείλιση



Ύψωση σημαίας υπερχείλισης (για προγραμματιστική χρήση)

Υπερχείλιση

Μη Προσημασμένος + Μη
Προσημασμένος

(κρατούμενο)



Προσημασμένος +
Προσημασμένος

(Xor 2 τελικών κρατουμένων)

Θετικός + Αρνητικός

Θετικός - Θετικός

Αρνητικός - Αρνητικός

Δεν είναι δυνατόν να
δώσουν υπερχείλιση

Παράδειγμα

Εστω προσημασμένοι αριθμοί των 8 δυαδικών ψηφίων σε αριθμητική συμπληρωμάτων ως προς 2

Εύρος: +127 ... -128

carries:

+70

+80

+150

0 1

0 1000110

0 1010000

1 0010110



-106

carries:

-70

-80

-150

1 0

1 0111010

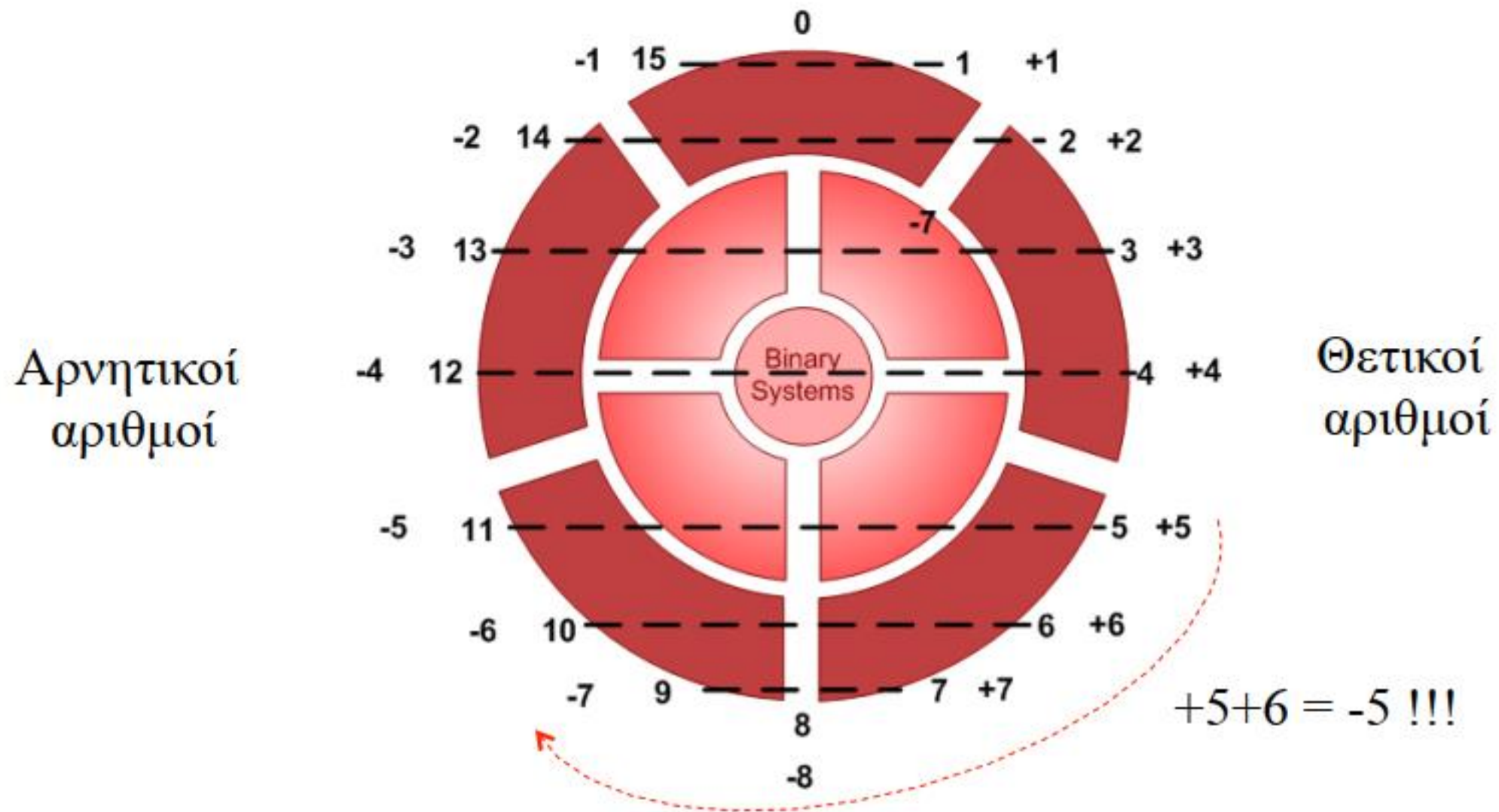
1 0110000

0 1101010



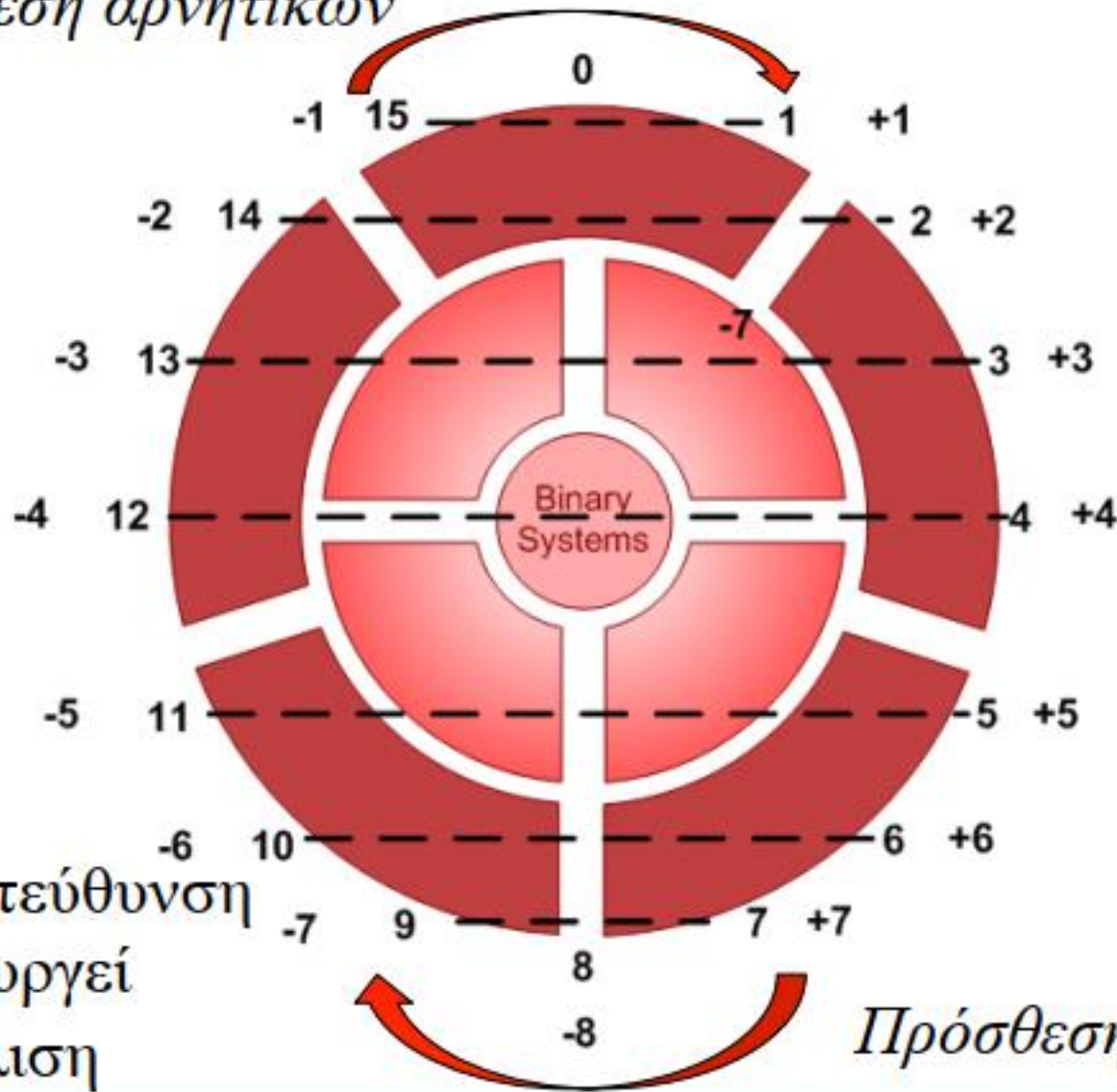
+106

Παράδειγμα



Παράδειγμα

Πρόσθεση αρνητικών



Η ανάποδη κατεύθυνση
δεν δημιουργεί
υπερχείλιση

Πρόσθεση Θετικών

Δεκαδικός Αθροιστής

Ένα ψηφιακό σύστημα που εκτελεί αριθμητικές πράξεις στο δεκαδικό σύστημα αναπαριστά τα ψηφία με κάποιο δυαδικό κώδικα (πχ Calculator).



Ένας αθροιστής για ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιεί αριθμητικά κυκλώματα που δέχονται κωδικοποιημένους δεκαδικούς αριθμούς και παρουσιάζει τα αποτελέσματα στον κατάλληλο κώδικα.



Ένας δεκαδικός αθροιστής δύο ψηφίων απαιτεί $4+4+1=9$ εισόδους και $4+1=5$ εξόδους αφού κάθε ψηφίο κωδικοποιείται με 4 bit και χρειαζόμαστε επίσης κρατούμενα εισόδου/εξόδου.

Δεκαδικός Αθροιστής

Τρόποι υλοποίησης:

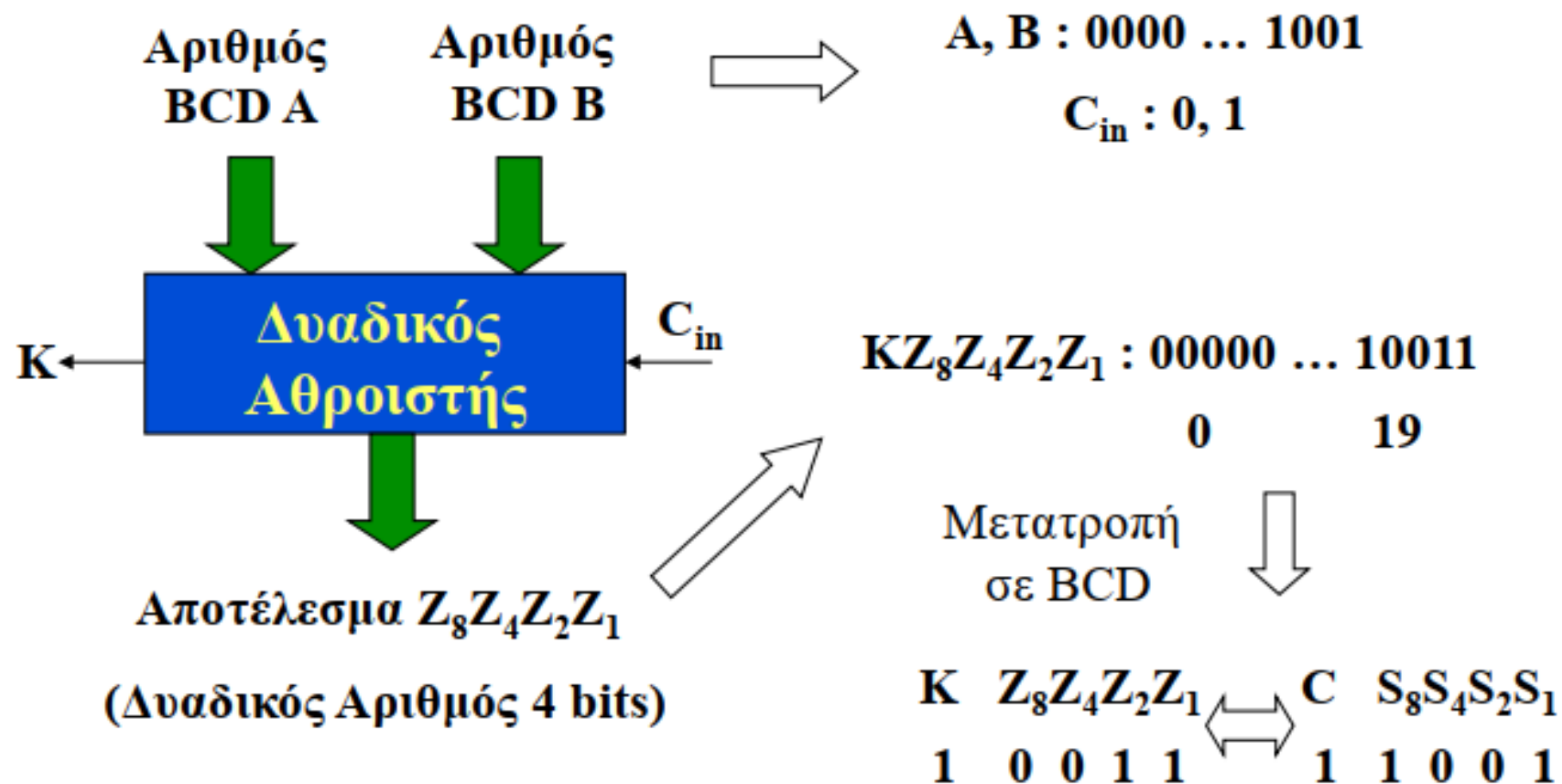
A) Σχεδιασμός συνδυαστικού κυκλώματος με 9 εισόδους και 5 εξόδους (512 δυνατοί συνδυασμοί στις εισόδους).



B) Υλοποίηση με κυκλώματα πλήρη αθροιστή λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι 6 συνδυασμοί σε κάθε είσοδο 4 bits δε χρησιμοποιούνται.

Δεκαδικός Αθροιστής

Αρχικά προσθέτουμε τους BCD αριθμούς A, B και παίρνουμε το άθροισμα τους το οποίο είναι ένας δυαδικός αριθμός (όχι BCD).



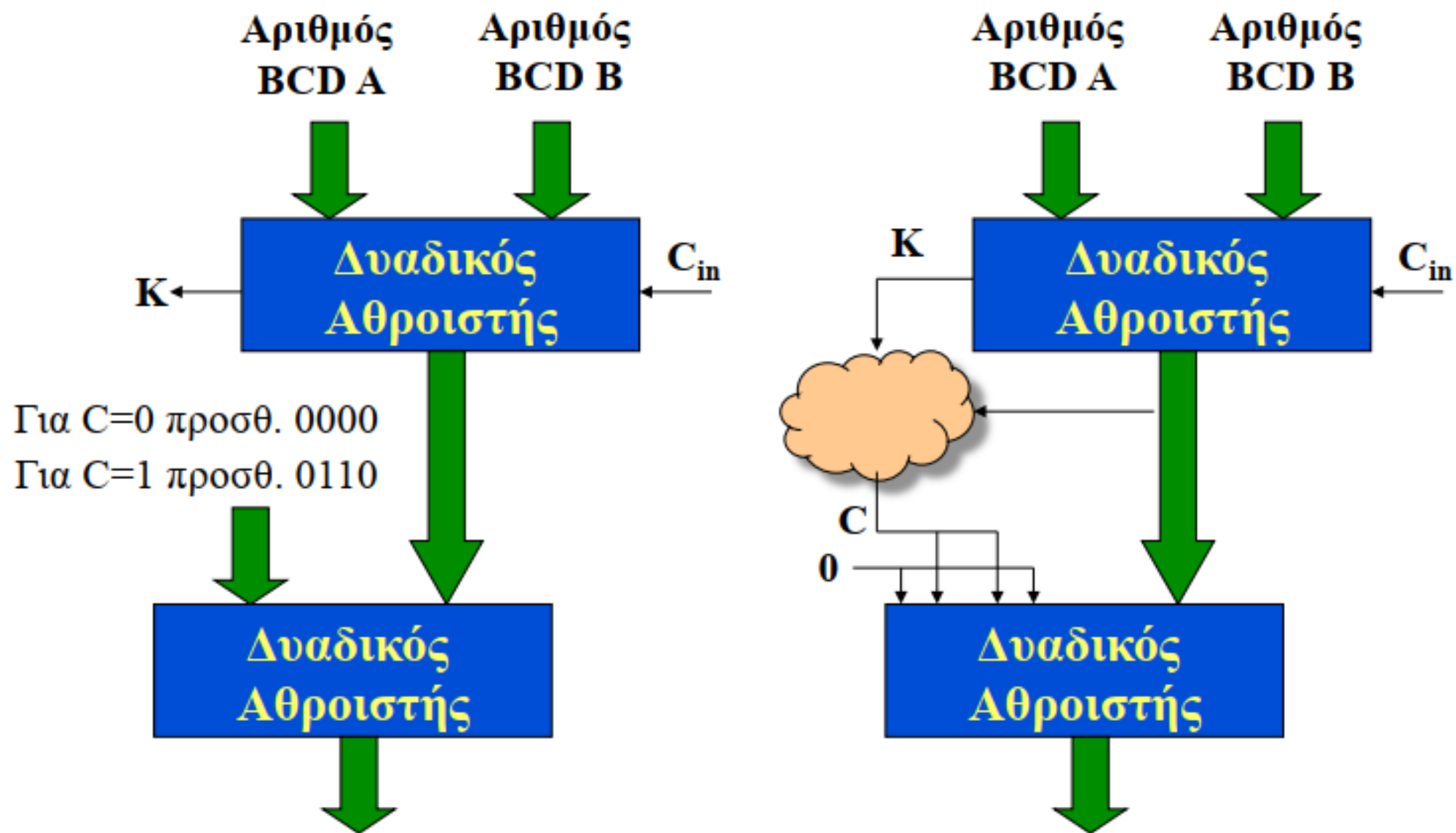
Αθροιστής BCD

Binary Sum					BCD Sum					Decimal
K	Z ₈	Z ₄	Z ₂	Z ₁	C	S ₈	S ₄	S ₂	S ₁	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	9
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	11
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	12
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	13
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	14
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	15
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	16
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	17
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	18
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	19

Δεν
απαιτείται
μετατροπή
σε BCD

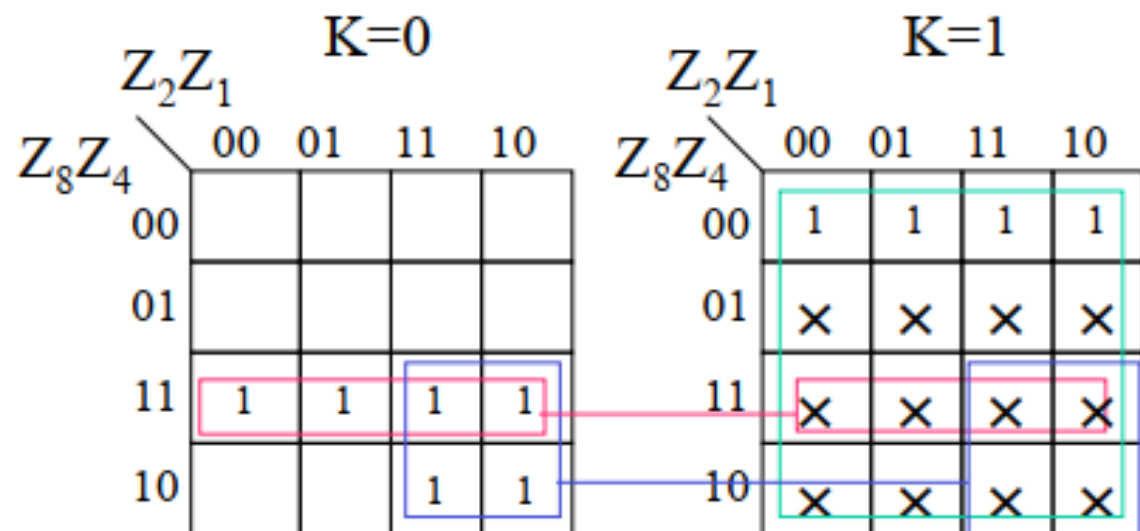
Απαιτείται
πρόσθεση
του +6

Αθροιστής BCD



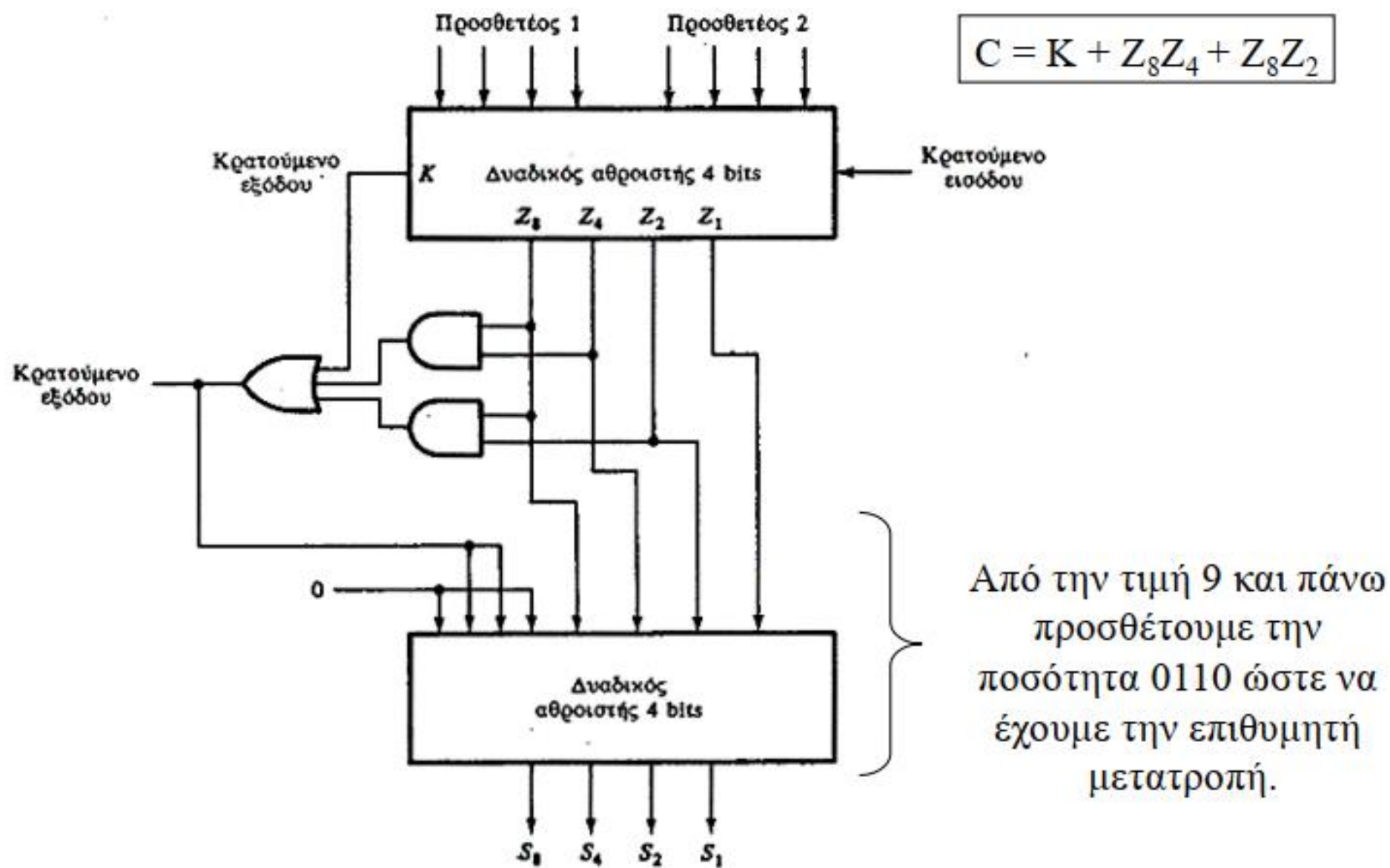
Αθροιστής BCD

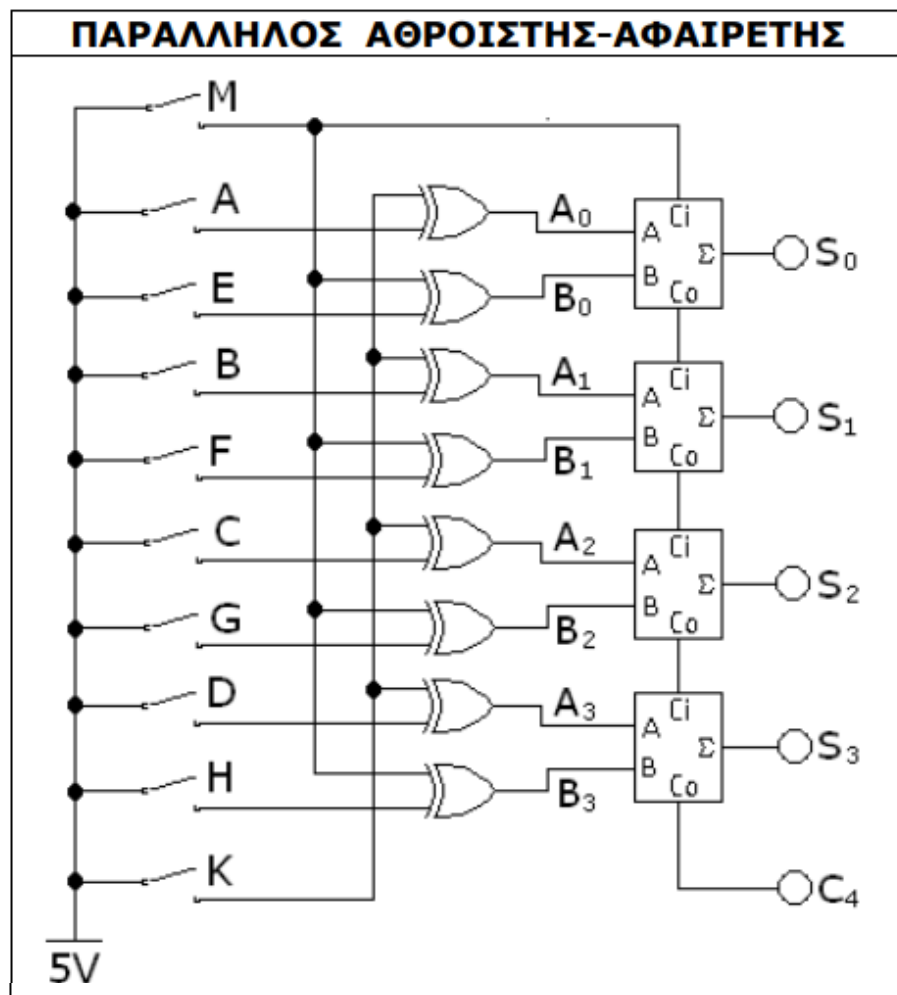
Binary Sum					
K	Z_8	Z_4	Z_2	Z_1	C
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1



$$C = K + Z_8Z_4 + Z_8Z_2$$

Αθροιστής BCD





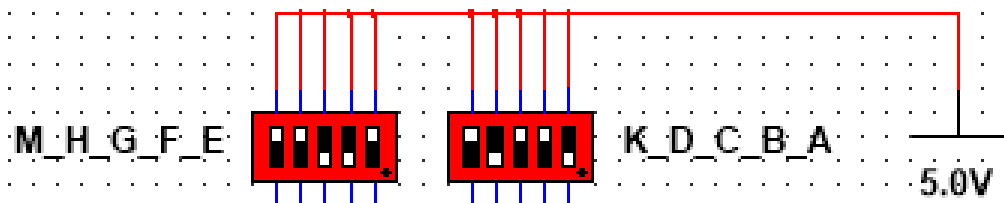
ΠΡΑΞΗ	KM	DCBA	HGFE	A ₃ A ₂ A ₁ A ₀	B ₃ B ₂ B ₁ B ₀	C ₄ S ₃ S ₂ S ₁ S ₀	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
9+6	00	1001	0110	1001	0110		
8+8	00	1000	1000	1000	1000		
11+9	00	1011	1001	1011	1001		
15+15	00	1111	1111	1111	1111		
13-8	01	1101	1000	1101	0111		
14-2	01	1110	0010	1110	1101		
7-10	01	0111	1010	0111	0101		
4-12	01	0100	1100	0100	0011		
-9-3	11	1001	0011	0110	1100		
-8-7	11	1000	0111	0111	1000		
-8-8	11	1000	1000	0111	0111		
-11-13	11	1011	1101	0100	0010		
-15-15	11	1111	1111	0000	0000		

1) Ο ΔΙΑΚΟΠΤΗΣ (K) ΕΛΕΓΧΕΙ ΤΑ A₀, A₁, A₂, A₃ ΕΝΩ Ο (M) ΤΑ B₀, B₁, B₂, B₃

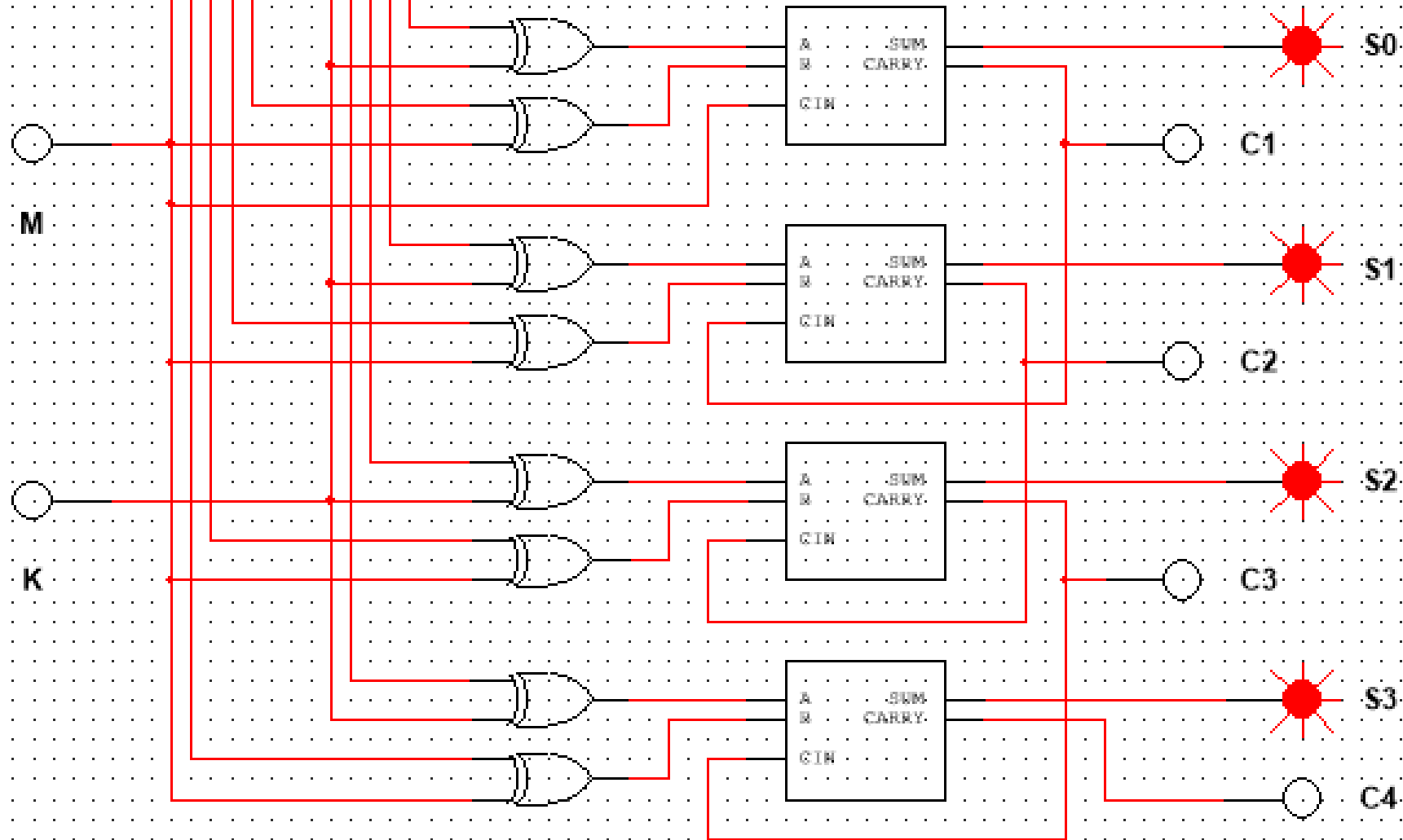
2) ΕΑΝ (K)=0 ΤΟΤΕ A₃A₂A₁A₀=DCBA, ΕΑΝ (K)=1 ΤΟΤΕ A₃A₂A₁A₀=D'C'B'A'

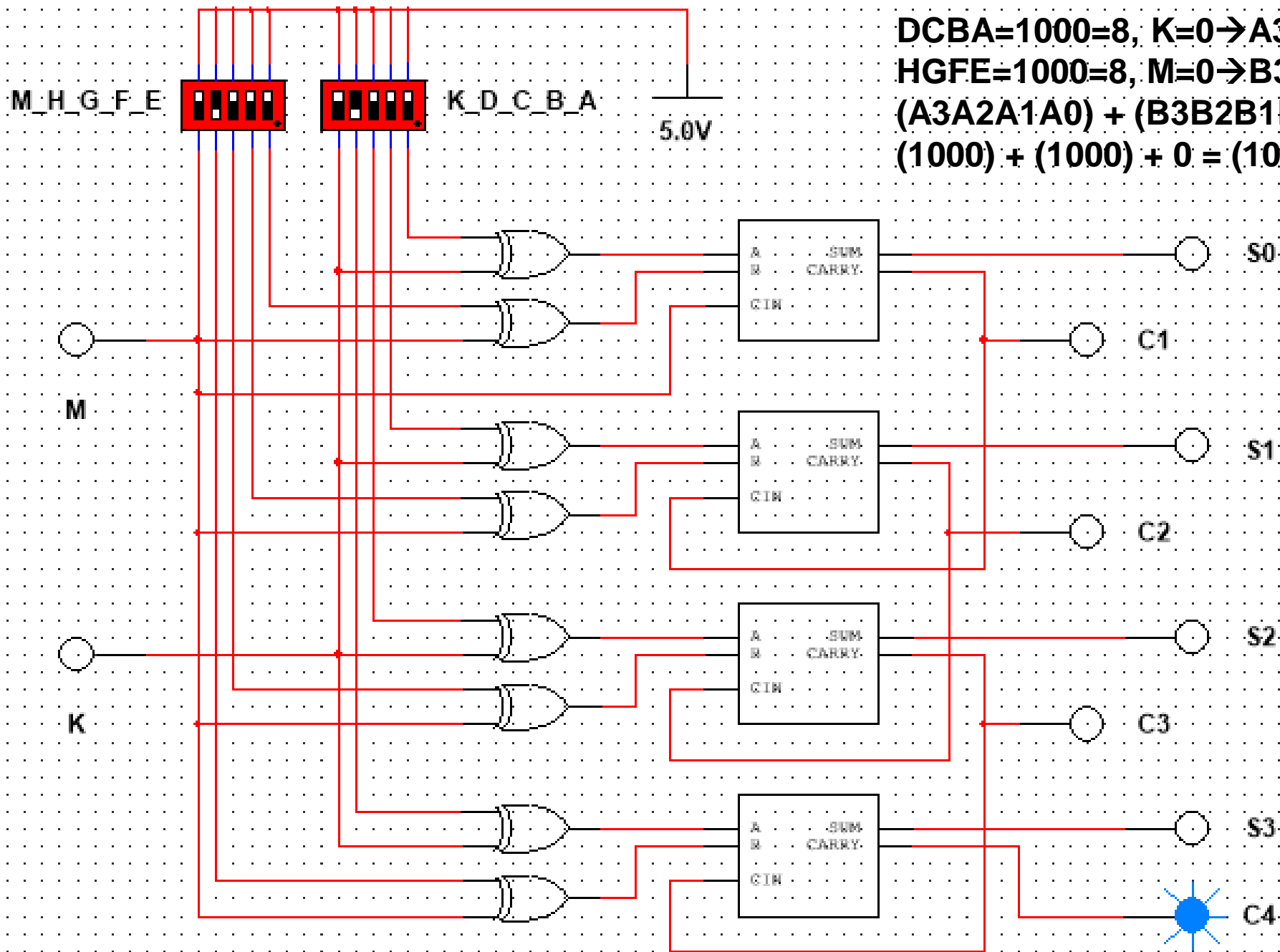
3) ΕΑΝ (M)=0 ΤΟΤΕ B₃B₂B₁B₀=HGFE, ΕΑΝ (M)=1 ΤΟΤΕ B₃B₂B₁B₀=H'G'F'E'

4) ΓΙΑ (K)=0 & (M)=0 ΕΚΤΕΛΕΙ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ (A₃A₂A₁A₀)+(B₃B₂B₁B₀)
ΔΗΛΑΔΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΥΟ ΘΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΓΙΑ (K)=0 & (M)=1 ΕΚΤΕΛΕΙ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ (A₃A₂A₁A₀)+(B₃B₂B₁B₀)+1
ΔΗΛΑΔΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 2
ΓΙΑ (K)=1 & (M)=1 ΕΚΤΕΛΕΙ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ (A₃A₂A₁A₀)+(B₃B₂B₁B₀)+1
ΔΗΛΑΔΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΥΟ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



DCBA=1001=9, K=0 \rightarrow A₃A₂A₁A₀=1001=9
 HGFE=0110=6, M=0 \rightarrow B₃B₂B₁B₀=0110=6
 (A₃A₂A₁A₀) + (B₃B₂B₁B₀) + M = (C₄S₃S₂S₁S₀)
 (1001) + (0110) + 0 = (01111) = 15



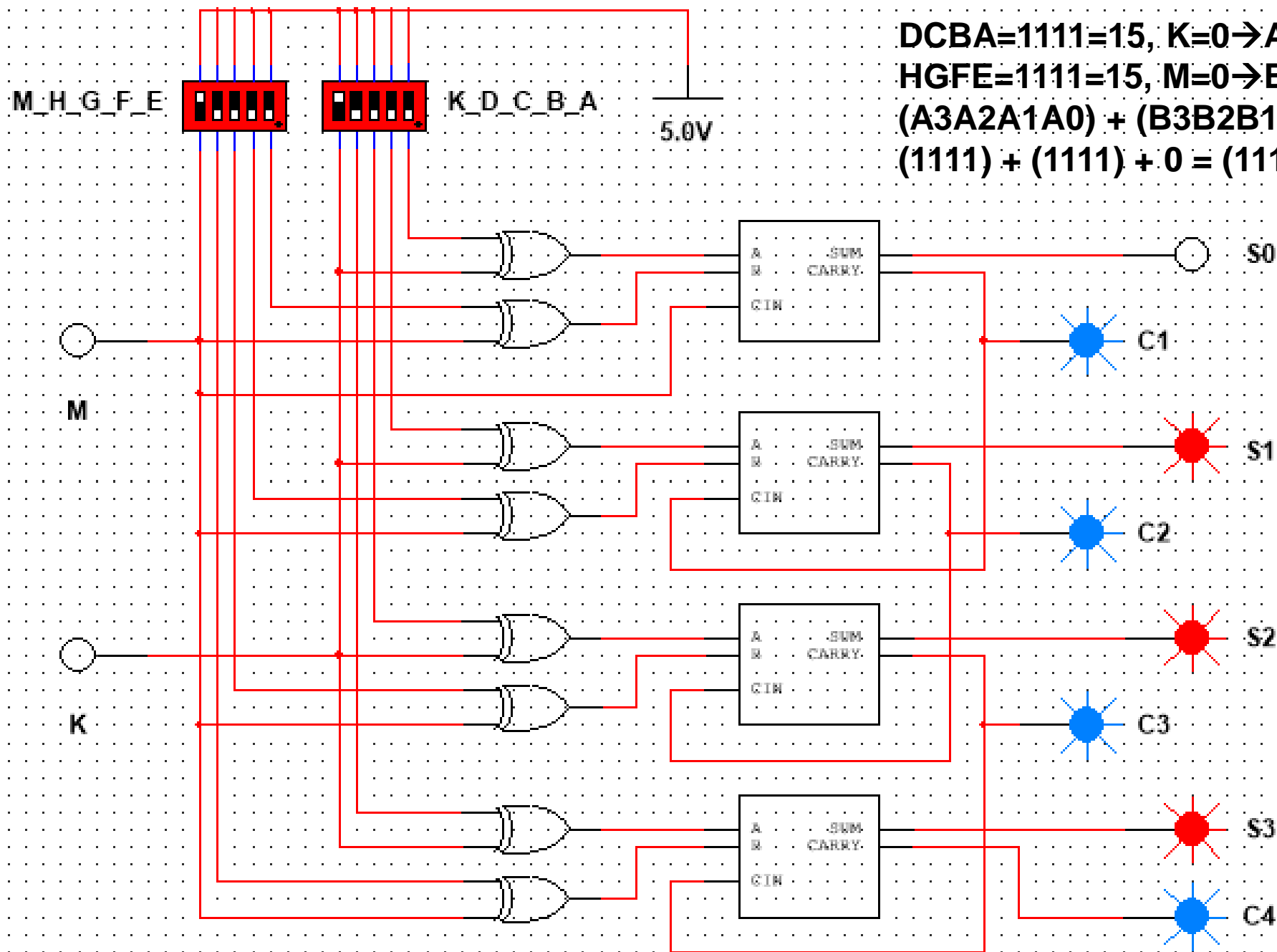


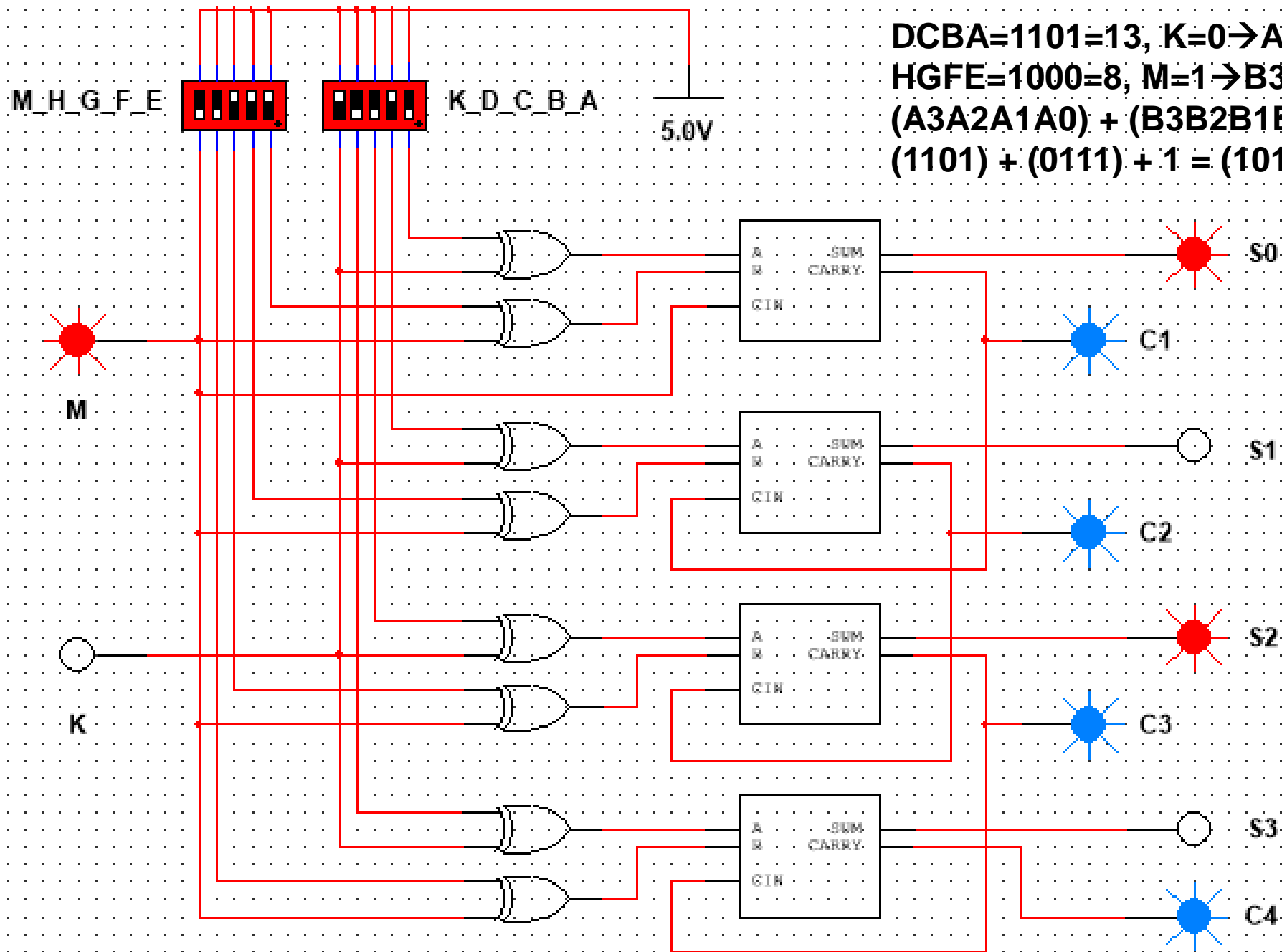
$DCBA=1000=8, K=0 \rightarrow A_3A_2A_1A_0=1000=8$

$HGFE=1000=8, M=0 \rightarrow B_3B_2B_1B_0=1000=8$

$(A_3A_2A_1A_0) + (B_3B_2B_1B_0) + M = (C_4S_3S_2S_1S_0)$

$(1000) + (1000) + 0 = (10000) = 16$





DCBA=1101=13, K=0 \rightarrow A3A2A1A0=1101=13

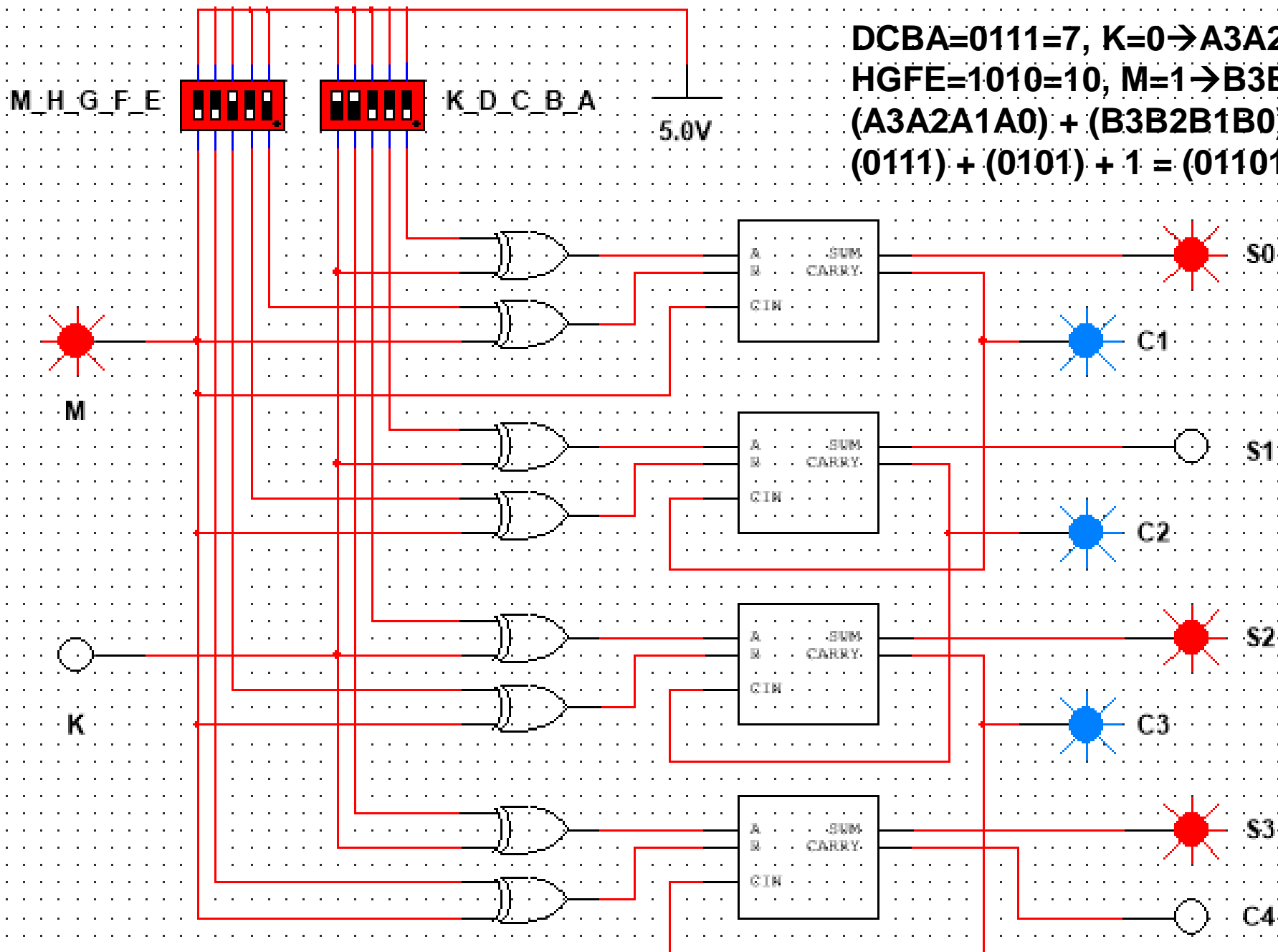
HGFE=1000=8, M=1 \rightarrow B3B2B1B0=0111=-8 (1's Compl.)

(A3A2A1A0) + (B3B2B1B0) + M = (C4S3S2S1S0)

(1101) + (0111) + 1 = (10101) = +(0101) = +(4+1) = +5 > 0

13 - 8 = 5 > 0 \Rightarrow C4 = 1
 Ignore or Discard C4
 Αποτέλεσμα = S3S2S1S0

Το κύκλωμα εκτελεί την
 πράξη: $A + B' + 1 = A - B$,
 (αφαίρεση με χρήση του
 συμπληρώματος
 ως προς δύο)



DCBA=0111=7, K=0 \rightarrow A3A2A1A0=0111=7

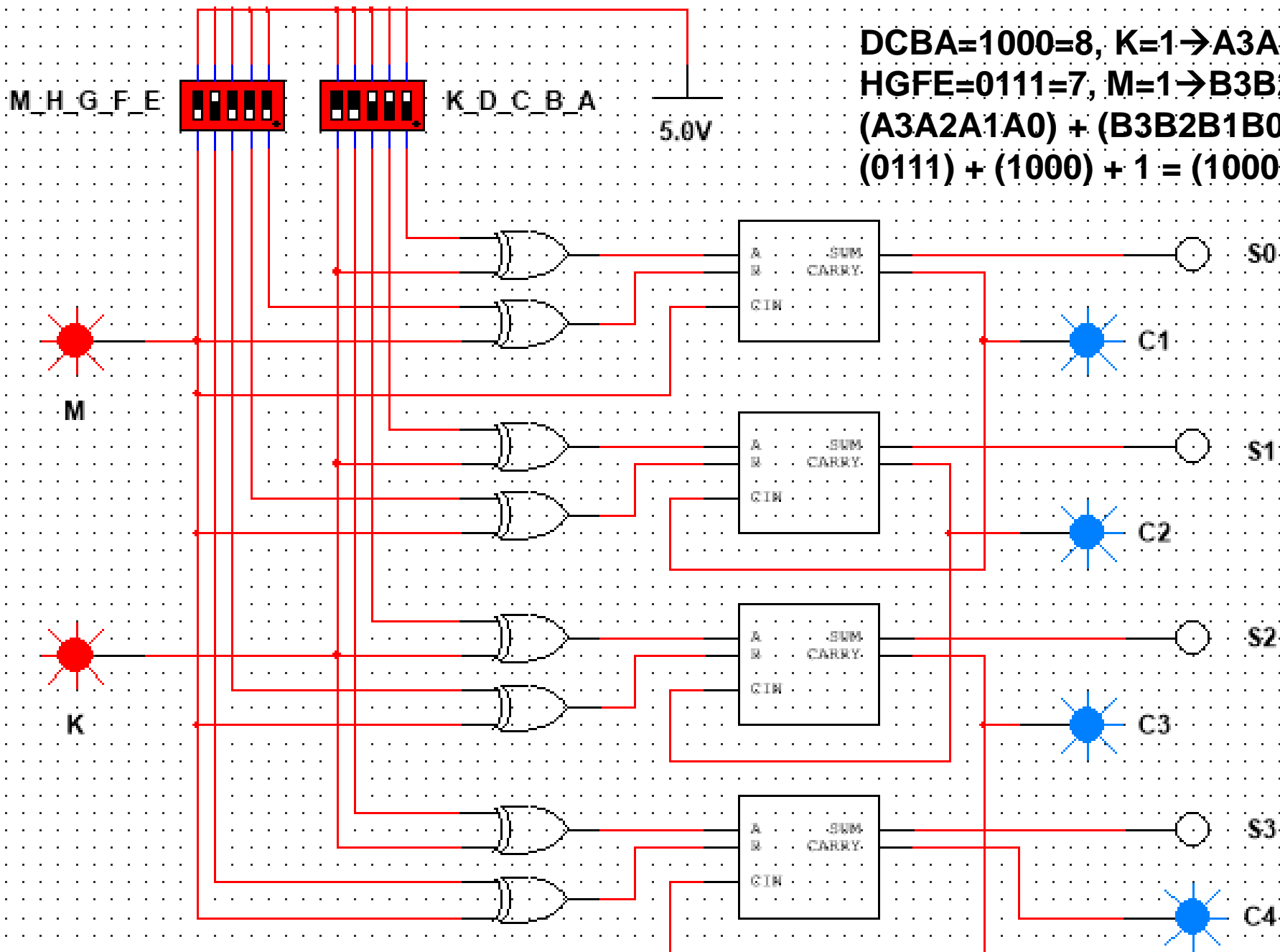
HGFE=1010=10, M=1 \rightarrow B3B2B1B0=0101=-10 (1's Compl.)

(A3A2A1A0) + (B3B2B1B0) + M = (C4S3S2S1S0)

(0111) + (0101) + 1 = (01101) = -(0011) = -(2+1) = -3 < 0

7 - 10 = -3 < 0 \rightarrow C4 = 0
Ignore or Discard C4
Αποτέλεσμα =
= 2's Complement του
S3S2S1S0

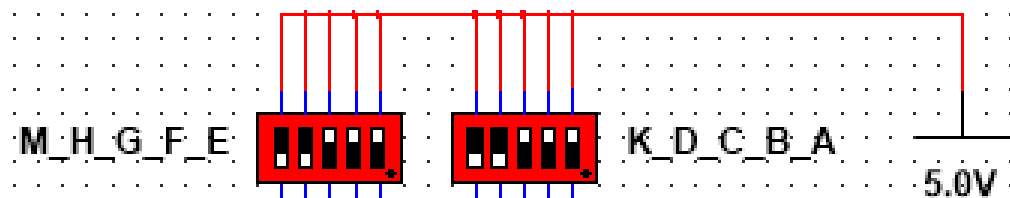
Το κύκλωμα εκτελεί την
πράξη: $A + B' + 1 = A - B$,
(αφαίρεση με χρήση του
συμπληρώματος
ως προς δύο)



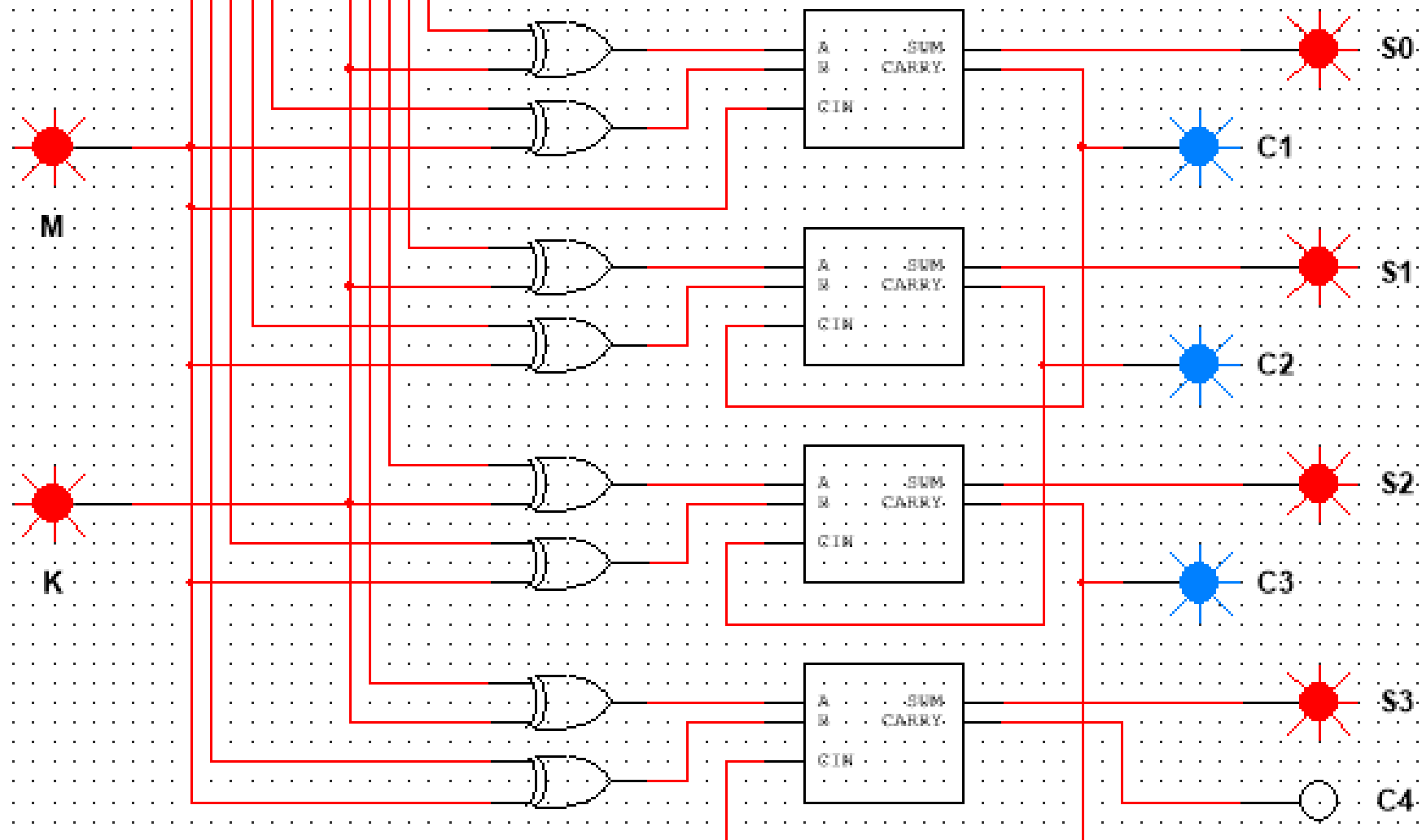
$DCBA=1000=8$, $K=1 \rightarrow A_3A_2A_1A_0=0111=-8$ (1's Compl.)
 $HGFE=0111=7$, $M=1 \rightarrow B_3B_2B_1B_0=1000=-7$ (1's Compl.)
 $(A_3A_2A_1A_0) + (B_3B_2B_1B_0) + M = (C_4S_3S_2S_1S_0)$
 $(0111) + (1000) + 1 = (10000) = -(1111) = -15$ (1's Compl.)

$(-8) + (-7) = (-15) < 0$,
 $|-15| = 15 < 16$ to $C_4 = 1$,
 Ignore or Discard C_4 ,
 Αποτέλεσμα =
 = 1's Complement του
 $S_3S_2S_1S_0$

Το κύκλωμα εκτελεί
 την πράξη: $A' + B' + 1$
 (πρόσθεση δύο αρνητικών)

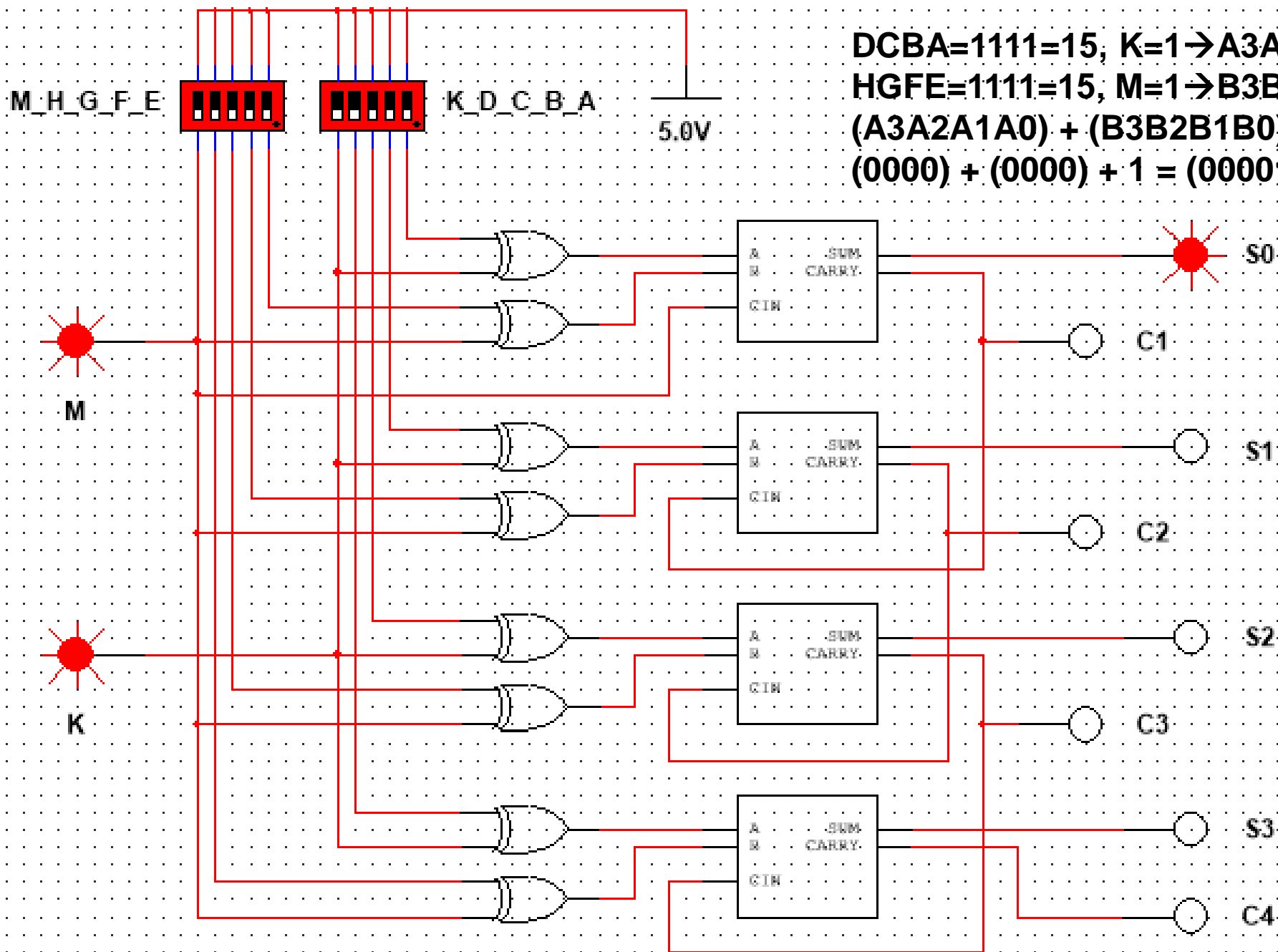


$DCBA=1000=8$, $K=1 \rightarrow A_3A_2A_1A_0=0111=-8$ (1's Compl.)
 $HGFE=1000=8$, $M=1 \rightarrow B_3B_2B_1B_0=0111=-8$ (1's Compl.)
 $(A_3A_2A_1A_0) + (B_3B_2B_1B_0) + M = (C_4S_3S_2S_1S_0)$
 $(0111) + (0111) + 1 = (01111) = -(10000) = -16$ (1's Compl.)



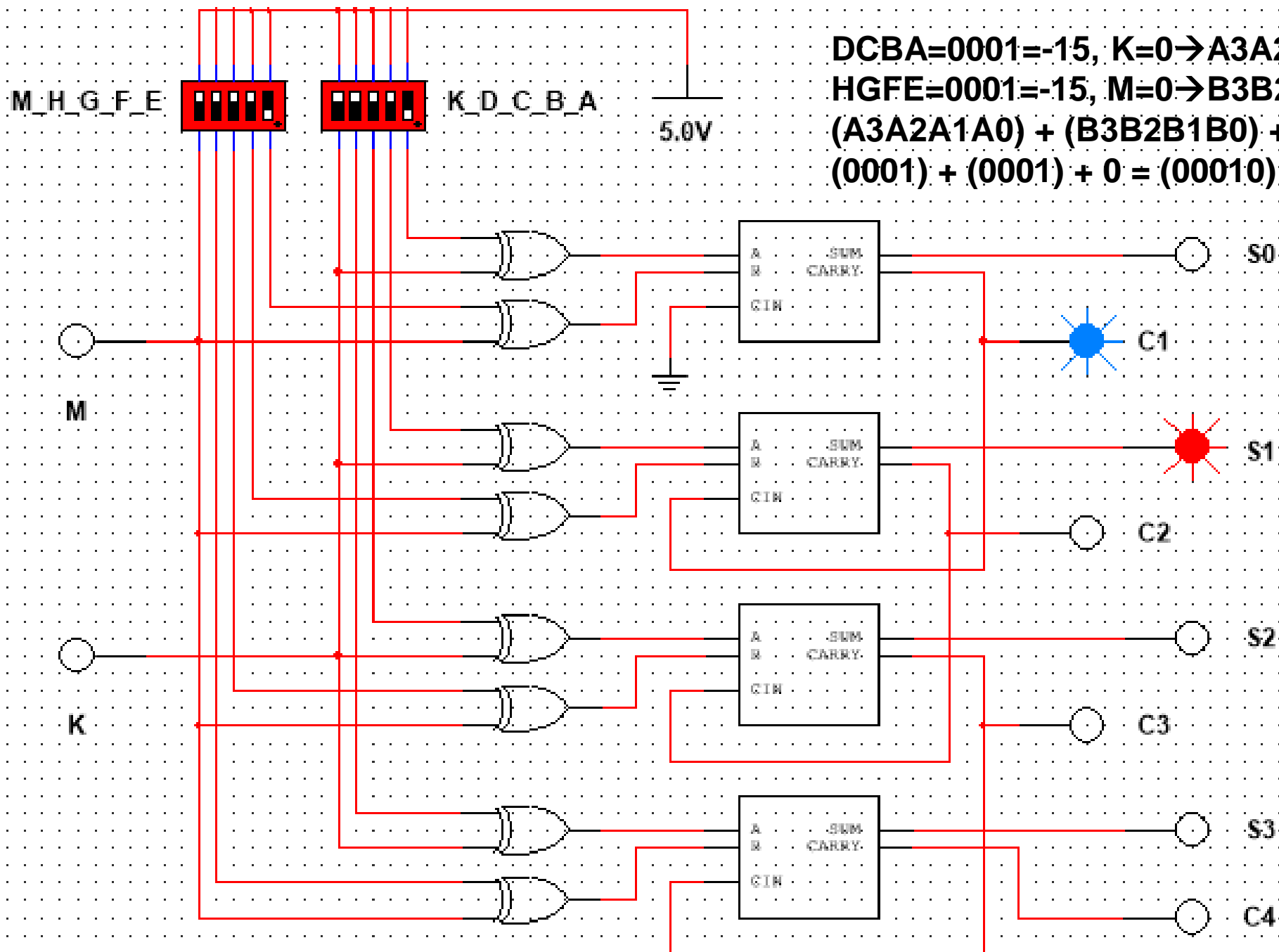
$(-8) + (-8) = (-16) < 0$,
 $|-16| = 16$ το $C_4 = 0$,
 Αποτέλεσμα =
 = 1's Complement του
 $C_4S_3S_2S_1S_0$

Το κύκλωμα εκτελεί
 την πράξη: $A' + B' + 1$
 (πρόσθεση δύο αρνητικών)



$(-15) + (-15) = (-30) < 0$,
 $|-30| = 30 > 16$ το $C4 = 0$,
 Αποτέλεσμα =
 = 1's Complement του
 $C4S3S2S1S0$

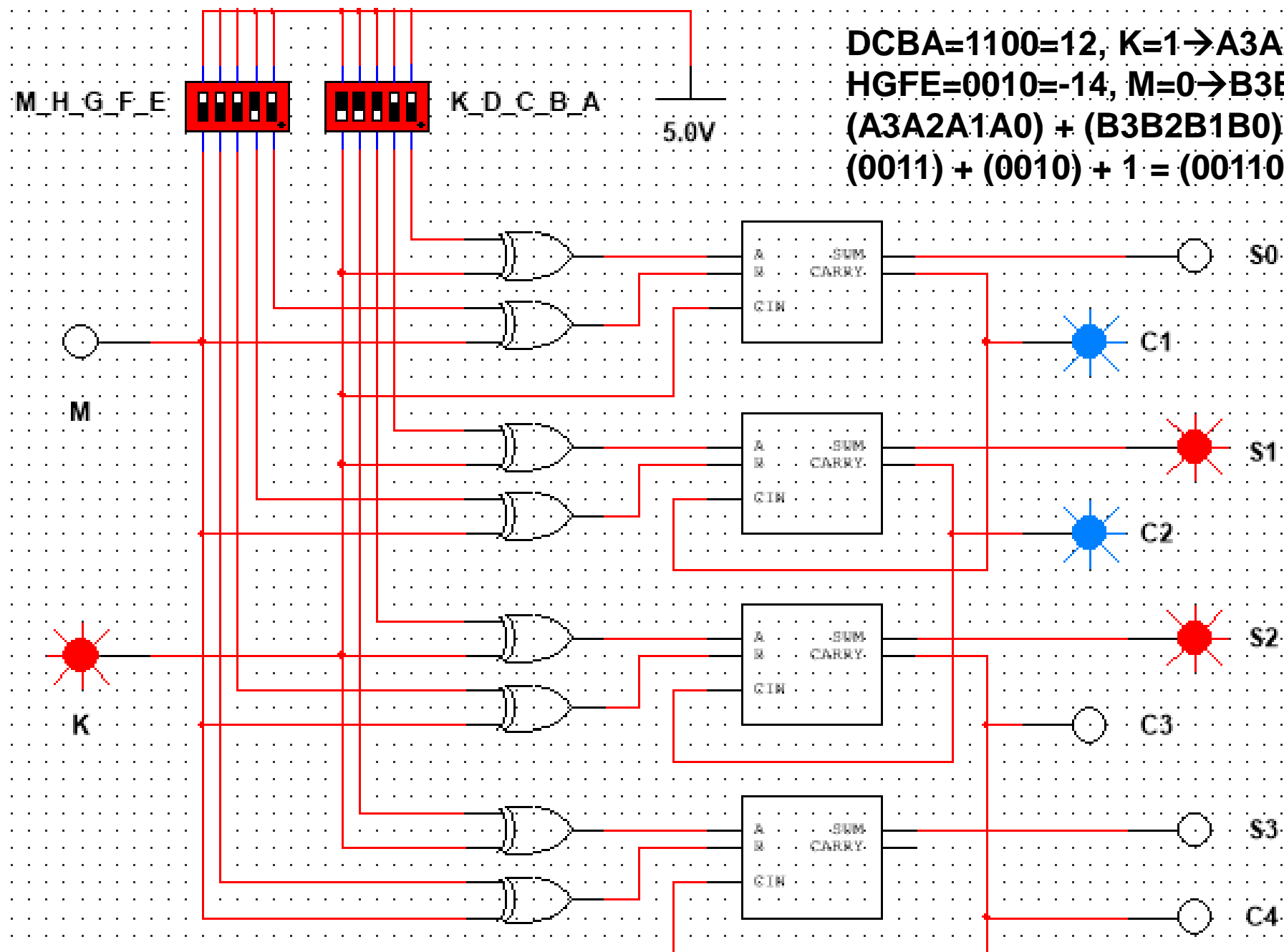
Το κύκλωμα εκτελεί
 την πράξη: $A' + B' + 1$
 (πρόσθεση δύο αρνητικών)



$DCBA=0001=-15$, $K=0 \rightarrow A_3A_2A_1A_0=0001=-15$ (2's Compl.)
 $HGFE=0001=-15$, $M=0 \rightarrow B_3B_2B_1B_0=0001=-15$ (2's Compl.)
 $(A_3A_2A_1A_0) + (B_3B_2B_1B_0) + 0 = (C_4S_3S_2S_1S_0)$
 $(0001) + (0001) + 0 = (00010) = -(11110) = -30$ (2's Compl.)

$(-15) + (-15) = (-30) < 0$,
 Αποτέλεσμα =
 = 2's Complement του
 $C_4S_3S_2S_1S_0$

Το κύκλωμα εκτελεί
 την πρόσθεση δύο
 αρνητικών με χρήση
 των συμπληρωμάτων
 ως προς δύο

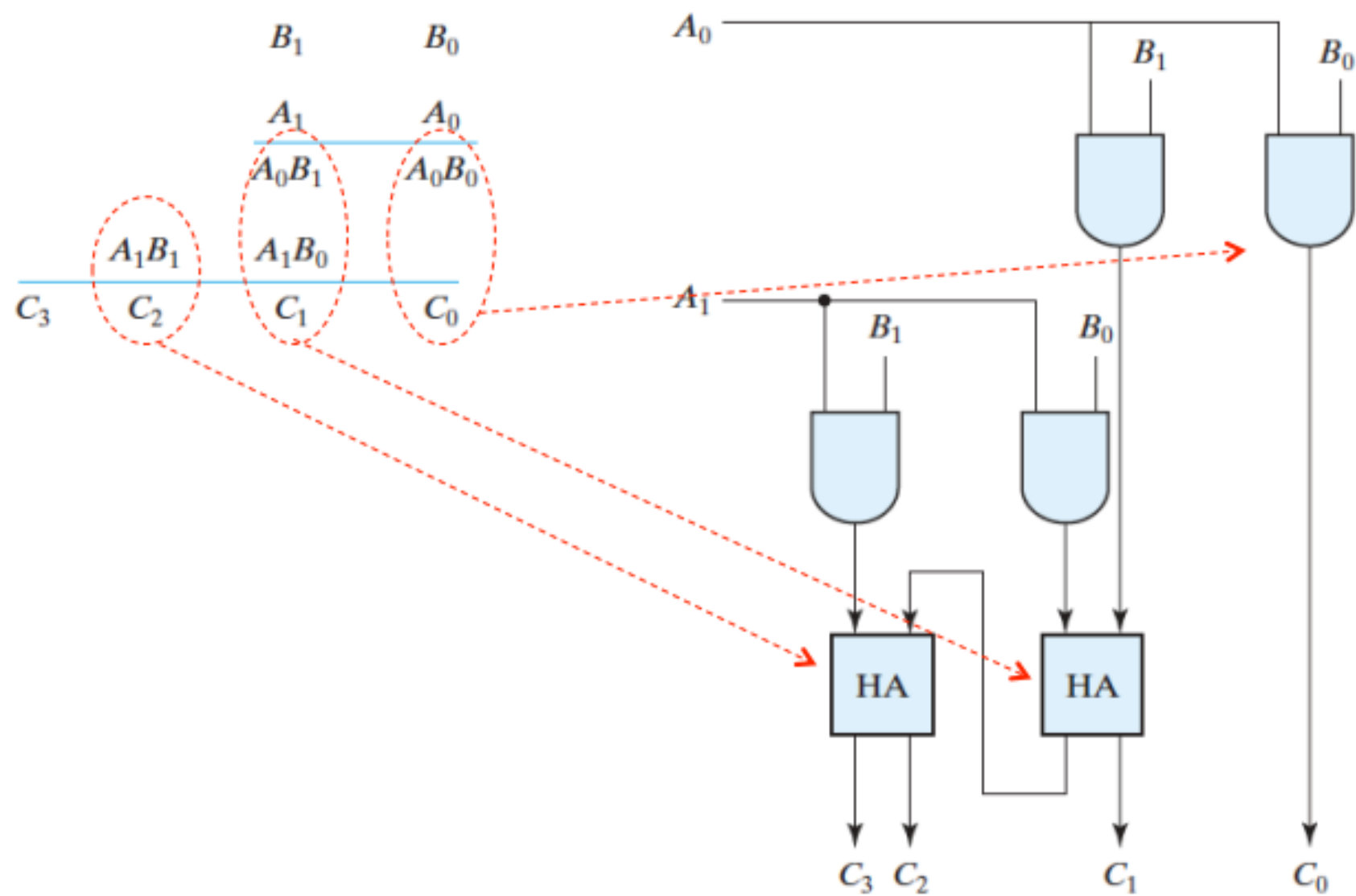


DCBA=1100=12, K=1 \rightarrow A3A2A1A0=0011=-12 (1's Compl.)
 HGFE=0010=-14, M=0 \rightarrow B3B2B1B0=0010=-14 (2's Compl.)
 (A3A2A1A0) + (B3B2B1B0) + 1 = (C4S3S2S1S0)
 (0011) + (0010) + 1 = (00110) = -(11010) = -26 (2's Compl.)

$(-12) + (-14) = (-26) < 0$,
 Αποτέλεσμα =
 = 2's Complement του
 C4S3S2S1S0

Το κύκλωμα εκτελεί
 την πρόσθεση δύο
 αρνητικών με χρήση
 των συμπληρωμάτων
 ως προς δύο

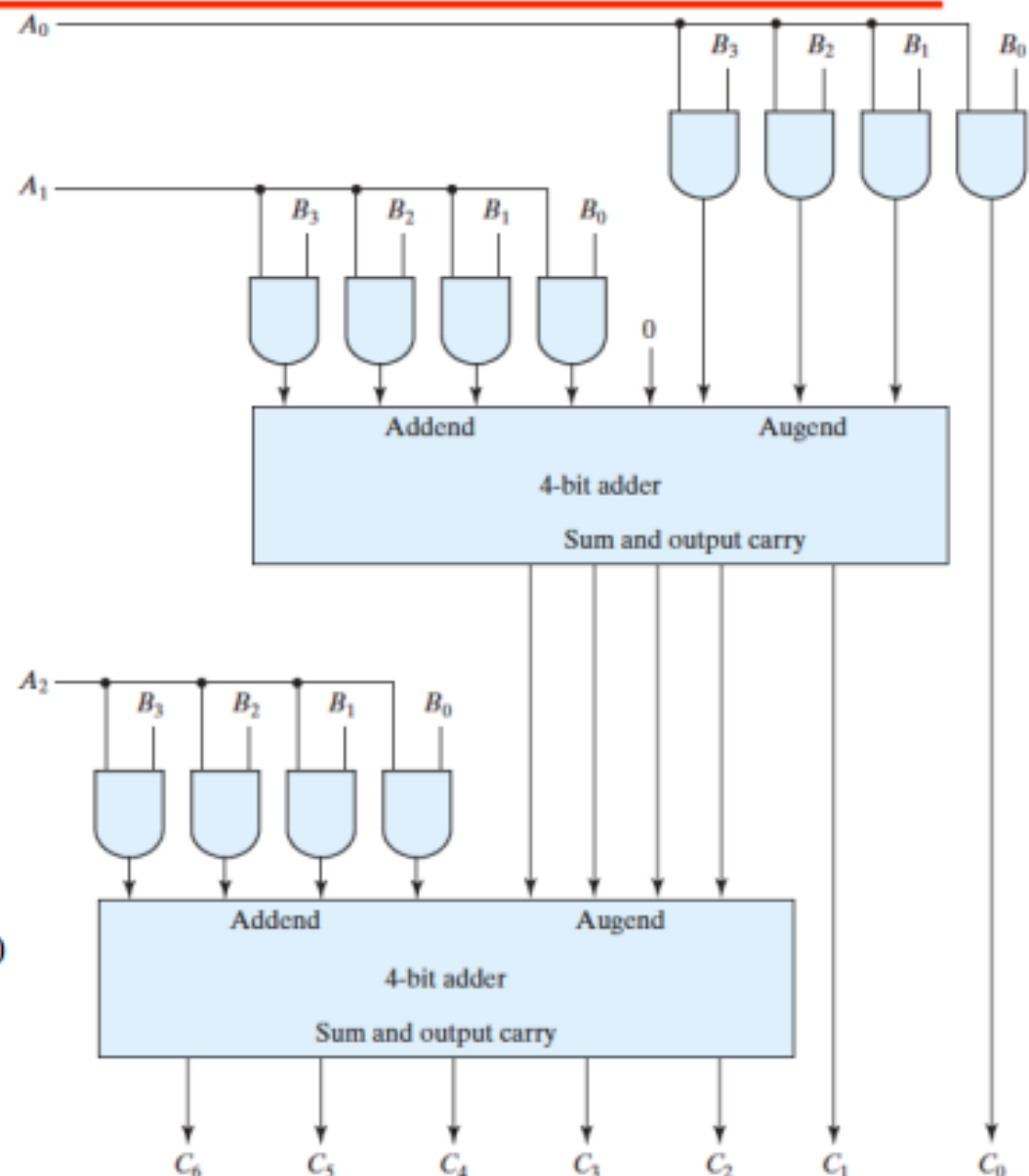
Δυναδικός Πολλαπλασιαστής

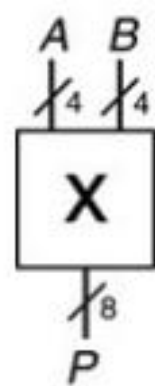


Δυναδικός Πολλαπλασιαστής

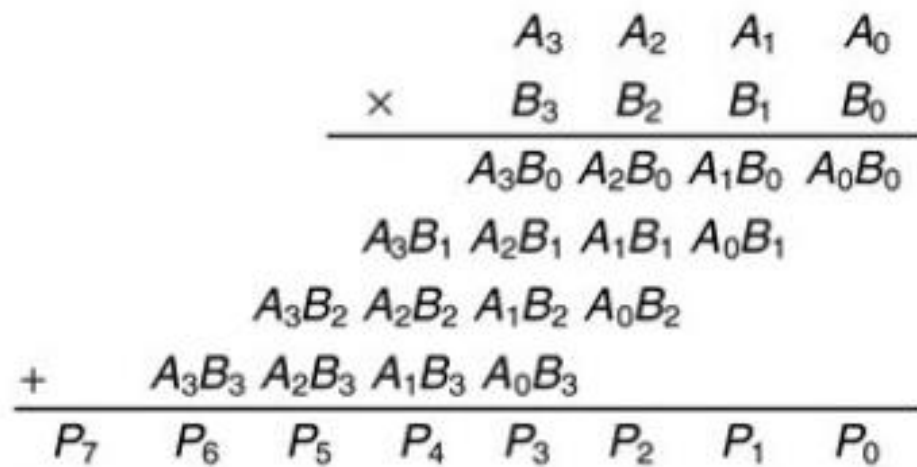
$$C_{6...0} = B_{3...0} \times A_{2...0}$$

$$\begin{array}{r}
 B_3 \ B_2 \ B_1 \ B_0 \\
 \times \quad A_2 \ A_1 \ A_0 \\
 \hline
 A_0 B_3 \ A_0 B_2 \ A_0 B_1 \ A_0 B_0 \\
 A_1 B_3 \ A_1 B_2 \ A_1 B_1 \ A_1 B_0 \\
 A_2 B_3 \ A_2 B_2 \ A_2 B_1 \ A_2 B_0 \\
 \hline
 C_6 \ C_5 \ C_4 \ C_3 \ C_2 \ C_1 \ C_0
 \end{array}$$

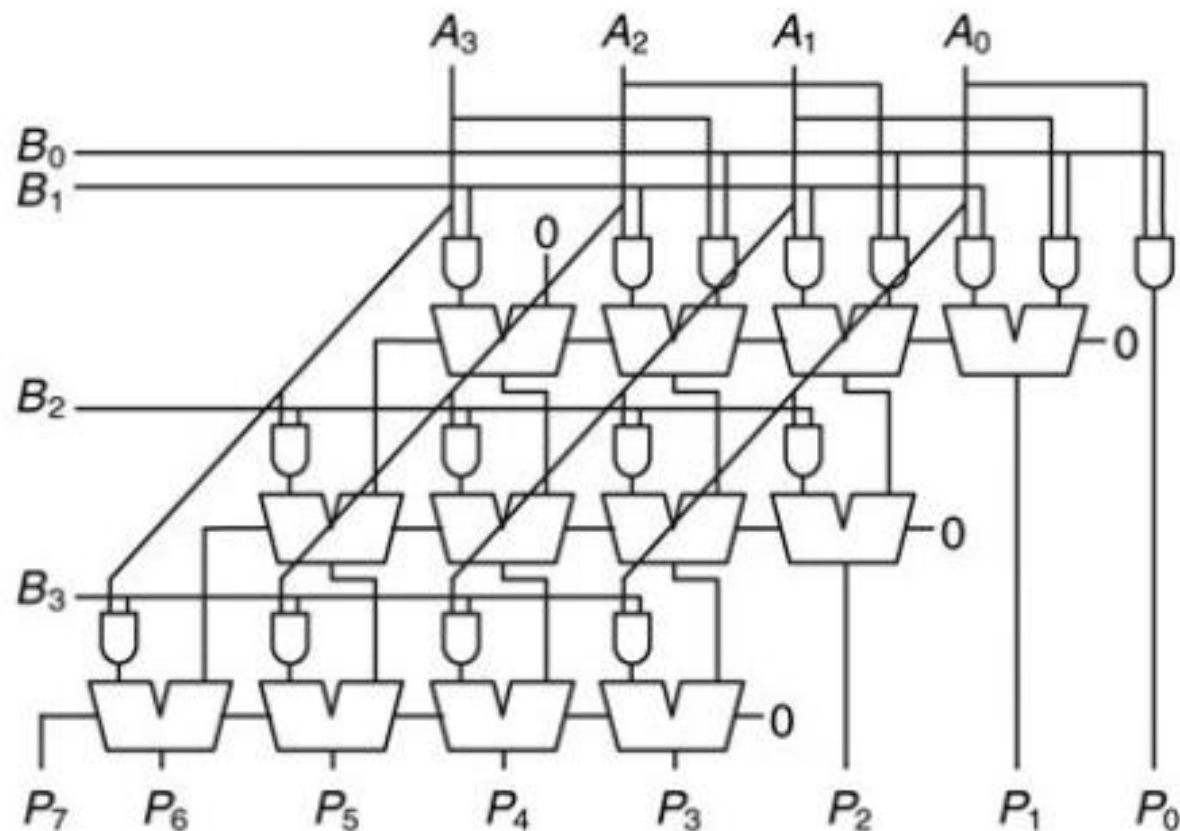




(a)



(b)



(c)

Συγκριτής Μεγέθους (Comparator)

Συγκριτής Μεγέθους: συγκρίνει
δύο αριθμούς και βρίσκει τη
σχέση τους (<, >, =).

Για δύο αριθμούς των n bits
έχουμε $2^n \times 2^n = 2^{2n}$ συνδυασμούς.

↓
Η μέθοδος χάρτη είναι ασύμφορη.

Το κύκλωμα του συγκριτή έχει
αρκετή κανονικότητα.

➤ Έστω $A = A_3A_2A_1A_0$ και $B = B_3B_2B_1B_0$ οι δύο αριθμοί.

➤ Ισχύει $A = B$ όταν όλα τα ζευγάρια (A_i, B_i) είναι ίσα, δηλαδή $A_3=B_3$ και $A_2=B_2$ και $A_1=B_1$ και $A_0=B_0$.

$$(A=B) = x_3x_2x_1x_0 \quad x_i = A_iB_i + A_i'B_i'$$

Συγκριτής Μεγέθους

$$(A=B) = x_3x_2x_1x_0 \quad x_i = A_iB_i + A_i'B_i'$$

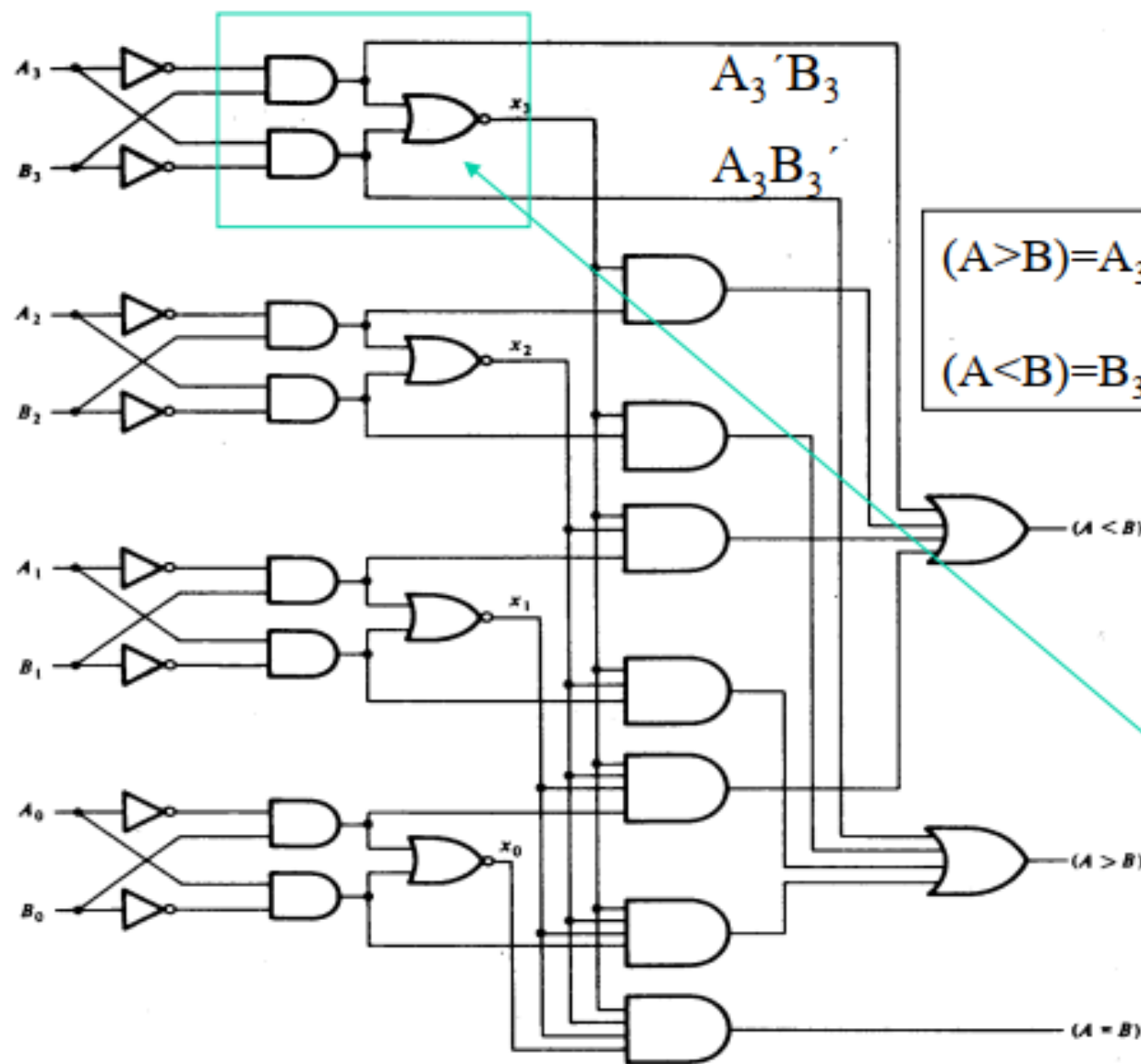
➤ Για να βρούμε εάν $A < B$ ή $A > B$ εξετάζουμε τα σχετικά μεγέθη των ζευγαριών ψηφίων ξεκινώντας από την πιο σημαντική θέση. Εάν τα δύο ψηφία είναι ίσα τότε συγκρίνουμε το επόμενο λιγότερο σημαντικό ζευγάρι ψηφίων.

➤ Εάν $A_i = 1$ και $B_i = 0$ τότε $A > B$, εάν $A_i = 0$ και $B_i = 1$ τότε $A < B$.

$$(A > B) = A_3B_3' + x_3A_2B_2' + x_3x_2A_1B_1' + x_3x_2x_1A_0B_0'$$

$$(A < B) = B_3A_3' + x_3B_2A_2' + x_3x_2B_1A_1' + x_3x_2x_1B_0A_0'$$

Συγκριτής Μεγέθους



$$(A=B) = x_3x_2x_1x_0$$

$$x_i = A_iB_i + A_i'B_i'$$

$$(A>B) = A_3B_3' + x_3A_2B_2' + x_3x_2A_1B_1' + x_3x_2x_1A_0B_0'$$

$$(A<B) = B_3A_3' + x_3B_2A_2' + x_3x_2B_1A_1' + x_3x_2x_1B_0A_0'$$

Μας συμφέρει στην υλοποίηση αντί για κπor να υλοποιήσουμε με AND-NOR τις σχέσεις

$$x_i = (A_iB_i' + A_i'B_i)'$$

καθώς τα A_iB_i' , $A_i'B_i$ διαμοιράζονται

Συνθήκες Αδιαφορίας

Συμβολίζονται με \times και αντιστοιχούν σε συνδυασμούς εισόδων που δεν ορίζονται για μία συνάρτηση.

Π.χ. $F(w,x,y,z)=\Sigma(1,3,7,11,15)$ με συνθήκες αδιαφορίας $d(w,x,y,z)=\Sigma(0,2,5)$

wx \ yz	yz				
	00	01	11	10	
00	\times	1	1	\times	→ 1
01	0	\times	1	0	
11	0	0	1	0	→ 0
10	0	0	1	0	

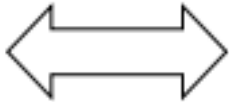
$$F = yz + w'x' = \Sigma(\underline{0},1,\underline{2},3,7,11,15)$$

wx \ yz	yz				
	00	01	11	10	
00	\times	1	1	\times	→ 0
01	0	\times	1	0	
11	0	0	1	0	→ 1
10	0	0	1	0	

$$F = yz + w'z = \Sigma(1,3,\underline{5},7,11,15)$$

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άσσοι ή μηδενικά ανάλογα με την απλοποίηση που οδηγεί στο μικρότερο κύκλωμα.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

Αποκλειστικό Ή (XOR)	Σχ. Αντιστρ.	Αποκλειστικό ΟΥΤΕ (XNOR)
$x \oplus y = x'y + xy'$		$(x \oplus y)' = xy + x'y'$

➤ Ιδιότητες:

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = x'$$

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus x' = 1$$

$$x \oplus y' = (x \oplus y)'$$

$$x' \oplus y = (x \oplus y)'$$

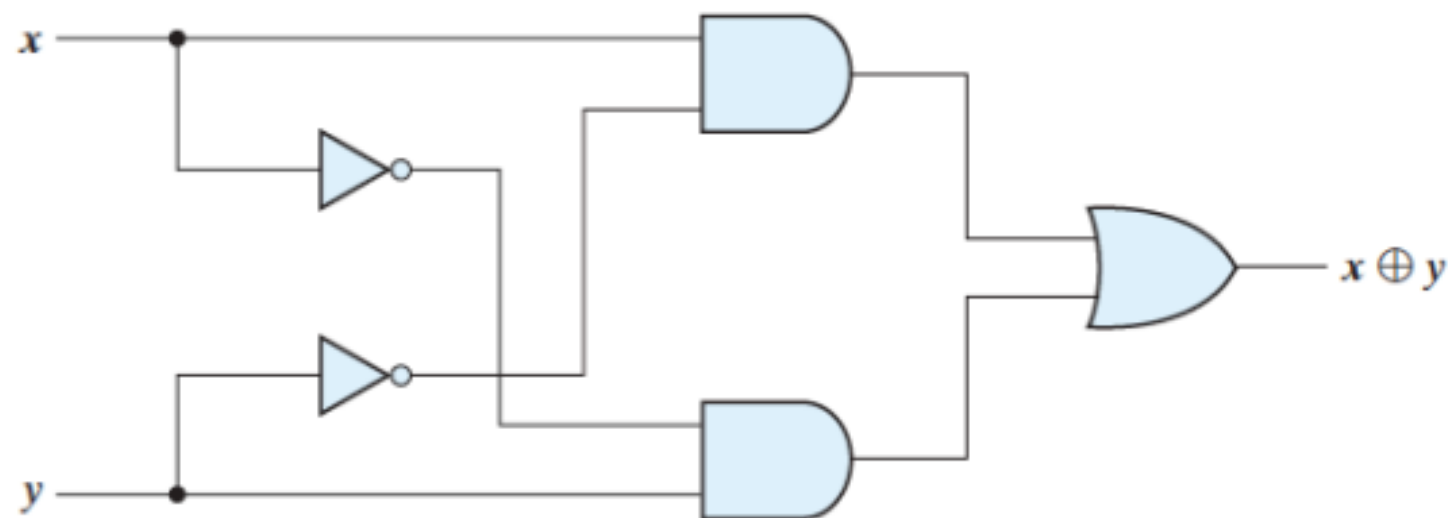
➤ Η πράξη XOR είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

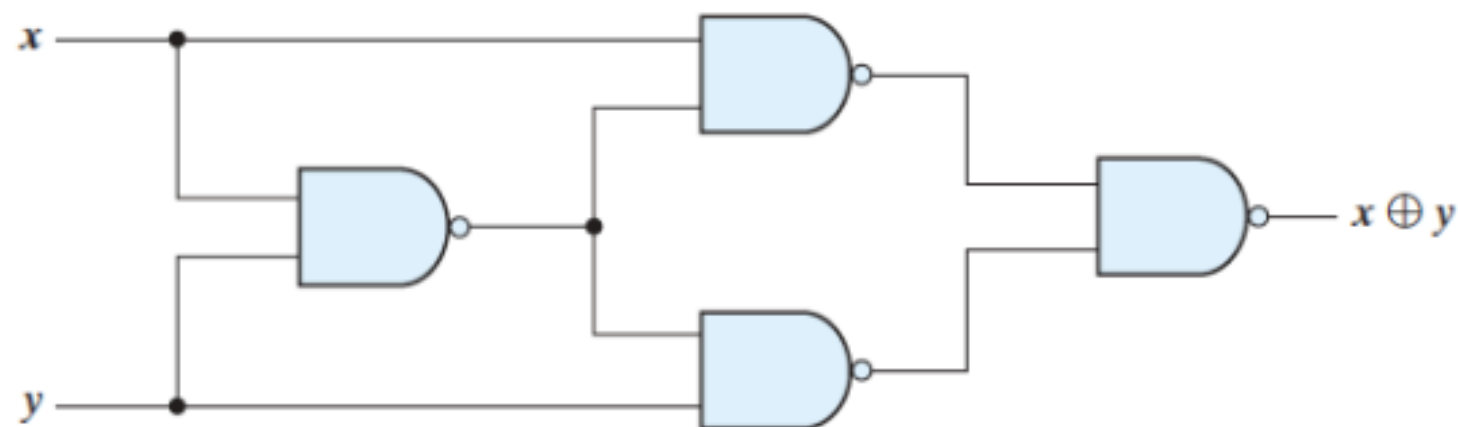
$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$$

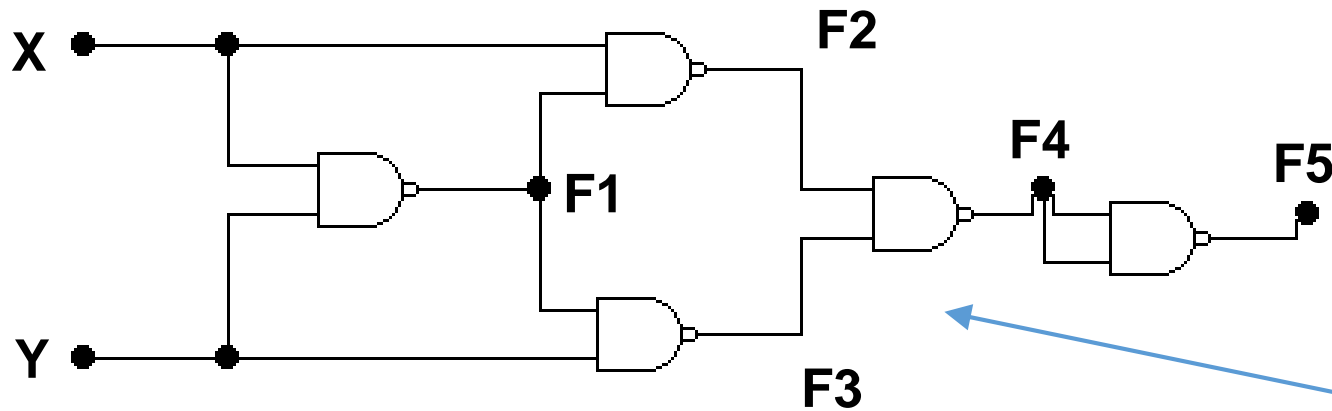
➤ Δεν φτιάχνονται συχνά πύλες XOR με περισσότερες από 2 εισόδους.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή



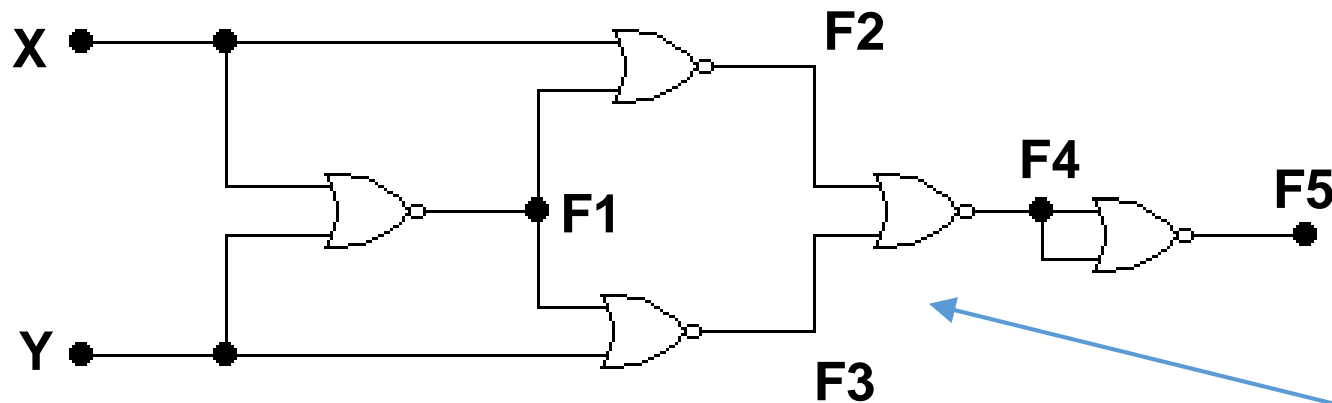
(a) Exclusive-OR with AND-OR-NOT gates





$$\begin{aligned}
 F1 &= (XY)' = X' + Y' \\
 F2 &= (F1 \cdot X)' = [(X' + Y')X]' = (X'X + Y'X)' = (Y'X)' \\
 F3 &= (F1 \cdot Y)' = [(X' + Y')Y]' = (X'Y + Y'Y)' = (X'Y)' \\
 F4 &= (F2 \cdot F3)' = [(Y'X)' \cdot (X'Y)']' = Y'X + X'Y \rightarrow \\
 &\mathbf{F4 = X (XOR) Y \rightarrow F5 = (F4)' = X (XNOR) Y}
 \end{aligned}$$

XOR \rightarrow 4 NAND , 3 LEVELS
 XNOR \rightarrow 5 NAND , 4 LEVELS



$$\begin{aligned}
 F1 &= (X + Y)' = X'Y' \\
 F2 &= (F1 + X)' = (X'Y' + X)' = (X + Y) \cdot X' = X'Y \\
 F3 &= (F1 + Y)' = (X'Y' + Y)' = (X + Y) \cdot Y' = Y'X \\
 F4 &= (F2 + F3)' = (X'Y + Y'X)' = (X + Y')(Y + X') = \\
 &= XY + X'X + Y'Y + X'Y' = XY + X'Y' \rightarrow \\
 &\mathbf{F4 = X (XNOR) Y \rightarrow F5 = (F4)' = X (XOR) Y}
 \end{aligned}$$

XNOR \rightarrow 4 NOR , 3 LEVELS
 XOR \rightarrow 5 NOR , 4 LEVELS

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

Η συνάρτηση XOR πολλών μεταβλητών είναι περιττή: παίρνει τιμή 1 μόνο όταν περιττός αριθμός εισόδων είναι ίσος με 1.

		<i>BC</i>		<i>B</i>	
		00	01	11	10
<i>A</i>	0		1		1
	1	1		1	

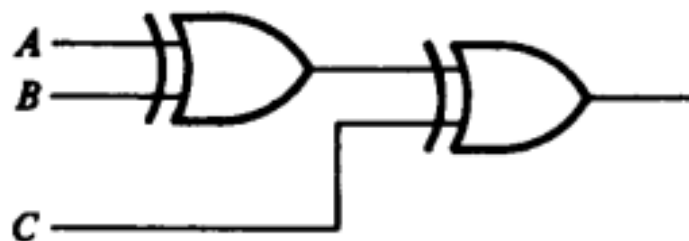
(α) Περιττή συνάρτηση

$$F = A \oplus B \oplus C$$

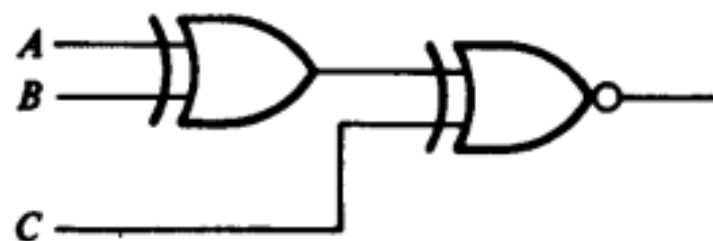
		<i>BC</i>		<i>B</i>	
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	1		1	
	1		1		1

(β) Άρτια συνάρτηση

$$F = (A \oplus B \oplus C)'$$



(α) Περιττή συνάρτηση τριών εισόδων



(β) Άρτια συνάρτηση τριών εισόδων

Η περιττή συνάρτηση 3 μεταβλητών

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

		B			
		C			
A	BC	00	01	11	10
		m_0	m_1	m_3	m_2
0			1		1
1		1		1	

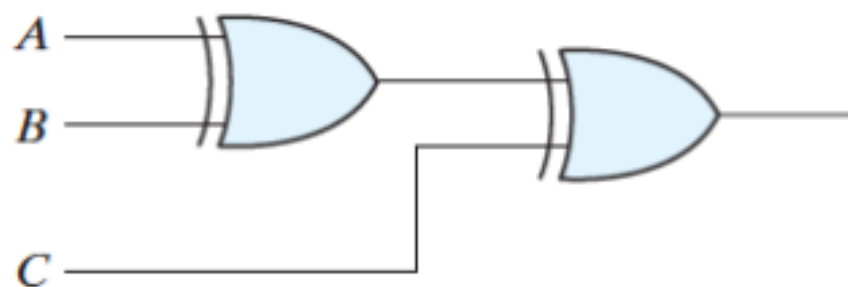
$$F = A'B'C + A'BC' + AB'C' + ABC =$$

$$A'(B'C + BC') + A(B'C' + BC) = A'(B \text{ xor } C) + A(B \text{ xor } C)'$$

$$\text{Θέτουμε } Y = B \text{ xor } C$$

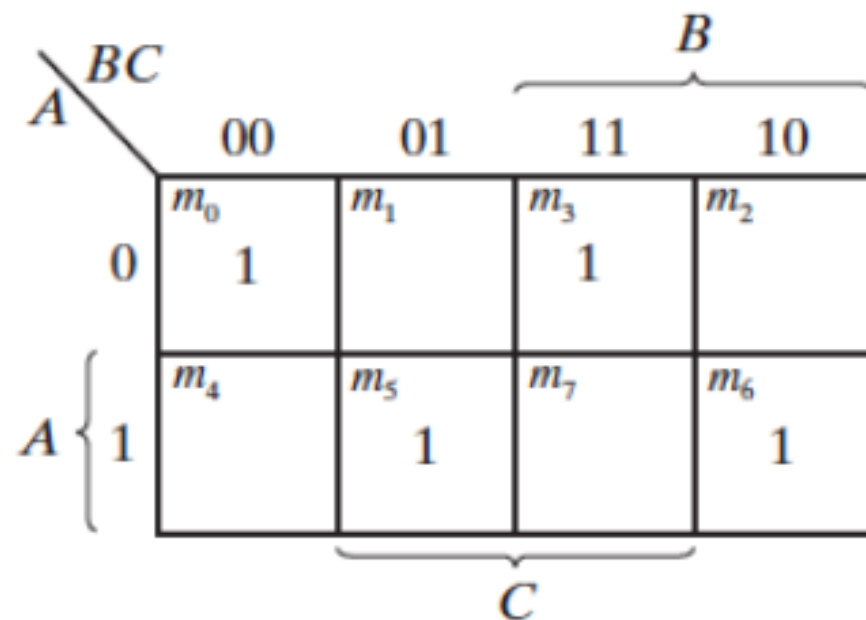
$$F = A'Y + AY' = A \text{ xor } Y$$

$$F = A \text{ xor } B \text{ xor } C$$



Η άρτια συνάρτηση 3 μεταβλητών

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



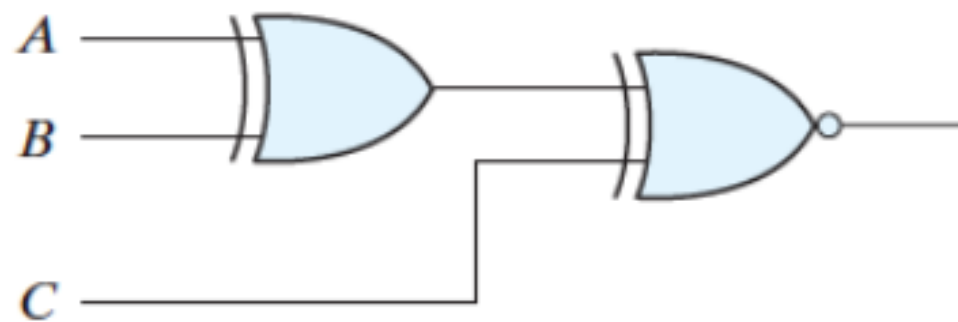
$$F = A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC' =$$

$$A'(B'C' + BC) + A(B'C + BC') = A'(B \text{ xor } C)' + A(B \text{ xor } C)$$

$$\text{Θέτουμε } Y = B \text{ xor } C$$

$$F = A'Y' + AY = (A \text{ xor } Y)'$$

$$F = (A \text{ xor } B \text{ xor } C)'$$



Περιττή – Άρτια Συνάρτηση 4 Μεταβλητών

		C			
		CD			
		00	01	11	10
A	AB				
	00		1		1
	01	1		1	
	11		1		1
	10	1		1	
		D			

(α) Περιττή συνάρτηση

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D$$

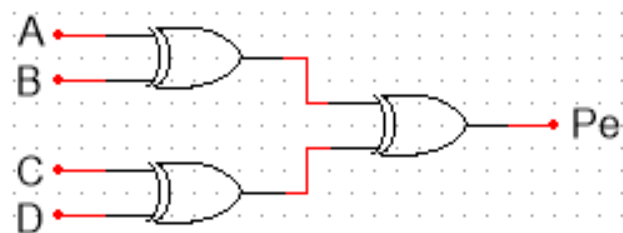
		C			
		CD			
		00	01	11	10
A	AB				
	00	1		1	
	01		1		1
	11	1		1	
	10		1		1
		D			

(β) Άρτια συνάρτηση

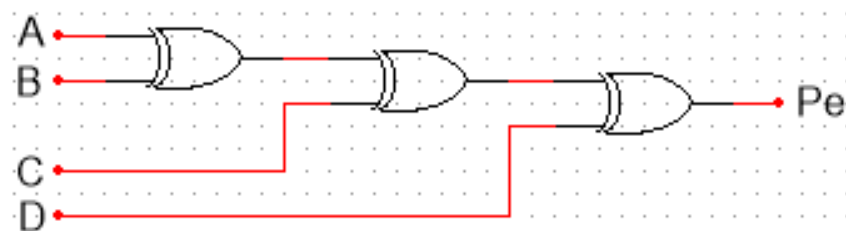
$$F = (A \oplus B \oplus C \oplus D)'$$

Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

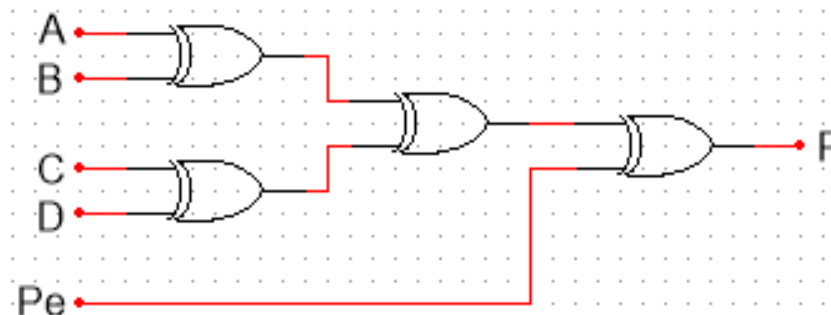
A	B	C	D	P_e
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(ΔΕΝΔΡΟ ΠΥΛΩΝ ΧΟΡ)



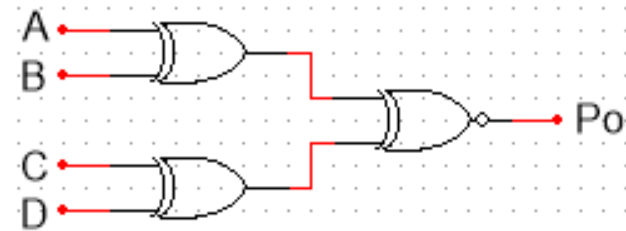
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(ΑΛΥΣΙΔΑ ΠΥΛΩΝ ΧΟΡ)



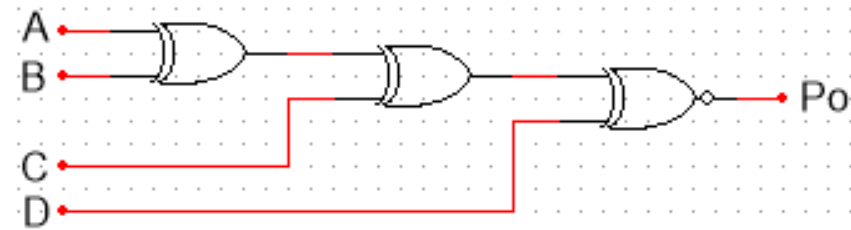
ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(F=1 ΓΙΑ ΠΕΡΙΤΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ΛΑΘΩΝ)

Γεννήτρια και Ελεγκτής Ισοτιμίας

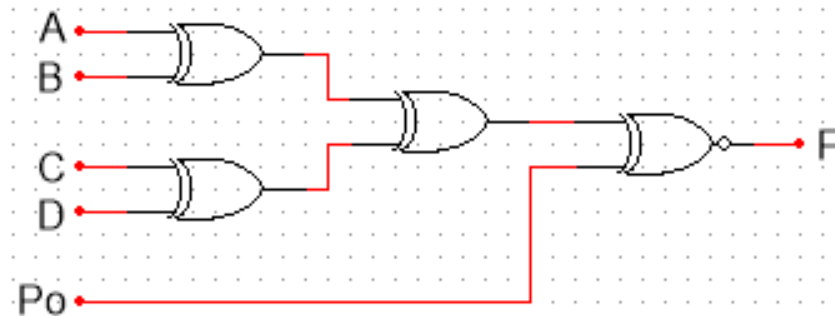
A	B	C	D	P ₀
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



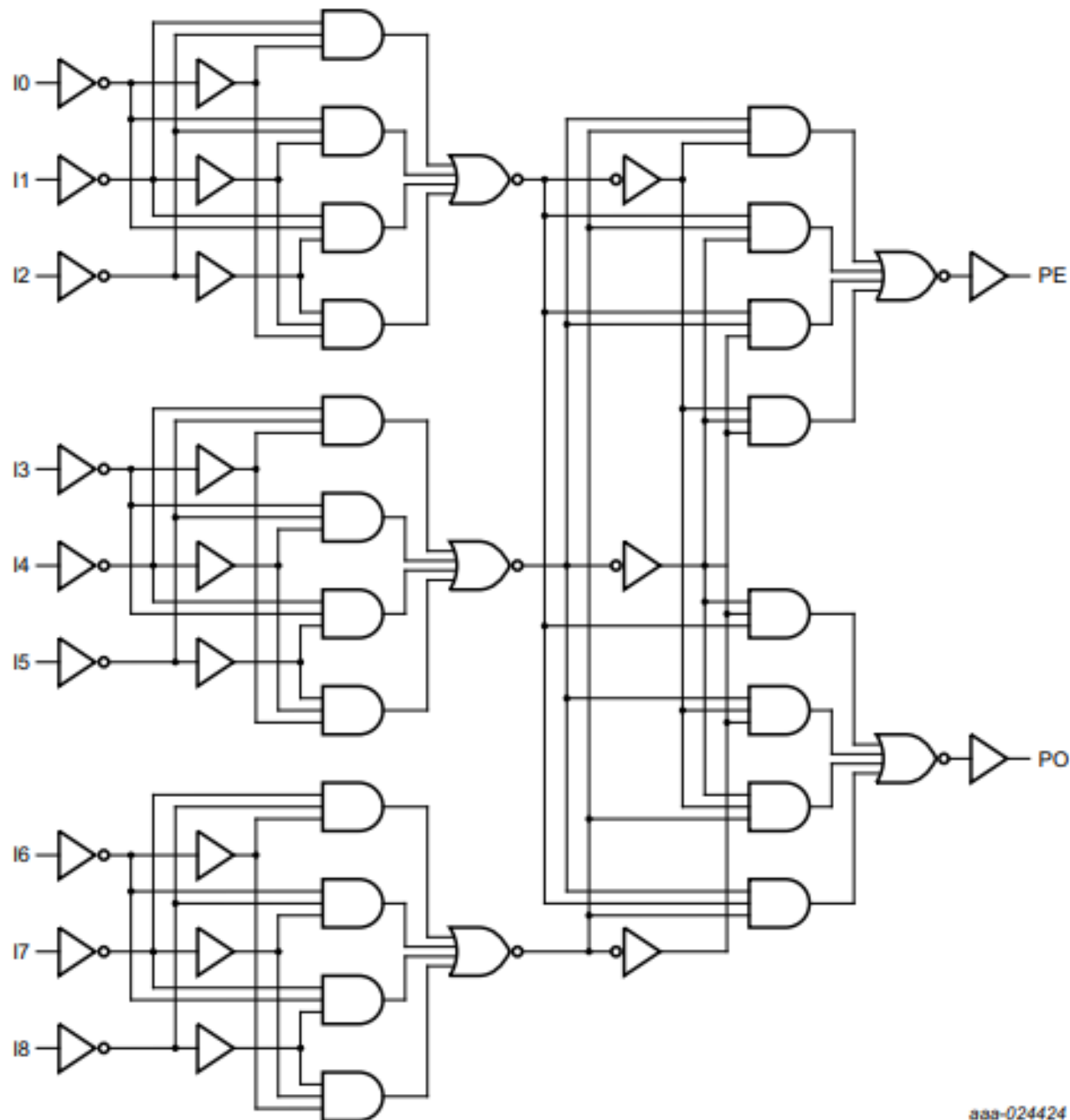
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(ΔΕΝΔΡΟ ΠΥΛΩΝ ΧΟΡ)



ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(ΑΛΥΣΙΔΑ ΠΥΛΩΝ ΧΟΡ)



ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 4-BIT
(F=1 ΓΙΑ ΠΕΡΙΤΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ΛΑΘΩΝ)



74HC280; 74HCT280

9-bit odd/even parity generator/checker

Table 2. Pin description

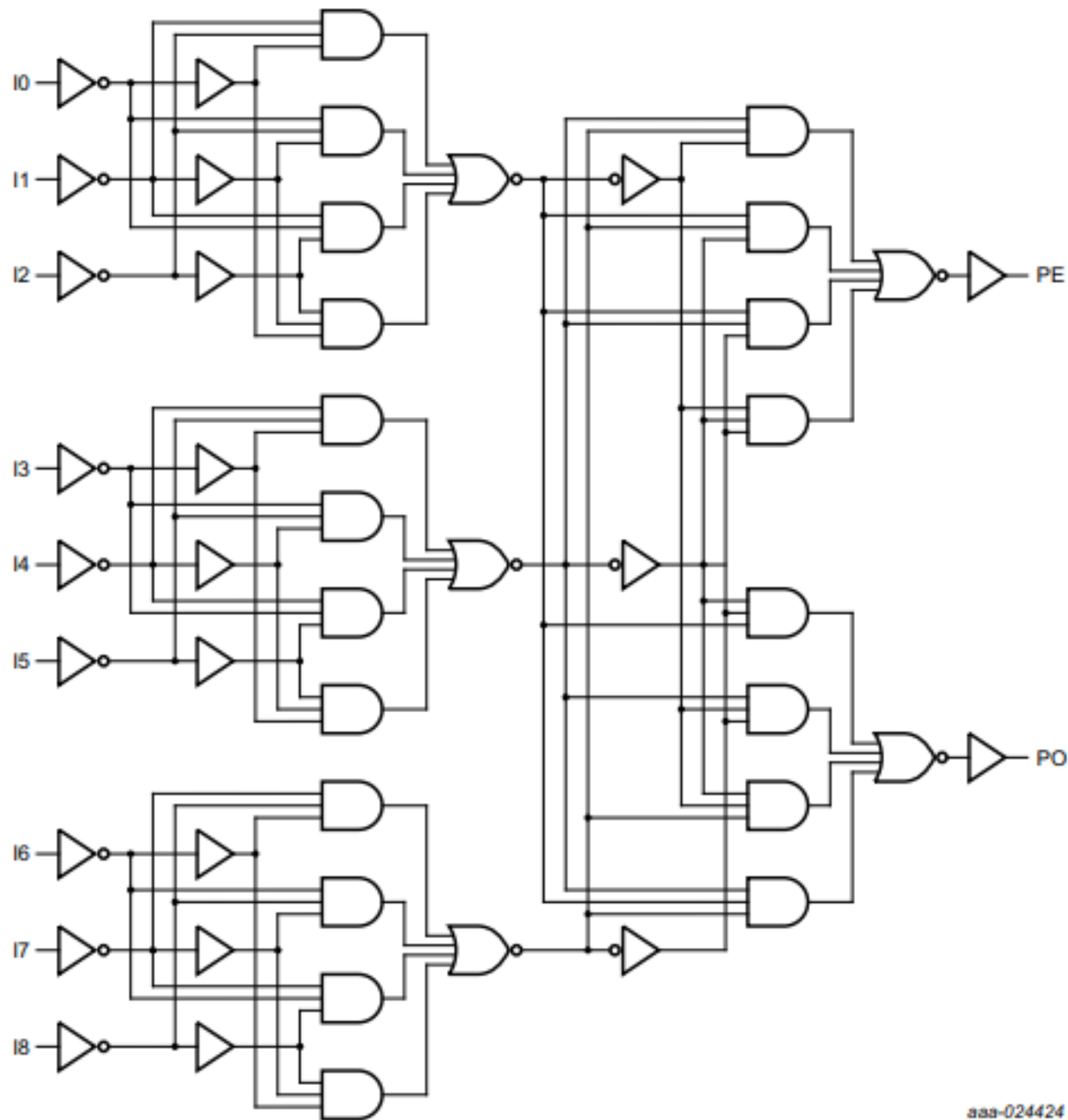
Symbol	Pin	Description
I0, I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8	8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 4	data input
GND	7	ground (0 V)
PE	5	even parity output
PO	6	odd parity output
V _{CC}	14	supply voltage

6. Functional description

Table 3. Function table^[1]

Inputs	Outputs	
number of HIGH data inputs (I0 to I8)	PE	PO
even	H	L
odd	L	H

[1] H = HIGH voltage level;
L = LOW voltage level



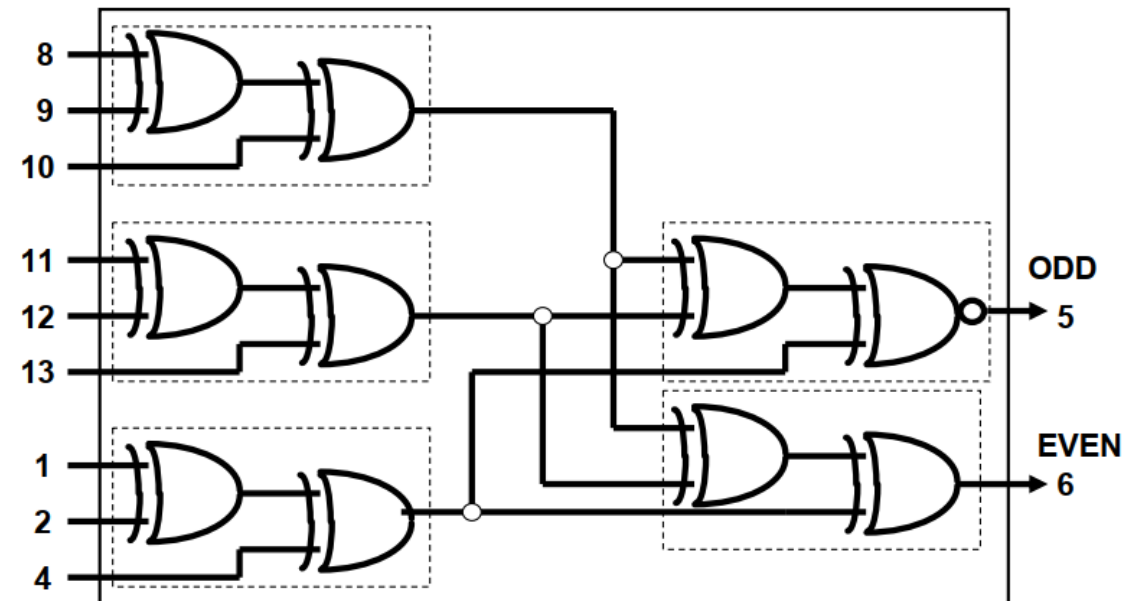
aaa-024424

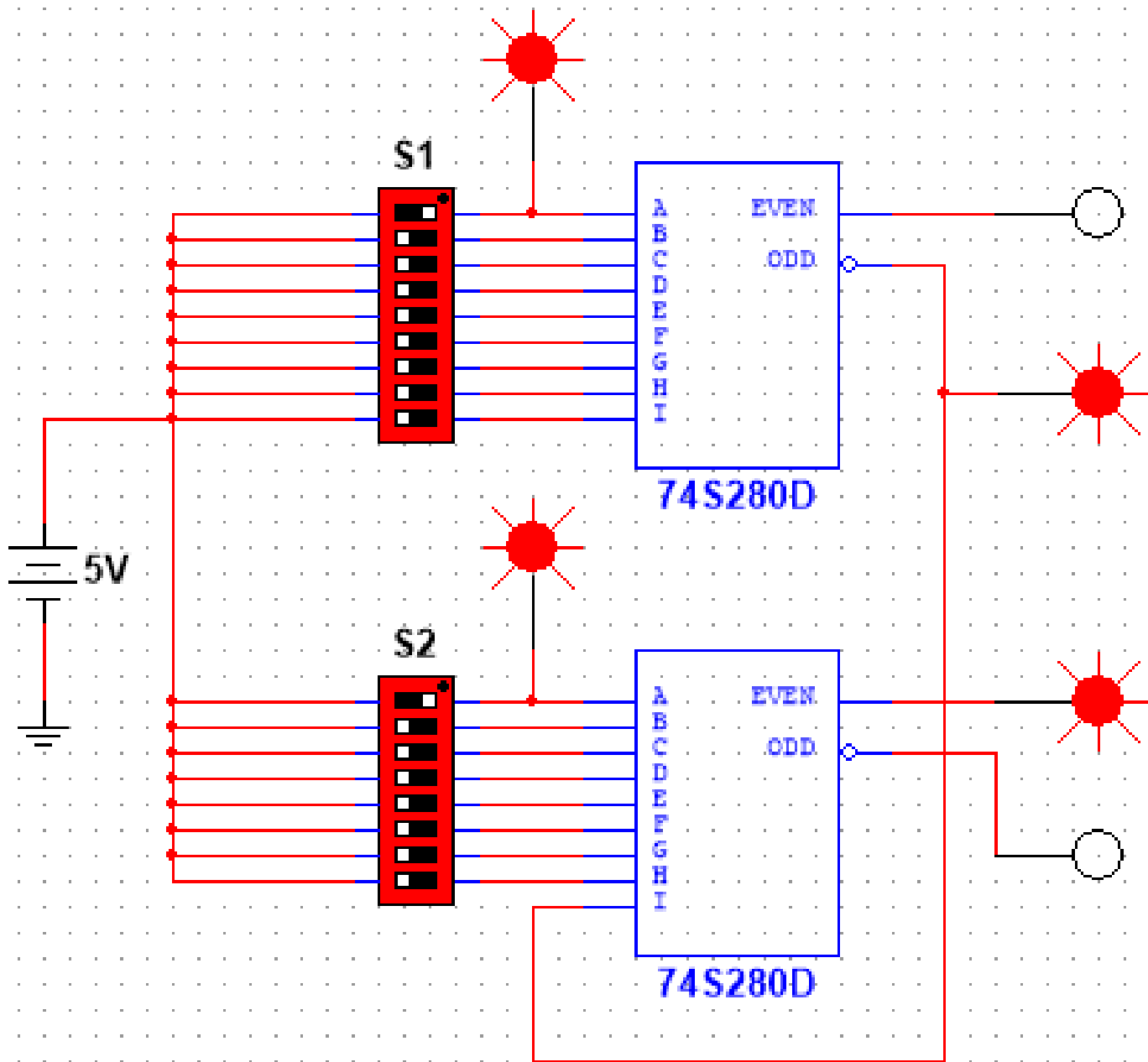
74HC280; 74HCT280

9-bit odd/even parity generator/checker

Table 2. Pin description

Symbol	Pin	Description
I0, I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8	8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 4	data input
GND	7	ground (0 V)
PE	5	even parity output
PO	6	odd parity output
V _{CC}	14	supply voltage

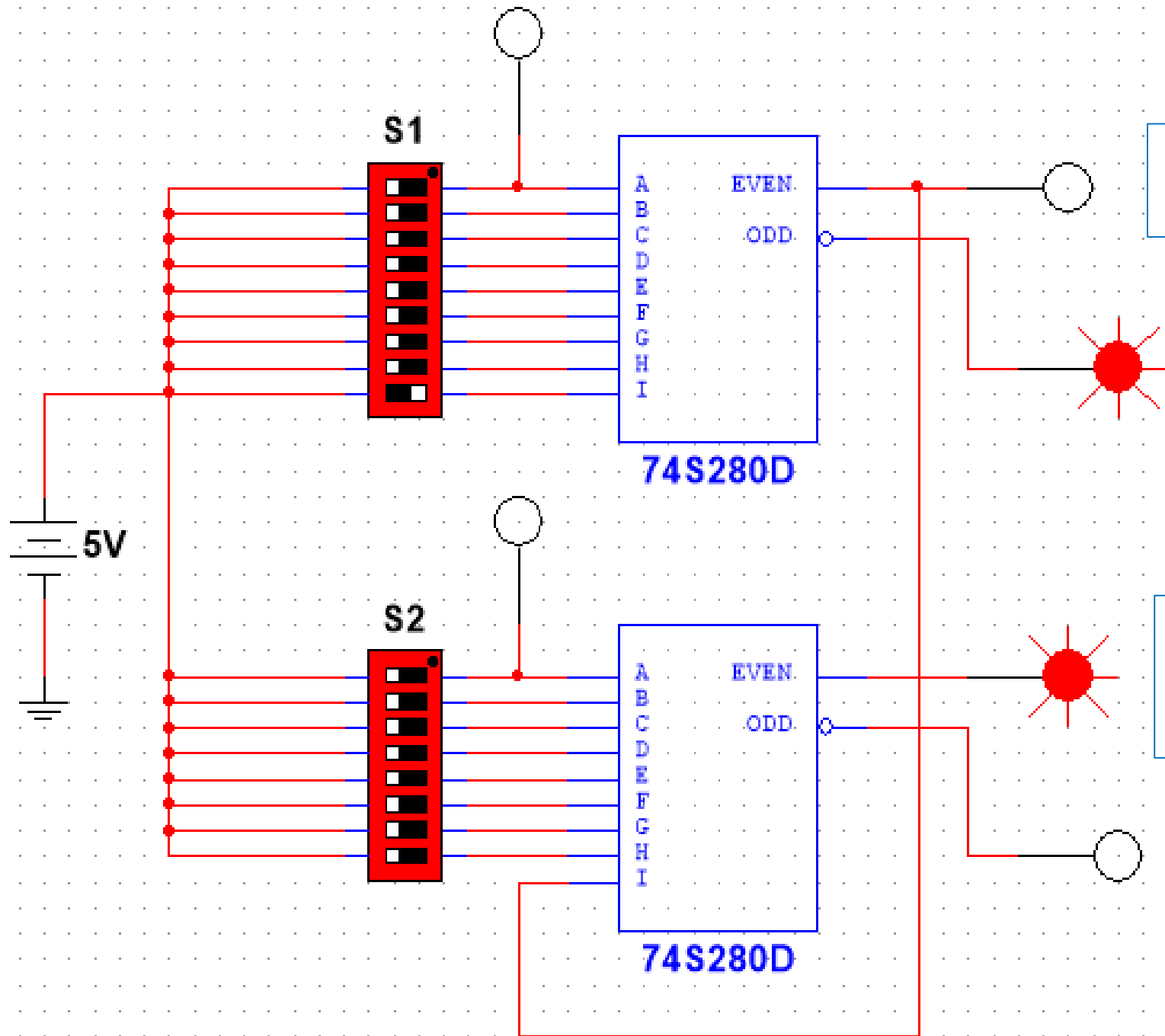




ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ CASCADE

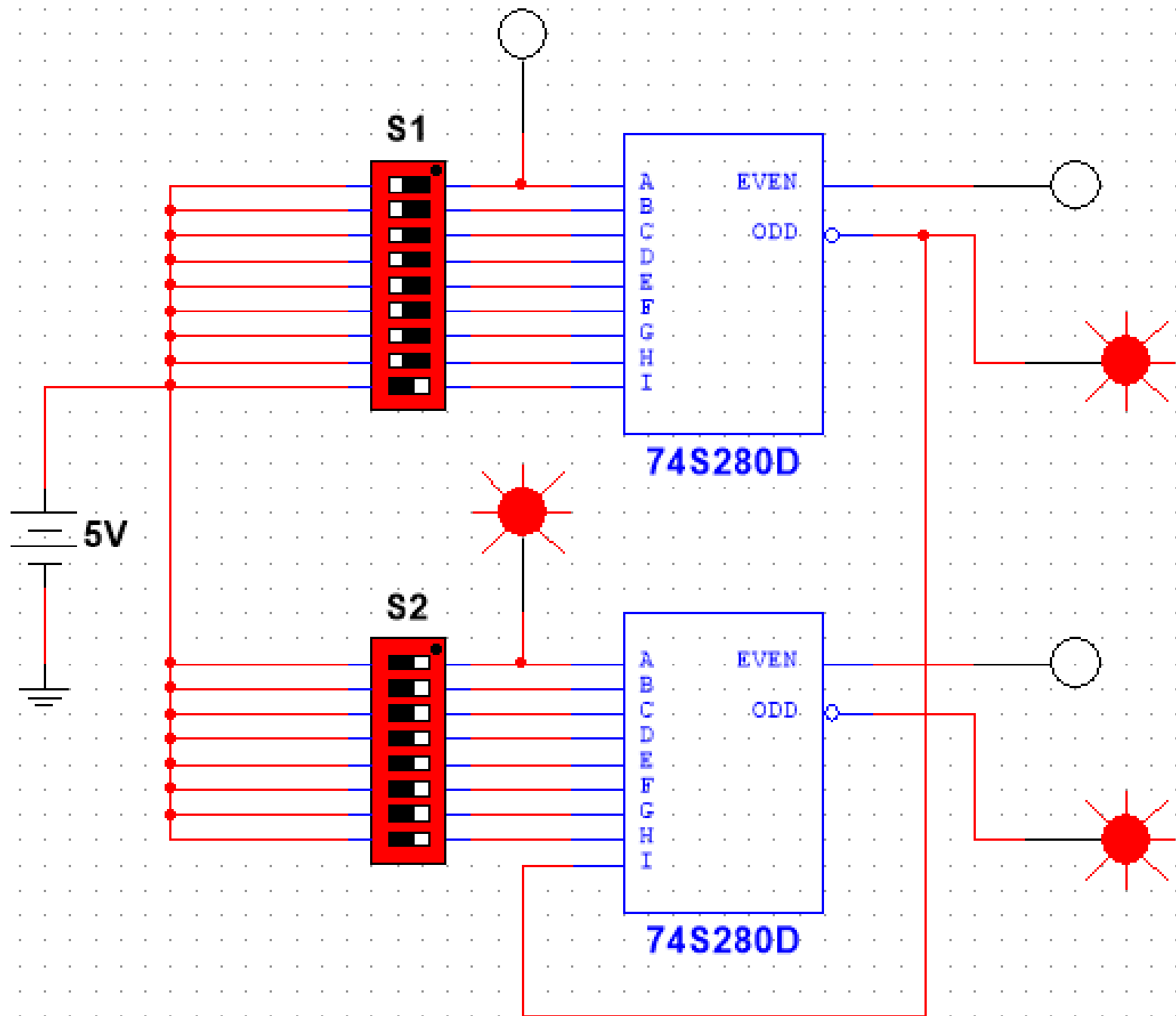
ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 17-BIT

ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ 17-BIT



**ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ
8-BIT (A, B, C, D, E, F, G, H)**

**ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΑΡΤΙΑΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ
8-BIT (A, B, C, D, E, F, G, H)
ΑΝΙΧΝΕΥΕΙ ΠΕΡΙΤΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ΛΑΘΩΝ**



**ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ
8-BIT (A, B, C, D, E, F, G, H)**

**ΕΛΕΓΚΤΗΣ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ
8-BIT (A, B, C, D, E, F, G, H)
ΑΝΙΧΝΕΥΕΙ ΠΕΡΙΤΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ΛΑΘΩΝ**

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	0	0
1	0	1	*	*

$$\text{Out} = A \bar{B} C$$

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	0	0
1	0	1	*	*

$$\text{Out} = A C$$

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	0	0
1	0	1	*	*

input comp- Sum
lement term

ABC = XX0 > XX1 > C
ABC = 0XX > 1XX > A
Out = A C (POS)

Αδιάφοροι Όροι στους Πίνακες Karnaugh

L1 \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	1
1	1	1	*	*

$$L1 = A + B + C$$

L2 \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	1
1	1	1	*	*

$$L2 = A + B$$

L3 \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	0
1	1	1	*	*

$$L3 = A + B C$$

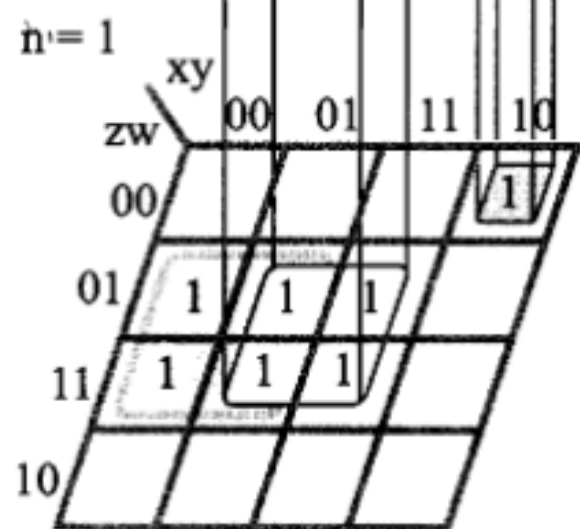
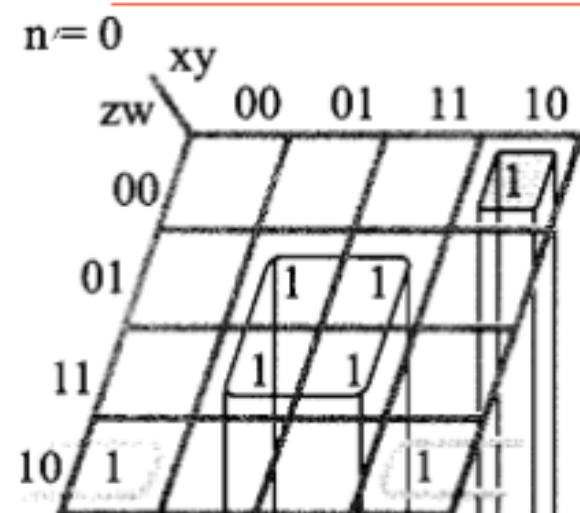
L4 \ BC	00	01	11	10
	0	0	0	0
1	1	1	*	*

$$L4 = A$$

L5 \ BC	00	01	11	10
	0	0	0	0
1	0	1	*	*

$$L5 = A C$$

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών



$A = 0$

		DE		D	
		00	01	11	10
BC	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

E

C

$A = 1$

		DE		D	
		00	01	11	10
BC	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

E

C

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$v=0$					
		yz			
		00	01	11	10
wx	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$v=1$					
		yz			
		00	01	11	10
wx	00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
	01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
	11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
	10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$$m_{28} = 11100$$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
	01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
	11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
	10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$x'y'z'$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	0

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	0
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$xy'z$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wX	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	0

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wX	00	1	1	0	0
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$w'x'y'$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	0

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	0
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$v'w'x'$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	0

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	0
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$vxyz'$

$v=0$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	1	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	0

$v=1$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	0
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	1	0	0	0

Χάρτης Πέντε (5) μεταβλητών

$$F(v,w,x,y,z) = x'y'z' + xy'z + w'x'y' + v'w'x' + vxyz'$$

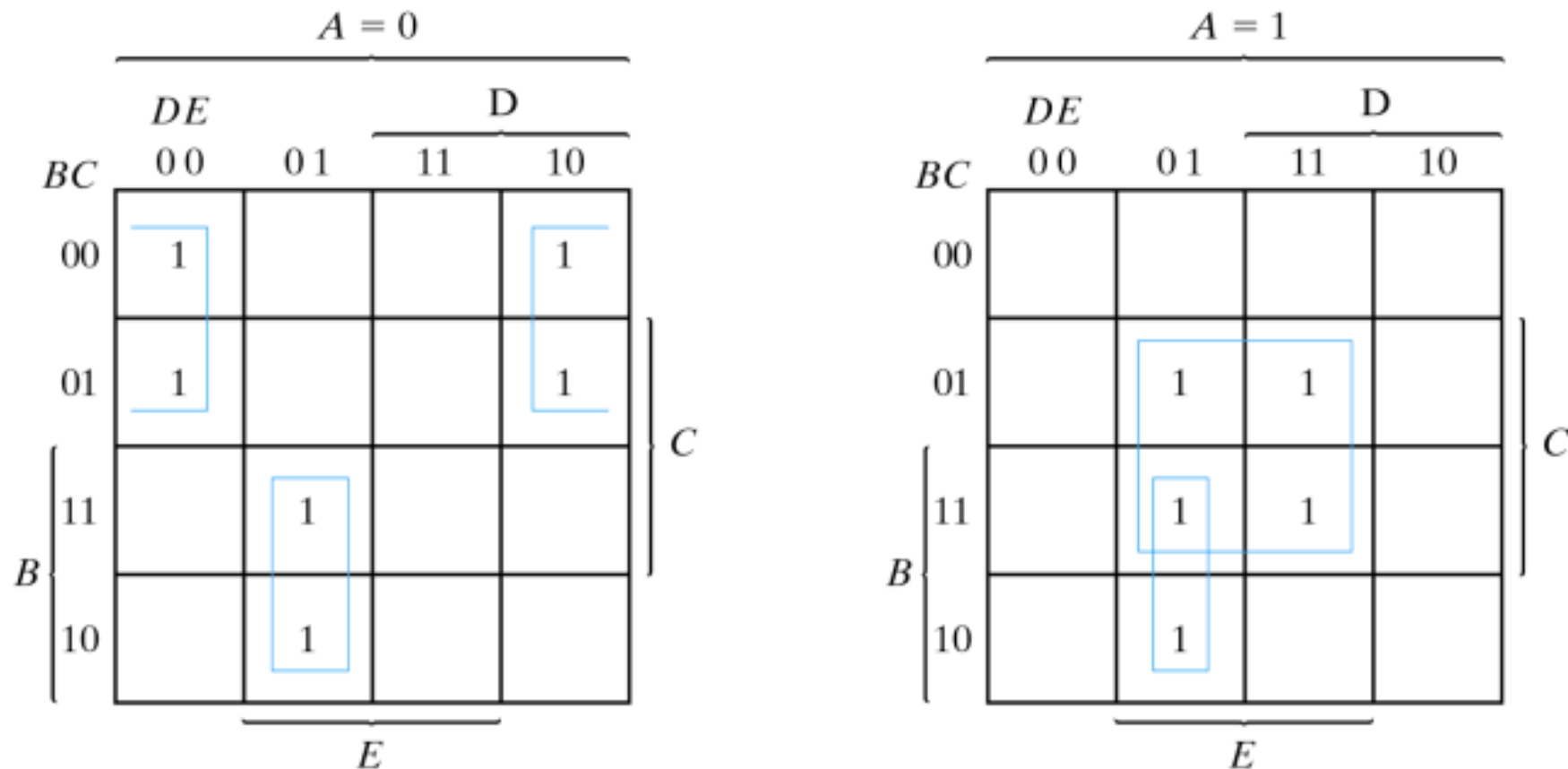
v=0

yz \ wx	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	0

v=1

yz \ wx	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	1
10	1	0	0	0

Παράδειγμα Χάρτη Πέντε (5) Μεταβλητών



$$F(A, B, C, D, E) = \Sigma(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

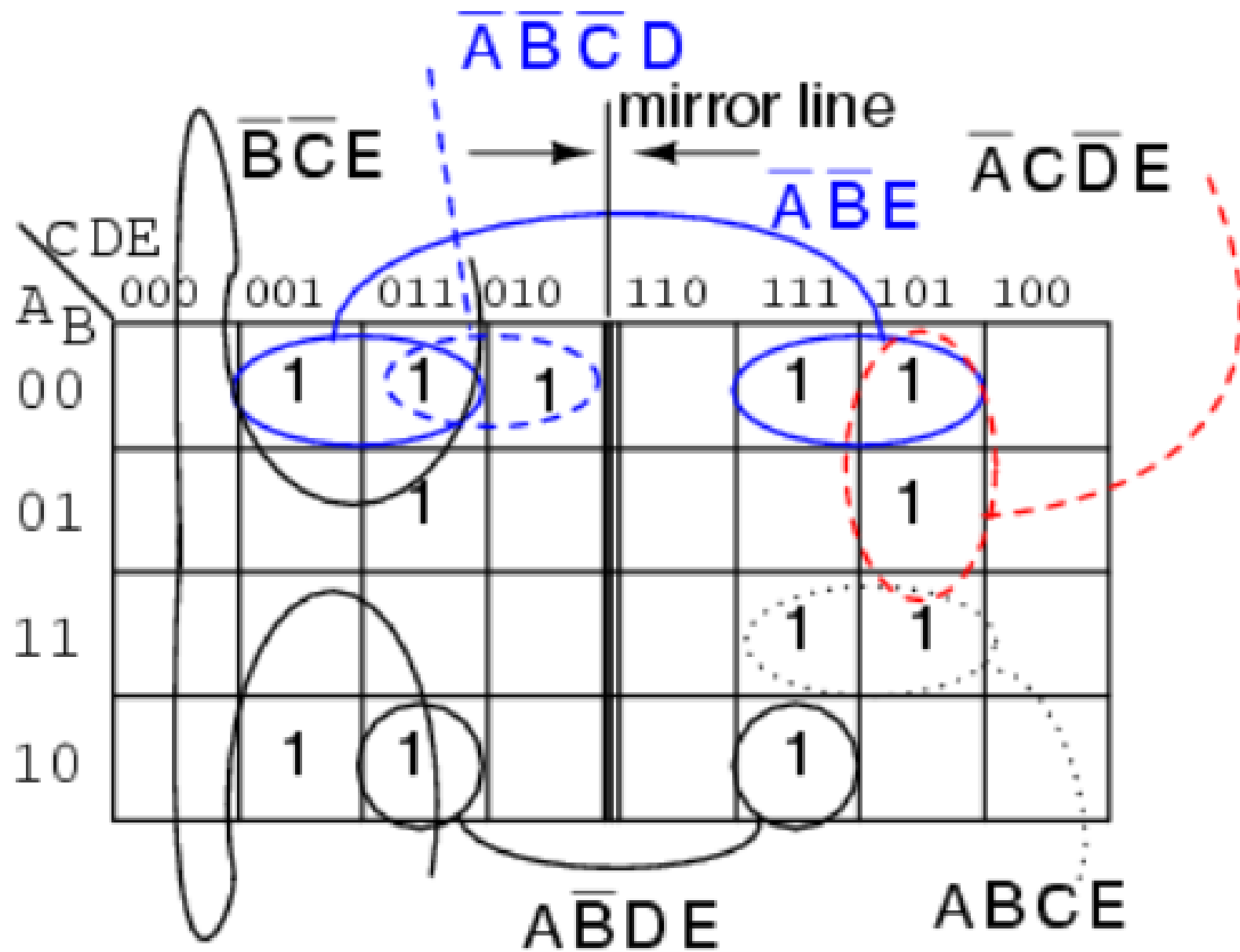
$$F(A, B, C, D, E) = A'B'E' + BD'E + ACE$$

CDE									
A	B	000	001	011	010	110	111	101	100
0	0								
0	1								
1	1								
1	0								

5- variable Karnaugh map (Gray code)

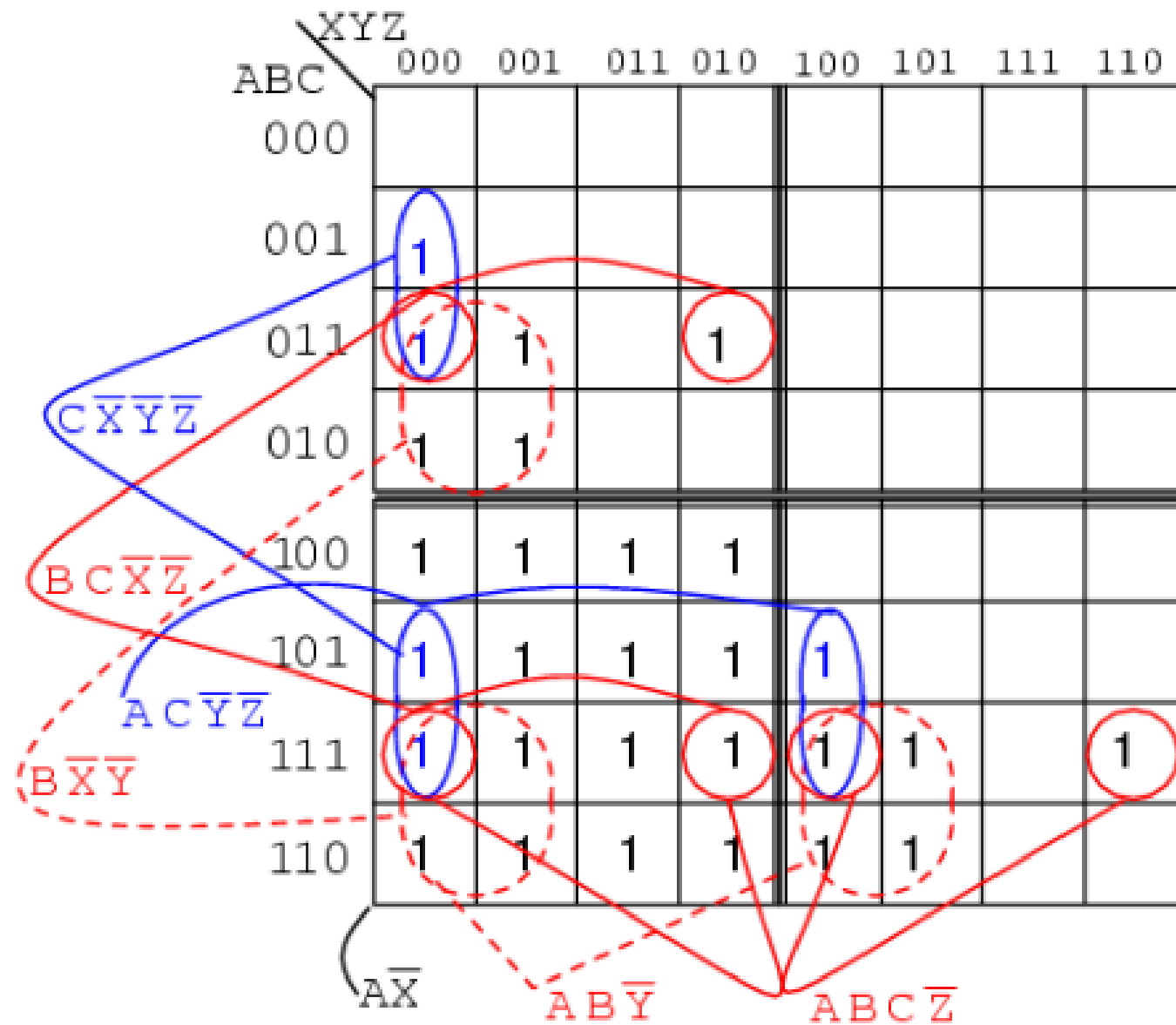
CDE									
A	B	000	001	011	010	100	101	111	110
0	0								
0	1								
1	1								
1	0								

5- variable Karnaugh map (overlay)



5- variable Karnaugh map (Gray code)





$$\text{Out} = A\bar{X} + AB\bar{Y} + B\bar{X}\bar{Y} + ABC\bar{Z} + AC\bar{Y}\bar{Z} + BC\bar{X}\bar{Z} + C\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

6- variable Karnaugh map (overlay)