Άλγεβρα Boole και Λογικές Πύλες

Βασικοί Ορισμοί

Δυαδικός Τελεστής (Binary Operator): σε κάθε ζεύγος από το Σ αντιστοιχίζει ένα στοιχείο του Σ.

Συνηθισμένα Αξιώματα (α, β, γ, 0) $\in$ Σ, $\otimes$, $\cdot$ δυαδικοί τελεστές :

1. Κλειστότητα ως προς δυαδικό τελεστή: $\alpha \otimes \beta \in \Sigma$

2. Προσεταιριστικός Νόμος: $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$

3. Αντιμεταθετικός Νόμος: $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

4. Ουδέτερο Στοιχείο: $\alpha \otimes 0 = 0 \otimes \alpha = \alpha$

5. Αντίστροφο: $\alpha \otimes \alpha' = 0$

6. Επιμεριστικός Νόμος: $\alpha \cdot (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \otimes (\alpha \cdot \gamma)$

Πεδίο: σύνολο στοιχείων μαζί με δύο δυαδικούς τελεστές όπου ο καθένας έχει τις ιδιότητες 1 έως 5 και που και οι δύο μαζί έχουν την ιδιότητα 6.

Παράδειγμα: Πεδίο Πραγματικών Αριθμών

Σύνολο: πραγματικών αριθμών Δυαδικοί τελεστές: +, •

+ ορίζει την πρόσθεση

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: 0

Αντίστροφο (-α) ορίζει την αφαίρεση

• ορίζει τον πολλαπλασιασμό

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: 1

Αντίστροφο (1/α) ορίζει τη διαίρεση

Επιμεριστικός νόμος: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Αξιωματικός Ορισμός Άλγεβρας Boole

Άλγεβρα Boole: είναι μία αλγεβρική δομή πάνω σε ένα σύνολο στοιχείων B μαζί με τους δυαδικούς τελεστές +, $\cdot$, αρκεί να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα (Huntington) :

1. Κλειστή ως προς τελεστή +, $\cdot$: $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in B$

2. Αντιμεταθετική ως προς +, $\cdot$: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

3. Ουδέτερο Στοιχείο 0(+), 1($\cdot$): $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$

4. Συμπλήρωμα ως προς +, $\cdot$: $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha \cdot \alpha' = 0$

5. Επιμεριστική ως προς +, $\cdot$: $\alpha \cdot(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$, $\alpha+(\beta\cdot\gamma)=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)$

6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in B$ με $\alpha \neq \beta$.

Διαφορές με συνήθη Άλγεβρα

1. Τα αξιώματα Huntington δεν περιλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο που όμως αποδεικνύεται ότι ισχύει.

2. Ο επιμεριστικός νόμος του + ως προς τον $\cdot$ ισχύει για την άλγεβρα Boole αλλά όχι για την συνήθη άλγεβρα.

3. Η άλγεβρα Boole δεν έχει προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά αντίστροφα άρα δεν υπάρχει αφαίρεση - διαίρεση.

4. Το συμπλήρωμα δεν υπάρχει στην συνήθη άλγεβρα.

5. Η συνήθης άλγεβρα ασχολείται με το απειροσύνολο των πραγματικών. Η Boole έχει δύο στοιχεία, τα 0, 1.

Ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων του B και των κανόνων λειτουργίας των τελεστών μπορούμε να σχηματίσουμε πολλές άλγεβρες Boole.

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

• Σύνολο στοιχείων: B = {0, 1}

• Δυαδικοί τελεστές: + (λογική πράξη Η), • (λογική πράξη ΚΑΙ), και τελεστής συμπληρώματος (λογική πράξη ΟΧΙ)

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

• Ισχύουν τα αξιώματα Huntington

Η δίτιμη άλγεβρα Boole

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y)+(x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1. Η κλειστότητα προφανώς ισχύει.
2. Τα ουδέτερα στοιχεία είναι 0 για το + και 1 για το • : (0+0=0, 0+1=1+0=1) και (1 • 1=1, 1 • 0=0 • 1=0)
3. Οι αντιμεταθετικοί νόμοι είναι προφανείς από τη συμμετρία.
4. Ο επιμεριστικός νόμος φαίνεται από τον πίνακα
5. Από τον πίνακα συμπληρώματος έχουμε x+x΄=1: 0+0΄=0+1=1, 1+1΄=1+0=1 και x • x΄=0: 0 • 0΄=0 • 1=0, 1 • 1΄=1 • 0=0
6. Η άλγεβρα έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία αφού 1≠0.

B={0, 1}

x	y	x΄	xy	x+y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

Δυϊσμός: Ότι ισχύει από τα αξιώματα Huntigton για το + (•) μπορεί να προκύψει από το • (+) με εναλλαγή τελεστών και ουδέτερων στοιχείων.

Μια αληθής αλγεβρική έκφραση παραμένει αληθής αν εναλλάξω τελεστές και ουδέτερα στοιχεία (ΚΑΙ-Η, 0-1)

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1

Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x'y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

Τα θεωρήματα αποδεικνύονται:

(α) με χρήση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ή

(β) με τη βοήθεια των πινάκων αλήθειας

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 1a: $x+x=x$

$x+x$	$=$	
	$(x+x)\cdot 1 =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
	$(x+x)\cdot(x+x') =$	αξίωμα $a+a' = 1$
	$x+xx' =$	αξίωμα $a+bc = (a+b)(a+c)$
	$x+0 =$	αξίωμα $a\cdot a' = 0$
	x	αξίωμα $a+0 = a$

Απόδειξη Θεωρημάτων

<u>Θεώρημα 1b:</u> $x \cdot x = x$ (δυικό του 1a)

$x \cdot x =$

$xx+0 =$	αξίωμα $a+0 = a$
$xx+xx' =$	αξίωμα $a \cdot a' = 0$
$x(x+x')=$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x \cdot 1 =$	αξίωμα $a+a' = 1$
x	αξίωμα $a \cdot 1 = a$

Απόδειξη Θεωρημάτων

<u>Θεώρημα 2a:</u> $x+1=1$

$x+1 =$

$1\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$(x+x')\cdot(x+1) =$	αξίωμα $a+a' = 1$
$x+x'\cdot 1 =$	αξίωμα $a+bc = (a+b)\cdot(a+c)$
$x+x' =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
1	αξίωμα $a+a' = 1$

<u>Θεώρημα 2b:</u> $x\cdot 0=0$ (δυικό του 2a)

Απόδειξη Θεωρημάτων

Θεώρημα 6a: $x+xy=x$

$x+xy =$

$x\cdot 1+x\cdot y =$	αξίωμα $a\cdot 1 = a$
$x\cdot(1+y) =$	αξίωμα $a(b+c) = ab+ac$
$x\cdot(y+1) =$	αξίωμα $a+b = b+a$
$x\cdot 1 =$	θεώρημα $a+1 = 1$
x	αξίωμα $a\cdot 1 = a$

Θεώρημα 6b: $x\cdot(x+y) = x$ (δυικό του 6a)

Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρένθεση
2. ΌΧΙ
3. ΚΑΙ
4. Η

<u>Παραδείγματα</u>

(x + y)΄ : 1) υπολογίζουμε το x + y.
2) παίρνουμε το συμπλήρωμα του αποτελέσματος.

x΄y΄ : 1) παίρνουμε τα συμπληρώματα των x και y.
2) παίρνουμε το ΚΑΙ των συμπληρωμάτων.

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές Η και ΚΑΙ, τον τελεστή ΌΧΙ, παρενθέσεις και ένα ίσον.

$F_1=xyz'$ είναι 1 μόνο αν $x=y=1$, $z=0$.

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

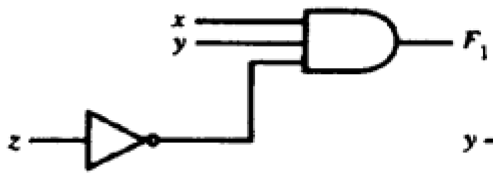
$F_1=xyz'$ $F_2=x+y'z$

$F_3=x'y'z+x'yz+xy'$

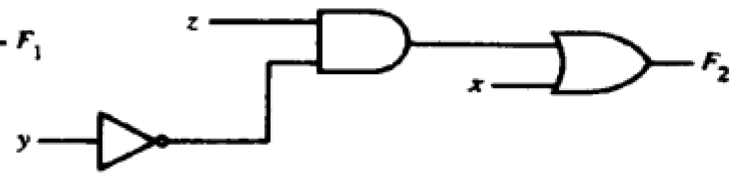
$F_4=xy'+x'z$

Η F_4 είναι ίδια με την F_3 ⇒ Υπάρχουν πολλές εκφράσεις για μια συνάρτηση

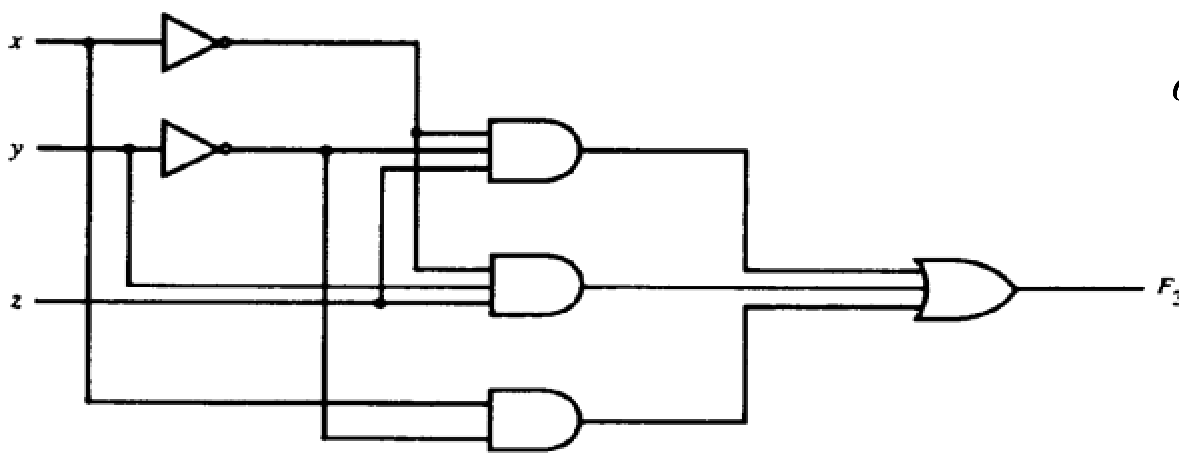
Υλοποίηση Συναρτήσεων Boole



(α) $F_1 = xyz'$



(β) $F_2 = x + y'z$



(γ) $F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$

(δ) $F_4 = xy' + x'z$

Εφόσον οι F_3, F_4 είναι ίσες και το κύκλωμα για την F_4 είναι μικρότερο συμφέρει να βρίσκουμε τις απλούστερες εκφράσεις με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών (ελαχιστοποίηση παραγόντων - όρων)

Παράγοντας Î είσοδος πύλης

Όρος Î πύλη

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Εύρεση απλούστερων εκφράσεων μιας συνάρτησης με χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned} F_3 &= x'y'z + x'yz + xy' \\ &= x'z\,(y' + y) + xy' \\ &= x'z1 + xy' \\ &= x'z + xy' \\ &= F_4 \end{aligned}$$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

1Æ $[(x' + z)' \cdot y] + [(x + y) \cdot z] =$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1Æ $[(x' + z)' \cdot y] + [(x + y) \cdot z] =$

2Æ $[(x')' \cdot z' \cdot y] \quad +$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1Æ $[(x' + z)' \cdot y] + [(x + y) \cdot z] =$

2Æ $[\overbrace{(x')' \cdot z'} \cdot y] + [\overbrace{x \cdot z + y \cdot z}]$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1Æ $[(x' + z)' \cdot y] + [(x + y) \cdot z] =$

2Æ $[(x')' \cdot z' \cdot y] + [x \cdot z + y \cdot z] =$

3Æ $(x \cdot z' \cdot y) + (x \cdot z + y \cdot z) =$

Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole

1Æ $[(x' + z)' \cdot y] + [(x + y) \cdot z] =$

2Æ $[(x')' \cdot z' \cdot y] + [x \cdot z + y \cdot z] =$

3Æ $(x \cdot z' \cdot y) + (x \cdot z + y \cdot z) =$

4Æ $x \cdot y \cdot z' + x \cdot z + y \cdot z$

Συμπλήρωμα Συνάρτησης Boole

• Το συμπλήρωμα F΄ μιας συνάρτησης F είναι η συνάρτηση εκείνη που ισούται με 0 όταν F = 1 και 1 όταν F = 0.

• Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης προκύπτει εφαρμόζοντας τα γενικευμένα θεωρήματα DeMorgan

$$(A + B + C + D + \ldots + F)' = A' B' C' D' \ldots F'$$

$$(ABCD\ldots F)' = A' + B' + C' + D' + \ldots + F'$$

εάν αλλάξουμε τα ΚΑΙ με τα Η και συμπληρώσουμε κάθε παράγοντα.

• Το συμπλήρωμα προκύπτει εύκολα εάν πάρουμε το δυϊκό της συνάρτησης και συγχρόνως το συμπλήρωμα κάθε παράγοντα.

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

Minterm (Ελαχιστόρος) : Το ΚΑΙ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα ελαχιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$x\,y\,z\,w, \quad x'\,y\,z'\,w, \quad x\,y'\,z\,w$$

Maxterm (Μεγιστόρος) : Το Η΄ n μεταβλητών στην κανονική ή συμπληρωματική τους μορφή.

Παραδείγματα μεγιστόρων με 4 μεταβλητές:

$$x + y + z + w, \quad x' + y + z' + w, \quad x + y' + z + w$$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για n μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κάθε ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου μεγιστόρου και αντίστροφα, π.χ. $m_0=x'y'z'$, $M_0=x+y+z$

Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

x y z	F	F'
0 0 0	1	0
0 0 1	1	0
0 1 0	0	1
0 1 1	0	1
1 0 0	1	0
1 0 1	0	1
1 1 0	1	0
1 1 1	1	0

$F = \Sigma(0, 1, 4, 6, 7)$

$F' = \Sigma(2, 3, 5)$

⬇

Όσοι ελαχιστόροι λείπουν από την F υπάρχουν στην συμπληρωματική της F'

Κανονικές Μορφές

Ιδιότητα: Οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ελαχιστόρων ή γινόμενο μεγιστόρων.

$$F_1=x'y'z+xy'z'+xyz \quad \begin{cases} F_1=m_1+m_4+m_7 \quad F_1'=m_0+m_2+m_3+m_5+m_6 \\ F_1=M_0M_2M_3M_5M_6 \quad F_1'=M_1M_4M_7 \end{cases}$$

x	y	z	Συνάρτηση f_1	Συνάρτηση f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Οι συναρτήσεις Boole που είναι εκφρασμένες ως άθροισμα ελαχιστόρων ή ως γινόμενο μεγιστόρων λέμε ότι είναι σε <u>κανονική μορφή</u>.

Συνάρτηση Boole σε Αθροισμα Ελαχιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε άθροισμα γινομένων.
2. Συμπληρώνουμε κάθε γινόμενο με τις μεταβλητές που λείπουν πολ/ζοντας με μία παράσταση (x + x΄) για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ’ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους ελαχιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned} F &= A + B'C \\ &= A(B + B')(C + C') + (A + A')B'C \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \\ &= A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

Συνάρτηση Boole σε Γινόμενο Μεγιστόρων

1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση σε γινόμενο αθροισμάτων χρησιμοποιώντας τον επιμεριστικό κανόνα: $x + yz = (x + y)(x + z)$.
2. Συμπληρώνουμε κάθε άθροισμα με τις μεταβλητές που λείπουν προσθέτοντας τον όρο (xx΄) για κάθε μεταβλητή που λείπει.

ή εναλλακτικά

1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης κατ’ευθείαν από την αλγεβρική έκφραση.
2. Παίρνουμε τους μεγιστόρους από τον πίνακα αλήθειας.

<u>Παράδειγμα</u>

$$\begin{aligned}
F &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) = (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z) = (x' + y + zz')(x + z + yy')(y + z + xx') \\
&= (x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z)(x + y' + z)(x + y + z)(x' + y + z) \\
&= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') = \\
&= M_0 M_2 M_4 M_5 = \Pi(0, 2, 4, 5)
\end{aligned}$$

Μετατροπή μεταξύ Κανονικών Μορφών

Βήματα μετατροπής από άθροισμα ελαχιστόρων σε γινόμενο μεγιστόρων:

1. Εκφράζω την F σε άθροισμα ελαχιστόρων. Έστω F(A,B,C)=Σ(1,4,5,6,7).

2. Βρίσκω την $F' = \Sigma(0,2,3) = m_0 + m_2 + m_3$.

3. Βρίσκω την F΄΄ ως εξής: $F'' = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' m_2' m_3' = M_0 M_2 M_3 = \Pi(0,2,3)$

Πίνακας Αληθείας για την $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

F(x,y,z)=Σ(1,3,6,7)

F(x,y,z)=Π(0,2,4,5)

Για να μετατρέψουμε τη μία κανονική μορφή στην άλλη, εναλλάσσουμε τα σύμβολα Σ και Π και χρησιμοποιούμε εκείνους τους δείκτες που λείπουν από την αρχική μορφή.

Πρότυπες Μορφές

Πρότυπες μορφές: Οι συναρτήσεις όπου οι όροι μπορούν να περιέχουν λιγότερους από n παράγοντες.

Άθροισμα γινομένων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους ΚΑΙ που ονομάζονται γινόμενα με έναν ή περισσότερους παράγοντες ο κάθε ένας. «Άθροισμα» λέμε το λογικό Η όλων αυτών των γινομένων.

Παράδειγμα:

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

Γινόμενο Αθροισμάτων: μια έκφραση Boole που περιέχει όρους Η που ονομάζονται αθροίσματα. Κάθε άθροισμα περιέχει έναν ή περισσότερους παράγοντες. Το γινόμενο αποτελεί το λογικό ΚΑΙ των αθροισμάτων.

Παράδειγμα:

$$F_2 = x(y' + z)(x' + y + z' + w)$$

Άλλες Λογικές Πράξεις

Για μία συνάρτηση n μεταβλητών έχουμε 2^n πιθανούς συνδυασμούς και άρα 2^n πιθανές εξόδους 0 ή 1. Άρα έχουμε $2^{(2)^\wedge n}$ πιθανούς συνδυασμούς των εξόδων και ισάριθμες πιθανές συναρτήσεις.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Σύμβολο τελεστή			$\cdot$	$/$		$/$		$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\odot$	$'$	$\subset$	$'$	$\supset$	$\uparrow$	

Κατηγορίες Συναρτήσεων:

1. Δυο σταθερές 0, 1.
2. Τέσσερις unary συμπληρώματος/μεταφοράς.
3. Δέκα συναρτήσεις με δυαδικούς τελεστές.

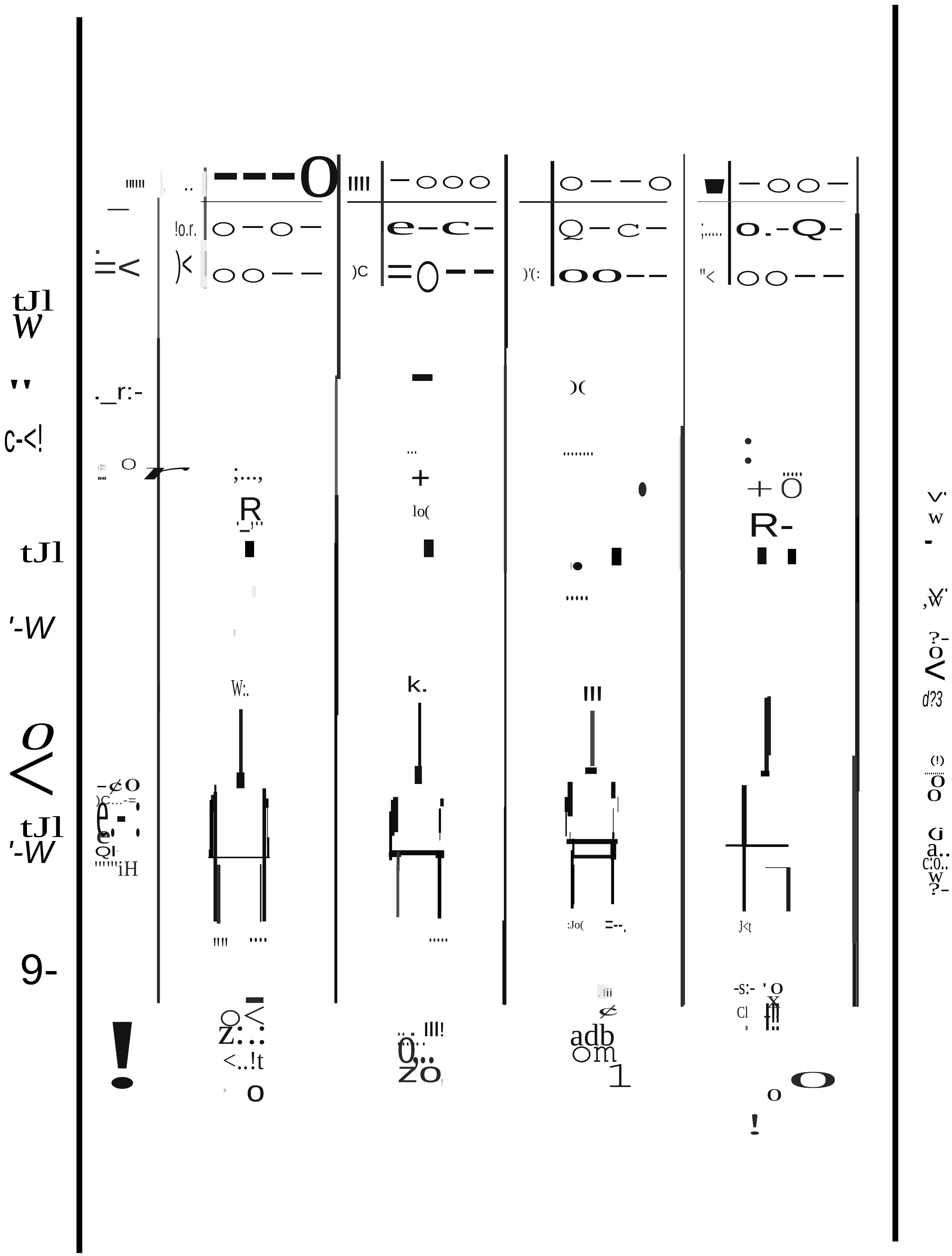
AAAcc; AoytK£c; Ilpa ctc;

Ex<ppooEaBoote yaa 11 16 ouvaptnoEl&uo pEtaPllmcA>v

IU'VO.QtTJOEL; Boole	l:u oA.o tEAEOtiJ	'Ovo a	:rxoA.Lo.
$F_0 = 0$		OuottEQTJ	AUO.OLXi} O'ta8EQG 0
F_1 =:xy	$x \cdot y$	KAI (AND)	x KAI y
$F_2 = xy'$	x/y	AJtO'tQO:rtfl	x aJ..J..a 6XL Y
F3:: x		MEtO.<pOQcl	x
$F = x'y$	y/x	AJtOtQ01tfi	y CXAAO 6XL x
Fs=Y		Me'ta<poea	y
$F_6 = xy' + x'y$	xEay	AJtOXAELOtLX6- 'H	x 'H y o.J..J..6: 6XL xaL ta 0U0
F7=$X + y$	x +y	'H (OR)	x 'H y
$F_8 = (x + y)'$	x J.y	OYTE-(NOR)	OXI- 'H
$F_9 = xy + x'y'$	x Qy	IOOOUV<lJ..lLCX*	x LO)V y
Fw= y'	y '	:Iv JtJ..*i)QW a.*	OXIy
$F_{11} = X + y'$	xcy	l:vv£rcaywyi)	Av y t6te x
Ft2 = x'	x'	*:Iv n:J..*i)QCJJ a	OXIx
$F_{13} = x' + y$	x :;:) y	l:vve:rtayroyt1	Av x t6tE y
Fl4 = (xy),	x jy	NAND (OXI-KAI)	OXI-KAI
Fts = 1		Taut6'tf)ta	l\uaotxil otaeeQa 1

* H Looouva!J.ta ("equivalence") Uyetcn en:(ofl xat "to6tt)ta" ("equality"), "ouj.mtwot)" ("coincidence")"axoxAELonx6-0YTE" ("exclusive NOR").

[illegible]



Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πύλες εκτός από τους αντιστροφείς και τους απομονωτές μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους. Βασική προϋπόθεση η λογική πράξη να είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Οι πράξεις ΚΑΙ και Η είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, αφού

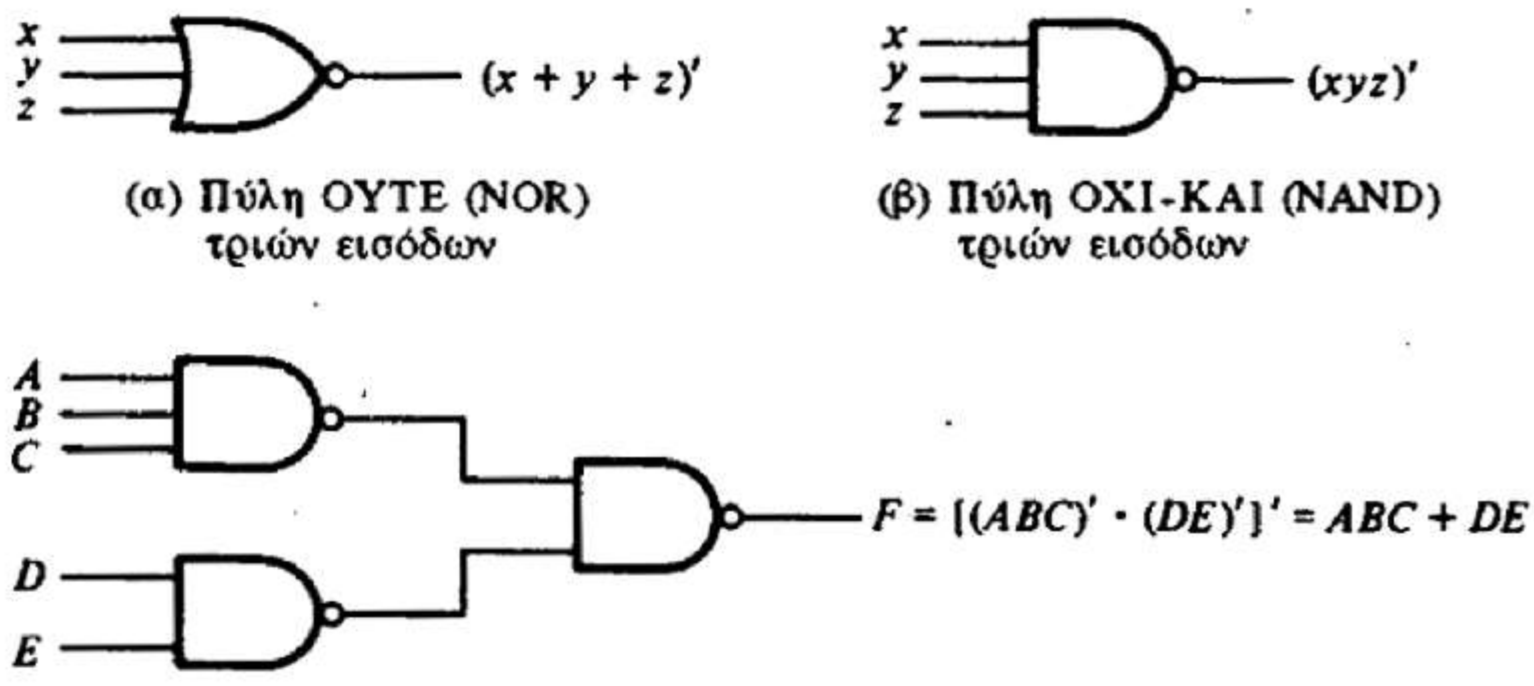
$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

επομένως οι πύλες ΚΑΙ και Η μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες από δύο εισόδους.

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πράξεις ΌΧΙ-ΚΑΙ και ΟΥΤΕ είναι αντιμεταθετικές αλλά όχι προσεταιριστικές.
Για αυτό τις ορίζω ως: $x\downarrow y\downarrow z=(x+y+z)'$, $x\uparrow y\uparrow z=(xyz)'$



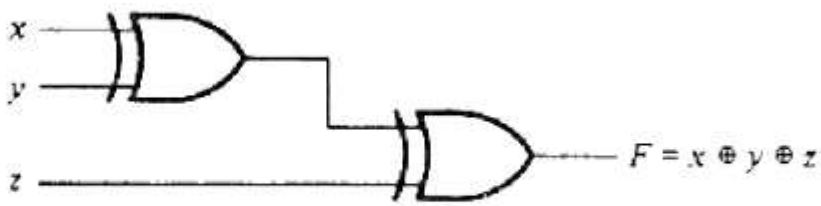
(α) Πύλη ΟΥΤΕ (NOR) τριών εισόδων

(β) Πύλη ΟΧΙ-ΚΑΙ (NAND) τριών εισόδων

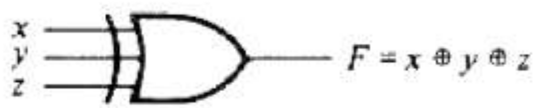
(γ) Πύλες ΟΧΙ-ΚΑΙ σε σειρά

Επέκταση σε περισσότερες Εισόδους

Οι πράξεις Αποκλειστικό-Η και ισοδυναμίας είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές.



(α) Χρησιμοποιώντας πύλες δύο-εισόδων



(β) Μία πύλη τριών εισόδων

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(γ) Πίνακας αληθείας

Η συνάρτηση Αποκλειστικό-Η είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν περιττό αριθμό άσσων.

Η συνάρτηση ισοδυναμίας είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή ισούται με 1 εάν οι μεταβλητές εισόδου έχουν άρτιο αριθμό άσσων.

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

ICs
- Συλλογή από πύλες διασυνδεδεμένες στο κύκλωμα
- Κεραμικό ή πλαστικό περίβλημα
- Ακροδέκτες (pins)

Επίπεδα Ολοκλήρωσης

Μικρής Κλίμακας	**SSI**:	10 πύλες / chip
Μεσαίας Κλίμακας	**MSI**:	10-100 πύλες / chip
Μεγάλης Κλίμακας	**LSI**:	100 - μερικές χιλιάδες πύλες / chip
Πολύ Μεγάλης Κλίμακας	**VLSI**:	<1.000.000 πύλες / chip
Πάρα Πολύ Μεγάλης Κλίμακας	**ULSI**:	>1.000.000 πύλες / chip

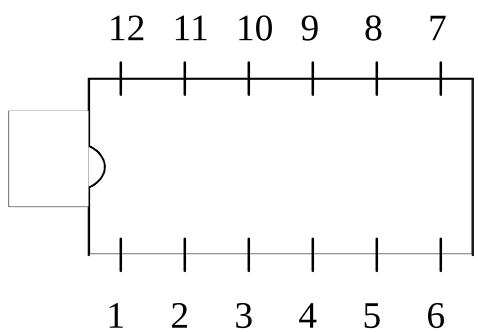
Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Οικογένειες ICs

- TTL Transistor-Transistor Logic: Πρότυπη Λογική Οικογ.
- ECL Emitter-Coupled Logic: Υψηλή Ταχύτητα Λειτουργίας.
- MOS Metal Oxide Semiconductor: Υψηλή Πυκνότητα.
- CMOS Complementary MOS: Χαμηλή Κατανάλωση.

Χαρακτηριστικά

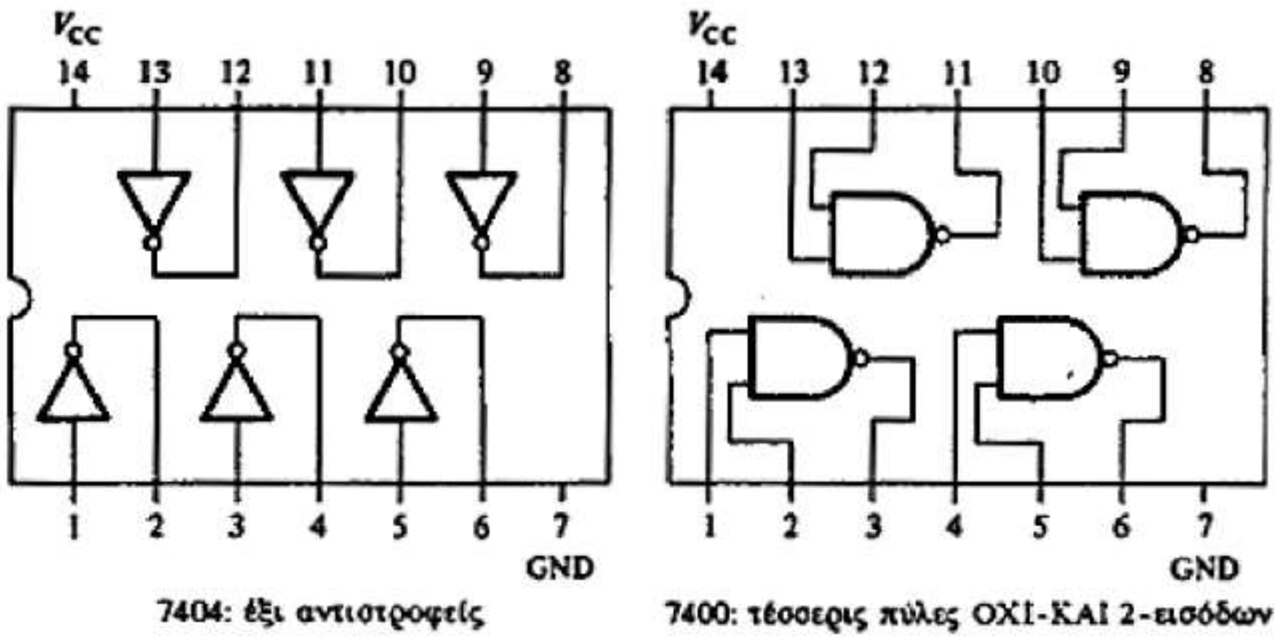
- Ικανότητα Οδήγησης
- Κατανάλωση Ισχύος
- Καθυστέρηση Διάδοσης
- Περιθώριο Θορύβου



Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

TTL 5400: Πλατιά ζώνη θερμοκρασιών (Στρατιωτική Χρήση)

TTL 7400: Βιομηχανικές εφαρμογές



0AOKA11PCDflEVa KuKAillflaTa

4ttupop£utpt'In.t\oytKnOtKoytvE•as TTL

l:£t.Qtc; TTL	IIQ66qta	IlagaBELy a
Standard TTL	74	7486
Y'\PTJAl1t; 'tax1rtrrrac; TTL	74H	74H86
Xo.tJ.nA.i)r; LOl('Uor; TIL	74L	74L86
Schottky TTL	745	74586
XaJ.tnA.iJc; Loxuoc; Schottky TTL	74LS	74LS86
IIQOflYJ.lEVa Schottky TTL	74AS	74AS86
IIQOflYJ.lEVa XaJJ.f)A:f)lox;uoSchottky TTL	74ALS	74ALS86

0AOKA11PCDflEVa KuKAillflaTa

DINAKAI 2-10
Aa(upopeItapttn AOVIKRS OaKoytVEIOS CMOS

ELQf CMOS	llQ68tJ.ta	TiaQabtLYf.lU
KAa<nxa CMOS	40	4009
Iti!J. ata OE Pins J.tE TTL	74C	74C04
Y"4'lltaxutllta xat ou at6. oE pins flE TIL	74HC	74HC04
Y'i"ltaxut,taxaL TJAtKtQtxO. aut.t ata flE TTL	74HCT	74HCT04