Κεφάλαιο 3

Σύνοψη
Αρχικά θα παρουσιαστούν τα αξιώματα και τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole. Κατόπιν ακολουθεί η παρουσίαση λογικών κυκλωμάτων με διακόπτες. Βασική είναι η παρουσίαση των ελαχιστοβάθμων και μεγιστοβάθμιων όρων και η χρήση του. Επίσης περιγράφονται αναλυτικά οι μέθοδοι ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης με τις κλασσικές μεθόδους (διαγράμματα Venn, Χάρτης Karnaugh, μέθοδος Quine Mc Cluskey).

Προαπαιτούμενη γνώση
Βασικές γνώσεις των αριθμητικής, χρήση των διαγραμμάτωνVenn. Παράλληλη και σε σειρά χρήση διακοπτών(γνώσεις από την θεωρία κυκλωμάτων).

3. Άλγεβρα Boole και ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

3.1. Εισαγωγή

Τα λογικά κυκλώματα, από τα οποία αποτελούνται οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, ξεχωρίζουν από όλα τα άλλα, επειδή οι τάσεις που χρησιμοποιούν έχουν μόνο δύο τιμές. Οι τάσεις αυτές θεωρούνται σαν αριθμητικές μεταβλητές, και ονομάζονται «λογικές» ή «δυαδικές».

Η άλγεβρα που ασχολείται με αυτές τις μεταβλητές καλείται *άλγεβρα λογικής ή άλγεβρα Boole*, από το όνομα του Άγγλου μαθηματικού George Boole, που ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με αυτή.

Η άλγεβρα Boole, όπως θα δούμε παρακάτω, βρίσκει πολλές εφαρμογές στην ηλεκτρονική και ιδιαίτερα στη σχεδίαση λογικών κυκλωμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών,-καθώς και διαφόρων άλλων συστημάτων αυτοματισμού.

Μια μεταβλητή στην άλγεβρα Boole γενικά παριστάνεται με κεφαλαία γράμματα, π.χ. «**V**», μπορεί μάλιστα, επειδή παίρνει δύο τιμές, να γράφεται ακόμα και σαν $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, ή σαν $\mathbf{V}$, $\overline{\mathbf{V}}$ ή αριθμητικά σαν **1**, **0**.

Καλό είναι να ληφθεί υπόψη ότι τα σύμβολα «0» και «1» χάνουν την αριθμητική τους έννοια που αποδίδουμε σε αυτά και παριστάνουν πλέον τις δύο λογικές καταστάσεις. Επομένως μια μεταβλητή της άλγεβρας Boole είναι μία δίτιμος μεταβλητή που μπορεί να παραστήσει δύο καταστάσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά με δυνατότητα μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη.

3.2. Παράσταση των μεταβλητών της Άλγεβρας Boole και πράξεις με αυτές

Οι λογικές μεταβλητές της άλγεβρας Boole, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, μπορούν να λάβουν δύο τιμές. Οι τιμές αυτές παριστάνουν δύο συγκεκριμένες καταστάσεις, ανάλογα με το προς επεξεργασία πρόβλημα. Οι λογικές τιμές «1» ή «0» μπορούν να παριστάνουν έναν κλειστό, ή ένα ανοικτό, διακόπτη (*Σχήμα 3.1*) ή αντίστοιχα το αληθές, ή το εσφαλμένο, μιας απάντησης. Επαναλαμβάνουμε ότι οι μεταβλητές της άλγεβρας Boole γράφονται με κεφαλαία γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου π.χ. A, B, C, D, . . .

Σχήμα 3.1. *Παράσταση λογικών τιμών στην άλγεβρα Boole με διακόπτες*

Εάν έχουμε μια μεταβλητή, π.χ. την **A** και η αρχική τιμή της είναι ίση με «1», τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $\mathbf{A = 1}$ και συνεπώς $\overline{\mathbf{A}} \mathbf{= 0}$. Η παύλα πάνω από το χαρακτήρα, που συμβολίζει τη μεταβλητή, δηλώνει την άρνηση της λογικής μεταβλητής, ή αλλιώς το *συμπλήρωμα* αυτής.

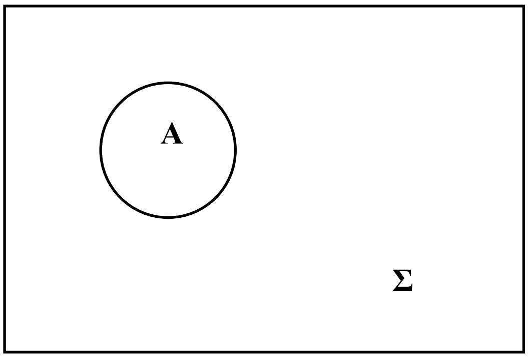
Ένας άλλος τρόπος παράστασης των μεταβλητών του Boole είναι με τη βοήθεια της άλγεβρας των συνόλων και τη χρησιμοποίηση των διαγραμμάτων Venn. Το κυρίως σύνολο Σ παριστάνεται σαν το σύνολο όλων των σημείων στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου. Τα υποσύνολα του Σ παριστάνονται σαν σύνολα σημείων του Σ, που βρίσκονται μέσα σε κύκλους.

Στο *σχήμα 3.2* με το υποσύνολο A παριστάνεται η λογική μεταβλητή A μέσα στο σύνολο Σ. Οι μεταβλητές του Boole, παριστάνονται, επίσης, και με ευθύγραμμα τμήματα, όπως θα δούμε παρακάτω.

Λογική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση που αποτελείται από συνδυασμούς λογικών μεταβλητών, όπως π.χ. **f = A + B**, και θα συμβολίζεται με το γράμμα «T» ή με μικρά λατινικά γράμματα όπως f, g κ.λπ.

Η τελική τιμή μιας λογικής συνάρτησης θα είναι το «0» ή το «1», ανάλογα με τις τιμές των μεταβλητών που συμμετέχουν σ' αυτήν.

Οι πράξεις στην άλγεβρα Boole βασικά είναι δύο και συμβολίζονται με το «+» (λογική πρόσθεση) και με το «·» (λογικό γινόμενο).



Σχήμα 3.2. *Παράσταση λογικής μεταβλητής με τη βοήθεια συνόλων*

Σε περίπτωση που, για την κατανόηση της άλγεβρας Boole χρησιμοποιούμε σύνολα, οι λογικές πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου εκφράζονται με τα σύμβολα της ένωσης («$\cup$») ή της τομής («$\cap$») δύο συνόλων αντίστοιχα.

Τέλος, σε περίπτωση παράστασης των μεταβλητών του **Boole** με διακόπτες, οι λογικές πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου εκφράζονται με τη λογική πράξη «OR» και τη λογική πράξη «AND». Το λογικό άθροισμα παριστάνεται με διακόπτες συνδεσμολογημένους παράλληλα, ενώ το λογικό γινόμενο με διακόπτες συνδεσμολογημένους σε σειρά. *(Nashelsky, 1994; Κοσσίδας, 1996; Givone, 2002; Katz, 2005; Wakerly, 2006; Balabanian, & Carlson, 2007; Maxfield, 2009; Tocci, et al., 2010; Mano, & Ciletti, 2014)*

3.3. Αξιώματα της Άλγεβρας Boole

Η *άλγεβρα Boole* στηρίζεται σε μια σειρά αξιωμάτων, τα οποία παραθέτουμε παρακάτω. Τα αξιώματα αυτά δεν αποτελούν, βεβαίως, το μοναδικό τρόπο ορισμού της. Μας επιτρέπουν όμως να την κατανοήσουμε μ' έναν απλό και εύκολο τρόπο. Για την ανάπτυξη της άλγεβρας Boole θεωρούμε μία κλάση Σ, που περιλαμβάνει τα στοιχεία (λογικές μεταβλητές) Α, Β, ... Χ κ.λπ., όπως, επίσης, και τα στοιχεία που προκύπτουν από τις πράξεις μεταξύ των στοιχείων που συμπεριλαμβάνονται στην κλάση Κ. Θεωρούμε ακόμα ότι η κλάση Κ περιέχει πάντοτε περισσότερα του ενός στοιχεία. Τόσο τα αξιώματα της άλγεβρας Boole, όσο και τα θεωρήματα που θα δούμε στη συνέχεια χαρακτηρίζονται από μία ιδιότητα που ονομάζεται *δυϊκότητα*. Εξακολουθούν, δηλαδή, να ισχύουν και στην περίπτωση που τα σύμβολα «+» και «.», όπως, επίσης και οι ποσότητες «1» και «0», αντιμετατεθούν.

1^Ο **Αξίωμα:** Εάν $\mathbf{X \neq 1}$ θα είναι $\mathbf{X=0}$ ή το δυικό εάν $\mathbf{X \neq 0}$ θα είναι $\mathbf{X=1}$

2^Ο **Αξίωμα:** Οι πράξεις λογικής πρόσθεσης και γινομένου είναι αντιμεταθετικές: $\mathbf{X+Y=Y+X}$ ή η δυική της $\mathbf{X \cdot Y = Y \cdot X}$

3^Ο **Αξίωμα:** Για κάθε διμελή πράξη «+» ή «·» υπάρχει ένα στοιχείο «0» ή «1» τέτοιο ώστε: $\mathbf{X+0=X}$ και $\mathbf{X \cdot 1=X}$

4^Ο **Αξίωμα:** Για κάθε διμελή πράξη **«+»** ή **«·»** υπάρχει ένα στοιχείο **«1»** ή **«0»** τέτοιο ώστε: $\mathbf{X+1=}$ ή η δυική της $\mathbf{X \cdot 0=0}$

5^Ο **Αξίωμα:** Το λογικό άθροισμα (γινόμενο) μιας μεταβλητής με τη συμπληρωματική της ισούται με 1 (0). $\mathbf{X+\bar{X}=1}$ και $\mathbf{X \cdot \bar{X}=0}$

6^Ο **Αξίωμα:** Κάθε πράξη μεταξύ λογικών μεταβλητών είναι επιμεριστική.
$\mathbf{X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z}$ ή η δυική της $\mathbf{X + (Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)}$

3.4. Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Για την απόδειξη των θεωρημάτων της άλγεβρας Boole μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικούς τρόπους. Ο κλασικός τρόπος απόδειξης στηρίζεται στα αξιώματα της άλγεβρας Boole, που αναφέραμε και στην εξίσωση των δύο μερών του θεωρήματος, με κατάλληλους μετασχηματισμούς.

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι να θέσουμε σε κάθε μεταβλητή όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να λάβει και να εξακριβώσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για όλες αυτές (επαγωγικός τρόπος). Κατά τον επαγωγικό τρόπο απόδειξης χρησιμοποιούνται πολλές φορές κατάλληλοι συνδυαστικοί πίνακες, οι οποίοι είναι γνωστοί με το όνομα **«πίνακες αλήθειας»**.

Ένας τελευταίος τρόπος απόδειξης χρησιμοποιεί τα διαγράμματα Venn, ή ακόμα απλά ηλεκτρικά κυκλώματα με διακόπτες. (*Nelson, et al., 1995; Holdsworth, & Woods, 2002; Predko, 2007; Godse, &Godse, 2011; Mano, & Ciletti, 2014; Pritchard, 2015)*

3.4.1. Θεώρημα 1ο

$\mathbf{X+X=X}$ **(3-1)** ή το δυικό του $\mathbf{X \cdot X = X}$ **(3-2)**

Απόδειξη

$\mathbf{X+X=(X+X)\cdot 1=}$ αξίωμα 3^{O}

$\mathbf{=(X+X)\cdot(X+\overline{X})=}$ αξίωμα 5^{O}

$\mathbf{=X\cdot X+X\cdot\overline{X}+X\cdot X+X\cdot\overline{X}=}$ αξίωμα 3^{O}

$\mathbf{=X\cdot X+X\cdot\overline{X}+X\cdot X+0=}$

$\mathbf{=X\cdot(X+\overline{X})+X\cdot X=}$ αξίωμα 5^{O}

$\mathbf{=X+X\cdot X=}$

$\mathbf{=X\cdot(1+X)=}$ αξίωμα 4^{O}

$\mathbf{=X\cdot 1=X}$ αξίωμα 3^{O}

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται ευκολότερα με επαγωγικό τρόπο, δίνοντας, δηλαδή, όλες τις δυνατές τιμές στις μεταβλητές που συσχετίζει.

3.4.2. Θεώρημα 2ο

$\mathbf{\overline{\overline{(X)}}=X}$ **(3-3)**

Απόδειξη

$\mathbf{X+\overline{X}=1}$ και $\mathbf{X\cdot\overline{X}=0}$ αξίωμα 5^{O}

Με βάση το 5^{O} αξίωμα είναι προφανές ότι το **X** είναι συμπληρωματικό του $\mathbf{\overline{X}}$. Το θεώρημα επίσης, αποδεικνύεται επαγωγικά συμπληρώνοντας ένα πίνακα αλήθειας.(Βλέπε *πίνακα 3.1*).

$\mathbf{X}$	$\mathbf{\overline{X}}$	$\mathbf{\overline{\overline{X}}}$
0	1	0
1	0	1

Πίνακας 3.1. *Απόδειξη του θεωρήματος* $\mathbf{\overline{\overline{X}}=X}$

3.4.3. Θεώρημα 3ο

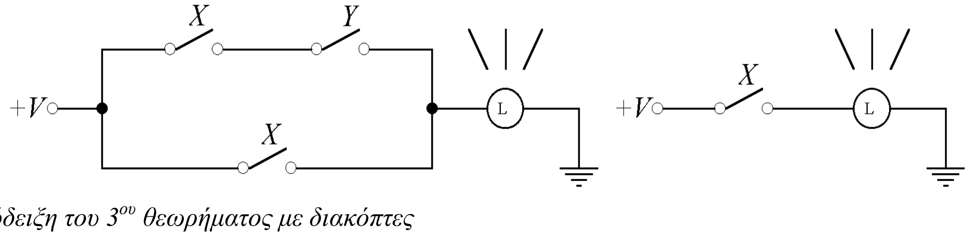
$\mathbf{X+X\cdot Y=X}$ **(3-4)** ή το δυικό του $\mathbf{X\cdot(X+Y)=X}$ **(3-5)**

Απόδειξη

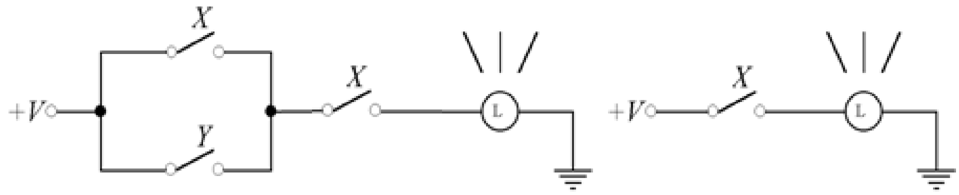
$\mathbf{X+X\cdot Y=X\cdot(1+Y)=X}$ και το δυικό του

$\mathbf{X\cdot(X+Y)=X\cdot X+X\cdot Y=X+X\cdot Y=X\cdot(1+Y)=X}$

Η απόδειξη των ανωτέρω μπορεί να γίνει και με τους διακόπτες που απεικονίζονται στα *σχήματα 3.3* και *3.4.*



Σχήμα 3.3. *Απόδειξη του 3ου θεωρήματος με διακόπτες*



Σχήμα 3.4 *Απόδειξη της δυικής μορφής 3^{ου} θεωρήματος με διακόπτες*

Πράγματι τα αντίστοιχα ζεύγη κυκλωμάτων είναι ισοδύναμα.

3.4.4. Θεώρημα 4ο

$$\mathbf{Y\cdot(X+\overline{Y})=X\cdot Y} \quad \textbf{(3-6)} \text{ ή το δυικό του } \mathbf{Y+(X\cdot\overline{Y})=X+Y} \quad \textbf{(3-7)}$$

Απόδειξη

$$\mathbf{Y\cdot(X+\overline{Y})=X\cdot Y+\overline{Y}\cdot Y=X\cdot Y+0=X\cdot Y}$$

Η απόδειξη της δυικής μορφής του θεωρήματος είναι λίγο περίπλοκη. Το πρώτο μέλος του θα ισούται με:

$$\mathbf{Y+X\cdot\overline{Y}=Y\cdot(X+\overline{X})+X\cdot\overline{Y}=X\cdot Y+\overline{X}\cdot Y+X\cdot\overline{Y}=X\cdot(Y+\overline{Y})+\overline{X}\cdot Y=X+\overline{X}\cdot Y}$$

Το δεύτερο μέλος του θα ισούται με:

$$\mathbf{X+Y=X+Y\cdot(X+\overline{X})=X+X\cdot Y+\overline{X}\cdot Y=X\cdot(1+X)+\overline{X}\cdot Y=X+\overline{X}\cdot Y}$$

Επειδή, όπως προκύπτει το πρώτο μέλος ισούται με το δεύτερο, το θεώρημα ισχύει.

3.4.5. Θεώρημα 5ο- (Θεωρήματα De Morgan)

$$\mathbf{\overline{X+Y}=\overline{X}\cdot\overline{Y}} \quad \textbf{(3-8)} \text{ ή το δυικό του } \mathbf{\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}} \quad \textbf{(3-9)}$$

Απόδειξη

Η πρώτη ισότητα λέει ότι το $\mathbf{X+Y}$ είναι το συμπλήρωμα του $\mathbf{\overline{X}\cdot\overline{Y}}$. Επομένως βάσει του 5^{ου} αξιώματος πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=0}$$

$$\mathbf{(X+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})=1}$$

Η πρώτη ισότητα αποδεικνύεται εύκολα. Πράγματι:

$$\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}\cdot\overline{Y})=X\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y}+Y\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y}=0+0=0}$$

Για τη δεύτερη ισότητα έχουμε:

$$\mathbf{(X+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})=(X\cdot\overline{Y}+Y)+(\overline{X}\cdot\overline{Y})}=X\cdot\overline{Y}+Y+\overline{X}\cdot\overline{Y}=\overline{Y}\cdot(X+\overline{X})+Y$$

$$\mathbf{=\overline{Y}\cdot 1+Y=\overline{Y}+Y=1}$$

Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται θεώρημα του De Morgan. Η απόδειξή του είναι ευκολότερη με τα διαγράμματα του Venn. Τα *σχήματα 3.5γ, 3.5δ* που ακολουθούν προκύπτουν ισοδύναμα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, με το θεώρημα του De Morgan είναι πάντοτε δυνατόν, όταν δοθεί ένα κύκλωμα, να βρεθεί ένα άλλο, το οποίο να έχει συμπληρωματικά χαρακτηριστικά. Το γεγονός αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον, γιατί, σε πολλές περιπτώσεις το συμπληρωματικό κύκλωμα είναι κατά πολύ απλούστερο, με συνέπεια την ευκολότερη υλοποίησή του.

3.4.6. Θεώρημα 6ο

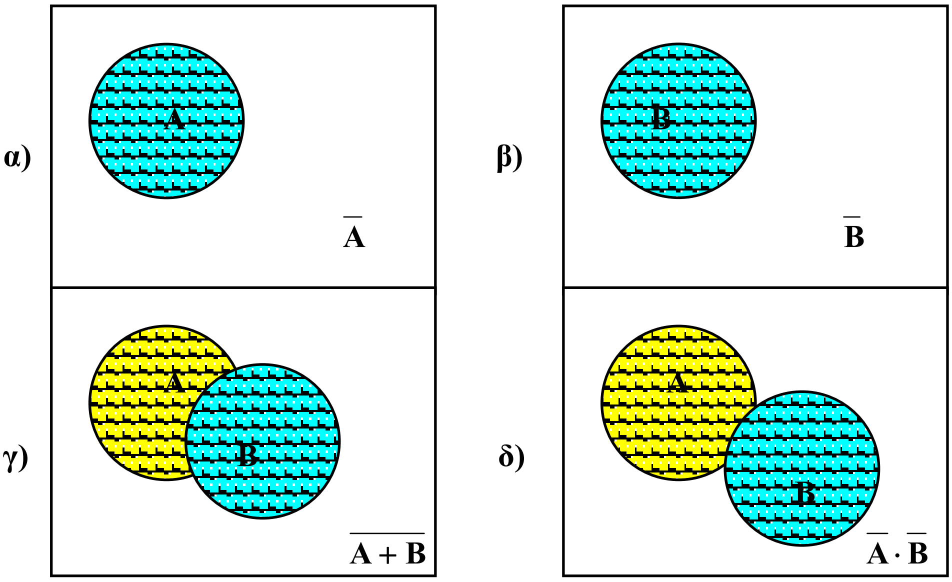
$$\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}+Z)=X\cdot Z+\overline{X}\cdot Y} \quad \textbf{(3-10)}$$

Απόδειξη

$$\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}+Z)=X\cdot\overline{X}+X\cdot Z+\overline{X}\cdot Y+Y\cdot Z=}$$

$$=0+X\cdot Z+\overline{X}\cdot Y+Y\cdot Z\cdot(X+\overline{X})=X\cdot Z\cdot(1+Y)+\overline{X}\cdot Y\cdot(1+Z)=X\cdot Z+\overline{X}\cdot Y$$

Άρα αρχικά κανονικοποιώ τον τρίτο όρο και χωρίζω σε νέα ζεύγη για την τελική απλοποίηση.



Σχήμα 3.5. *Απόδειξη του θεωρήματος De Morgan*

3.4.7. Θεώρημα 7ο– Γενίκευση του θεωρήματος De Morgan

Γενικεύοντας το θεώρημα του De Morgan σε **n** μεταβλητές, έχουμε:

$$\mathbf{\overline{(X+Y+Z+\ldots)} = \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z}\cdot\ldots} \qquad \textbf{(3-11)}$$

$$\mathbf{\overline{(X\cdot Y\cdot Z\cdot\ldots)} = \overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}+\ldots} \qquad \textbf{(3-12)}$$

Γενικεύοντας, φθάνουμε στο *θεώρημα του Shannon*, το οποίο δίνεται από την παρακάτω παράσταση:

$$\mathbf{\overline{f(X_1,X_2,...,X_n,+,.)} = f(\overline{X}_1,\overline{X}_2,...,\overline{X}_n,.,+)}$$

όπου με **f ( )** παρίσταται μια λογική συνάρτηση, δηλαδή ένας συνδυασμός μεταβλητών $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, **.....** και σημείων «.» «+».

3.4.8. Θεώρημα 8ο

Μια συνάρτηση **n** λογικών μεταβλητών μπορεί να εκφρασθεί με διαφόρους τρόπους όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\mathbf{f(X_n) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) =}$$
$$\mathbf{= X_1\cdot f(1, X_2, \ldots X_n) + \overline{X_1}\cdot f(0, X_2, \ldots, X_n) =}$$
$$\mathbf{= [X_1 + F(0, X_2, \ldots, X_n)]\cdot[\overline{X_1} + F(1, X_2, \ldots, X_n)]} \qquad \textbf{(3-13)}$$

Οι δύο τελευταίες ισότητες αποδεικνύονται ισοδύναμες με την επαγωγική μέθοδο. Αντικαθιστούμε στο **X** τιμές 0 και 1. Αυτό ονομάζεται *θεώρημα της επέκτασης* (expansion theorem).

Στηριζόμενοι σε αυτό το θεώρημα, μπορούμε να συνάγουμε εκφράσεις χρήσιμες για την άλγεβρα Boole.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{X_1 + f(X_1, X_n) = X_1 + f(0, X_n)} \qquad \textbf{(3-14)}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την *ισότητα 3-14,* αποδεικνύουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$\mathbf{X+Y+(X+\overline{Y})\cdot(\overline{X}+Y)=1}$, *πράγματι κάνοντας πράξεις έχουμε:*

$$X+Y+(X+\overline{Y})\cdot(\overline{X}+Y)=X+Y+(0+\overline{Y})\cdot(\overline{X}+0)= X+Y+\overline{X}\cdot\overline{Y}=(X+Y)+\overline{X+Y}=1$$

3.5. Μελέτη της Άλγεβρας με λογικά κυκλώματα

Ονομάζουμε *λογικά κυκλώματα* εκείνα τα κυκλώματα που αποτελούνται από έναν ή περισσότερους ακροδέκτες εισόδου και έναν ή περισσότερους ακροδέκτες εξόδου, και χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι σε κάθε ακροδέκτη μπορούν να εφαρμοσθούν δύο προκαθορισμένες τιμές τάσεων π.χ. «0» ή «V». Ο αριθμός των ακροδεκτών εισόδου και εξόδου μπορεί να είναι διαφορετικός.

Τυχόν τάσεις διαφορετικής τιμής στο κύκλωμα δηλώνουν ότι δεν εργάζεται σωστά, παρουσιάζει δηλαδή κατασκευαστικές ανωμαλίες.

Η κατασκευή των λογικών κυκλωμάτων μπορεί να γίνει τόσο με διακόπτες όσο και με διόδους, τρανζίστορ, ολοκληρωμένα κυκλώματα, PLA κ.λπ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε περισσότερο στα κυκλώματα διακοπτών. Με βάση αυτά θα μελετήσουμε διάφορες λογικές συναρτήσεις. Θα αφήσουμε για το επόμενο κεφάλαιο την ανάλυση των πρακτικών κυκλωμάτων των υπολογιστών, που κατασκευάζονται με ηλεκτρονικά εξαρτήματα.

Τα λογικά κυκλώματα, των οποίων οι τάσεις των εξόδων τους είναι συναρτήσεις τόσο της κατασκευαστικής δομής του κυκλώματος τους όσο και των τιμών εισόδου που επιβάλλονται την ίδια χρονική στιγμή, ονομάζονται **«συνδυαστικά κυκλώματα»** (combinational circuits). Εάν όμως οι τιμές των τάσεων εξόδου είναι συναρτήσεις και των προηγουμένων τιμών των τάσεων εισόδου ή εξόδου, τότε λέμε ότι είναι λογικά **«ακολουθιακά κυκλώματα»** (sequential circuits). Τα ακολουθιακά κυκλώματα θα αναφερθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Για τη μελέτη ενός κυκλώματος, πρέπει να ληφθούν υπόψη ορισμένες προϋποθέσεις έτσι, ώστε να ακολουθηθεί η κατάλληλη διαδικασία και να επιτευχθεί το βέλτιστο κύκλωμα. Η διαδικασία μελέτης αναφέρεται παρακάτω, χωρίς όμως αυτό να προδικάζει την πιστή της εφαρμογή. Έχει αποδειχθεί ότι η πείρα του μελετητή μπορεί να παρακάμψει ορισμένες λεπτομέρειες και να προσθέσει ορισμένα απαραίτητα στοιχεία στο όλο κύκλωμα κατά τη διάρκεια της μελέτης του. Οι ενέργειες που πρέπει να γίνουν συνοψίζονται παρακάτω:

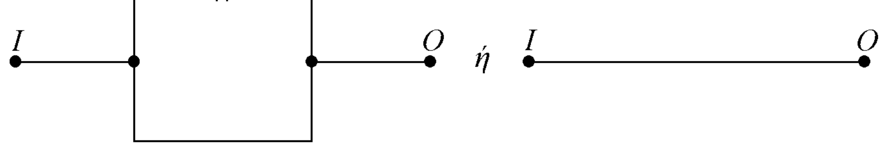
α. Καθορισμός της συνάρτησης μεταφοράς (συνάρτηση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο) ή λογικής συνάρτησης του υπό μελέτη κυκλώματος.
β. Ελαχιστοποίηση και απλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς.
γ. Σύνθεση του λογικού κυκλώματος με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς.
δ. Μελέτη και κατασκευή του πραγματικού ηλεκτρονικού κυκλώματος από το λογικό κύκλωμα που φτιάξαμε.
ε. Προσθήκες - συμπληρώσεις στο ηλεκτρικό κύκλωμα έτσι, ώστε να αντισταθμιστούν απώλειες, παραμορφώσεις και λοιπά προβλήματα των ηλεκτρονικών εξαρτημάτων.

3.6. Λογικά κυκλώματα διακοπτών

Παραθέτουμε ορισμένα κυκλώματα διακοπτών μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις που ικανοποιούν. Σε κάθε επαφή διακόπτη αντιστοιχούμε και μια λογική μεταβλητή. Ορίζουμε π.χ. με **X** μια επαφή κλειστή και με $\overline{\mathbf{X}}$ μια ανοικτή. *(Φραγκάκη,ς 1975; Κοσσίδα,ς 1996; Floyd, 2013; Mano, &Ciletti, 2014)*

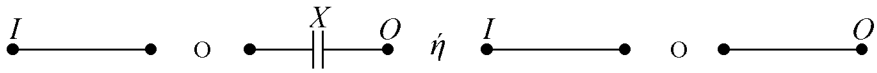
Θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα με διακόπτες από τα ήδη αναφερθέντα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole. Καλό είναι να υπενθυμίσουμε ότι το λογικό άθροισμα δύο μεταβλητών αντιστοιχεί στον παράλληλο συνδυασμό δύο διακοπτών ενώ το γινόμενο στην τοποθέτηση δύο διακοπτών σε σειρά.

Η παράσταση των διακοπτών γίνεται με το σύμβολο « **-| |-** » χάριν απλότητας. Η έκφραση **1+X=1** αντιστοιχεί το κύκλωμα του *Σχήματος 3.6.*



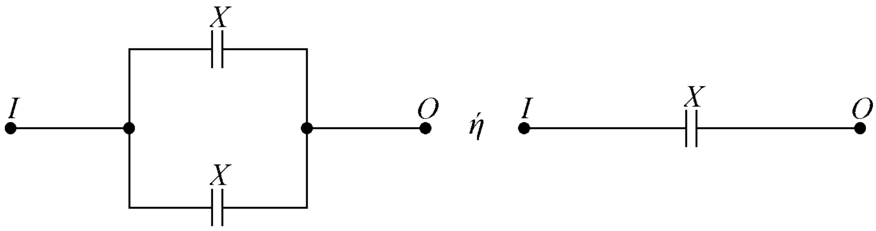
Σχήμα 3.6. *Απεικόνιση της παράστασης **1+X** με διακόπτες*

Η έκφραση $\mathbf{0 \cdot X = 0}$ αντιστοιχεί το κύκλωμα του *Σχήματος 3.7.*



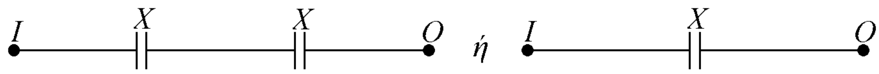
Σχήμα 3.7. *Απεικόνιση της παράστασης* ***0   X*** *με διακόπτες*

Η έκφραση **X+X=X** αντιστοιχεί το κύκλωμα του *Σχήματος 3.8.*



Σχήμα 3.8. *Απεικόνιση της παράστασης* ***X+X*** *με διακόπτες*

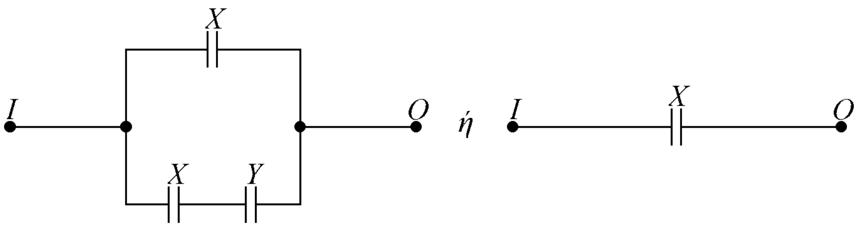
Η έκφραση $\mathbf{X \cdot X = X}$ αντιστοιχεί το κύκλωμα του *Σχήματος 3.9.*



Σχήμα 3.9. *Απεικόνιση της παράστασης* $\mathbf{X \cdot X}$ *με διακόπτες*

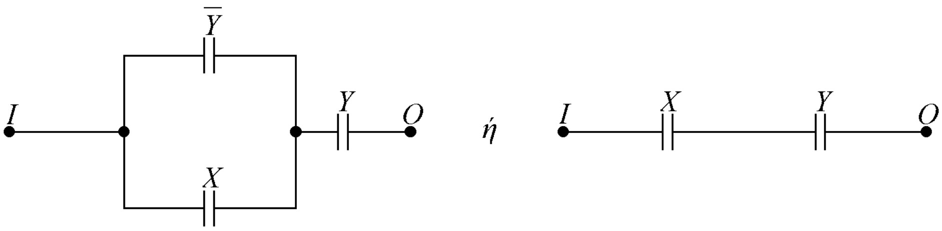
Κατά συνέπεια για τις παρακάτω λογικές εκφράσεις έχουμε τα αντίστοιχα κυκλώματα μαζί με τα ισοδύναμά τους.

α) $\mathbf{X + X \cdot Y = X}$



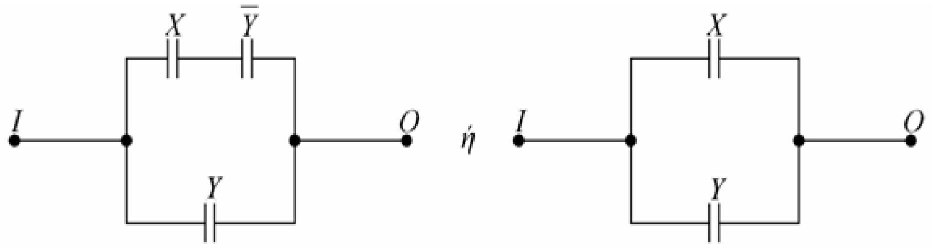
Σχήμα 3.10. *Απεικόνιση της παράστασης* $\mathbf{X + X \cdot Y}$ *με διακόπτες*

β) $\mathbf{(X + \overline{Y}) \cdot Y = X \cdot Y}$



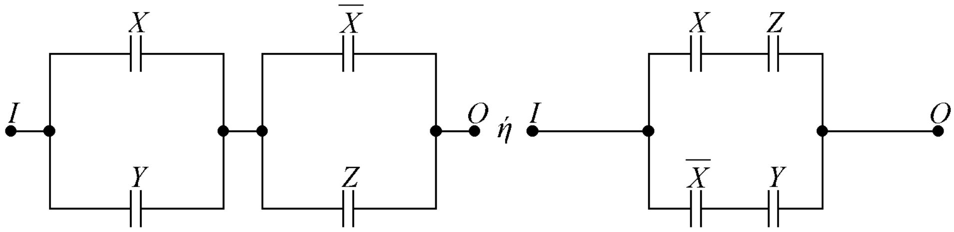
Σχήμα 3.11. *Απεικόνιση της παράστασης* $\mathbf{(X + \overline{Y}) \cdot Y}$ *με διακόπτες*

γ) $\mathbf{X \cdot \overline{Y} + Y = X + Y}$



Σχήμα 3.12. *Απεικόνιση της παράστασης* $\mathbf{X \cdot \overline{Y} + Y}$ *με διακόπτες*

δ) $\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}+Z) = X\cdot Z + \overline{X}\cdot Y}$



Σχήμα 3.13. *Απεικόνιση της παράστασης* $\mathbf{(X+Y)\cdot(\overline{X}+Z)}$ *με διακόπτες*

3.7. Ανάλυση ενός λογικού κυκλώματος με διακόπτες

Ανάλυση ενός κυκλώματος ονομάζουμε την εργασία, όπου έχοντας δοσμένη τη γραφική απεικόνιση ενός κυκλώματος, υπολογίζουμε τη λογική συνάρτηση μεταφοράς που το περιγράφει.

Η ανάλυση του κυκλώματος στηρίζεται στους παρακάτω κανόνες:

α. Η ανάλυση του κυκλώματος γίνεται τεμαχίζοντας το κύκλωμα σε επί μέρους στοιχειώδη κυκλώματα σειράς από τα οποία αποτελείται ή εν παραλλήλω.

β. Σε κάθε επαφή αντιστοιχεί μία μόνο λογική μεταβλητή.

γ. Η λογική μεταβλητή **X** δεν είναι υπεργραμμισμένη (δεν έχει παύλα επάνω της), εάν η επαφή είναι κλειστή, ενώ είναι υπεργραμμισμένη $\mathbf{\overline{X}}$ (έχει παύλα), εάν αυτή είναι ανοικτή.

δ. Σε κάθε κλειστή επαφή η συνάρτηση μεταφοράς έχει τιμή «1», ενώ σε κάθε ανοικτή έχει τιμή «0».

ε. Σε κάθε παράλληλη διάταξη δύο επαφών αντιστοιχεί μια συνάρτηση αθροίσματος των λογικών μεταβλητών. Σε κάθε διάταξη σειράς επαφών αντιστοιχεί μία συνάρτηση γινόμενου των δύο λογικών μεταβλητών.

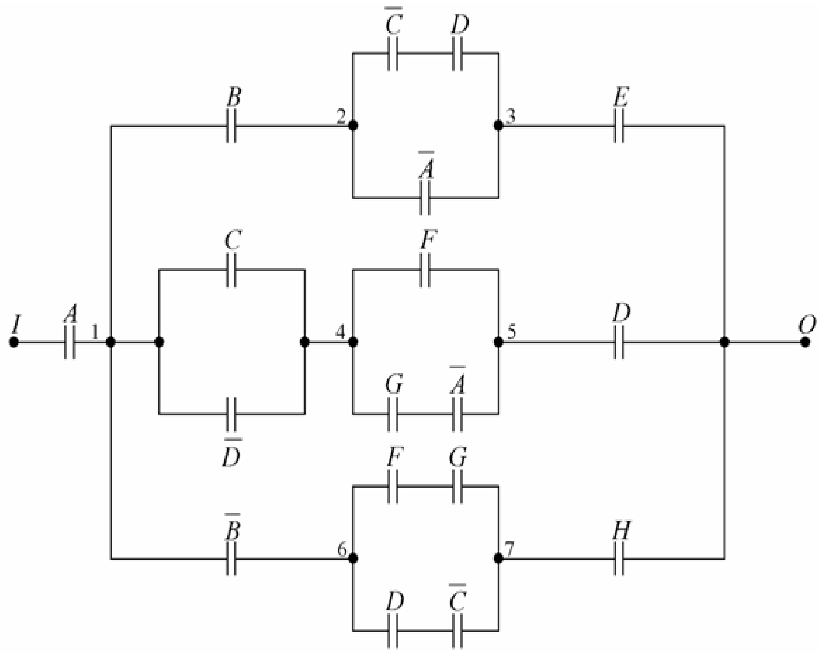
Παράδειγμα 1ο:

Έστω ότι δίνεται το κύκλωμα του *σχήματος 3.14.* Αυτό χωρίζεται στα εξής τμήματα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς.

I	**-**	**1**	A
1	**-**	**2**	B
2	**-**	**3**	$\overline{C}\cdot D+\overline{A}$
3	**-**	**O**	E
1	**-**	**4**	$C+\overline{D}$
4	**-**	**5**	$F+G\cdot\overline{A}$
5	**-**	**O**	D
1	**-**	**6**	$\overline{B}$
6	**-**	**7**	$F\cdot G+D\cdot\overline{C}$
7	**-**	**O**	H

Συνενώνοντας τα παραπάνω τμήματα κατά κλάδους, έχουμε τις συναρτήσεις:

1	**-**	**2**	**-**	**3**	**-**	**O**	$B\cdot(\overline{C}\cdot D+\overline{A})\cdot E$
1	**-**	**4**	**-**	**5**	**-**	**O**	$(C+\overline{D})\cdot(F+G\cdot\overline{A})\cdot D$
1	**-**	**6**	**-**	**7**	**-**	**O**	$\overline{B}\cdot(F\cdot G+D\cdot\overline{C})\cdot H$



Σχήμα 3.14. *Κύκλωμα σειράς – παραλλήλου προς ανάλυση*

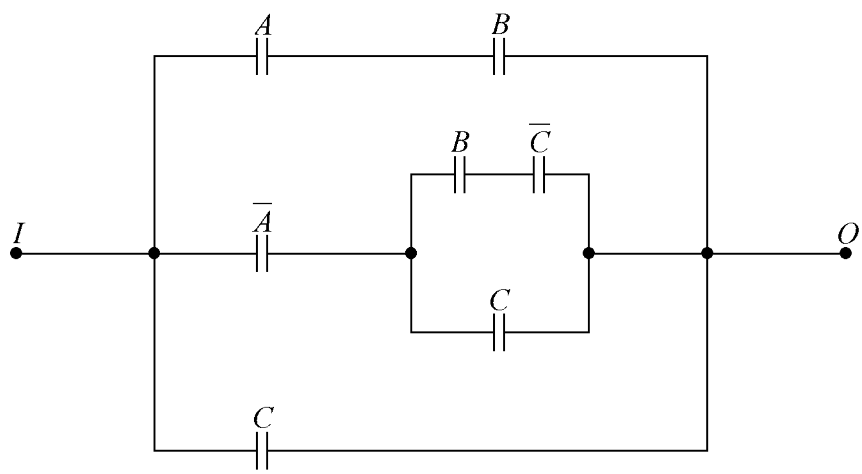
Ο παράλληλος συνδυασμός των τριών κλάδων 1 - Ο θα είναι:

$$B\cdot(\overline{C}\cdot D+\overline{A})\cdot E+(C+\overline{D})\cdot(F+G\cdot\overline{A})\cdot D+\overline{B}\cdot(F\cdot G+D\cdot\overline{C})\cdot H$$

Και η ολική συνάρτηση μεταφοράς θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$T=I-O=A\cdot[B\cdot(\overline{C}\cdot D+\overline{A})\cdot E+(C+\overline{D})\cdot(F+G\cdot\overline{A})\cdot D+\overline{B}\cdot(F\cdot G+D\cdot\overline{C})\cdot H] \qquad \textbf{(3-15)}$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης μεταφοράς **T**, ανάλογα με την εκάστοτε τιμή των λογικών μεταβλητών, συνηθίζεται η κατασκευή ενός πίνακα αλήθειας ο οποίος αποτελείται από τόσες στήλες όσες είναι οι υπάρχουσες μεταβλητές στη συνάρτηση συν μια επιπλέον για την τιμή της υπό μελέτη συνάρτησης **T**. Ο πίνακας αποτελείται από τόσες γραμμές, όσοι είναι οι δυνατοί συνδυασμοί των μεταβλητών λαμβανομένων όλων μαζί.



Σχήμα 3.15. *Κύκλωμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης T*

Θα υπολογίσουμε τώρα την τιμή της συνάρτησης μεταφοράς για το κύκλωμα του *σχήματος 3.15.* Θα εργαστούμε ανάλογα με *το* προηγούμενο παράδειγμα.
Εφαρμόζοντας τους κανόνες που αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$T = A \cdot B + \overline{A} \cdot (B \cdot \overline{C} + C) + C \qquad \textbf{(3-16)}$$

Ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης **T** (*πίνακας 3.2*) βρίσκεται, υπολογίζοντας, για όλες τις δυνατές τιμές των **A**, **B**, **C**, την τιμή της **T**. π.χ. για **A=B=C=0**, το **T=0** κ.ο.κ.

A	B	C	T
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Πίνακας 3.2. *Πίνακας αλήθειας της λογικής συνάρτησης της σχέσης 3-16*

3.8. Σύνθεση ενός λογικού κυκλώματος με διακόπτες

Σύνθεση ενός κυκλώματος είναι η εργασία κατά την οποία μελετάται και κατασκευάζεται ένα κύκλωμα βάσει συγκεκριμένων απαιτήσεων και προδιαγραφών έτσι, ώστε η έξοδος του να δίνει τις επιθυμητές τιμές.

Γενικά οι προδιαγραφές του κυκλώματος δίνονται υπό μορφή πίνακα αλήθειας.

Έστω, π.χ., ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κύκλωμα που θα αποτελείται από δύο επαφές (μεταβλητές) (X, Y) τέτοιο, ώστε η συνάρτηση T να έχει τιμή «1», μόνο όταν και οι δύο επαφές έχουν την ίδια κατάσταση. Ο *πίνακας αλήθειας 3.3,* που ακολουθεί, περιγράφει το κύκλωμα.

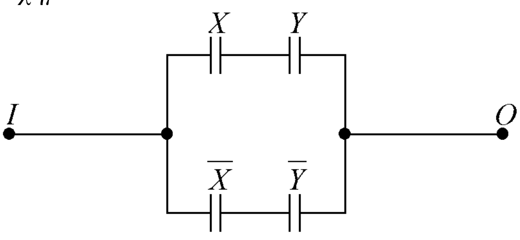
X	Y	T
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Πίνακας 3.3. *Πίνακας αλήθειας της συνάρτησης T*

Το ζητούμενο κύκλωμα μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε εκφράζοντας τις περιπτώσεις, όπου η T=1, είτε εκφράζοντας τις περιπτώσεις, όπου η T=0. (Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τον πρώτο τρόπο). Στο παράδειγμά μας θέλουμε T=1, αν το **X** και το **Y** είναι 0 ή εάν το **X** και το **Y** είναι 1. Αυτό συνεπάγεται μια παράλληλη σύνδεση μεταξύ του και του **X Y**. Η συνάρτηση T θα δίνεται από τη σχέση 3-17:

$$\mathbf{T = \overline{X} \cdot \overline{Y} + X \cdot Y} \qquad \textbf{(3-17)}$$

το δε αντίστοιχο κύκλωμα από το *σχήμα 3.16.*



Σχήμα 3.16. *Παράσταση του πίνακα αλήθειας 3.3, με κύκλωμα διακοπτών*

Κατ' αναλογία, λαμβάνοντας υπόψη τις περιπτώσεις όπου **T=0**, έχουμε τη *σχέση 3-18*:

$$\mathbf{T = (X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y)} \qquad \textbf{(3-18)}$$

Βλέπουμε ότι αυτή η έκφραση της **Τ** είναι ισοδύναμη της προηγούμενης. Πράγματι, εκτελώντας τις πράξεις, επανερχόμαστε στην προηγούμενη έκφραση. Η επιλογή των μονάδων ή των μηδενικών από τον πίνακα αλήθειας για την έκφραση της **Τ** εξαρτάται από τον αριθμό τους έτσι, ώστε να οδηγούμαστε στην απλούστερη δυνατή συνάρτηση. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι πολλές φορές οι συναρτήσεις που παράγονται δεν παριστάνουν πάντοτε την απλούστερη μορφή του κυκλώματος. Σε πολλές περιπτώσεις μπορούν, με κατάλληλες μεθόδους, να απλοποιηθούν ακόμα περισσότερο.

3.9. Μέθοδοι ελαχιστοποίησης λογικών συναρτήσεων

Οι λογικές συναρτήσεις, οι οποίες δίνονται, όπως και αυτές που προκύπτουν από πίνακες αλήθειας, πολλές φορές ελαχιστοποιούνται, με σκοπό το προς μελέτη και κατασκευή κύκλωμα να γίνει μικρότερο και απλούστερο. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την καλύτερη και απλούστερη λειτουργία του.

Οι μέθοδοι που ακολουθούνται για την ελαχιστοποίηση των ψηφιακών κυκλωμάτων είναι πολλές. Θα αναφέρουμε μόνο αυτές που χρησιμοποιούνται περισσότερο. *(Givone, 2002; Maxfield, 2009; Godse, 2011; Mano, & Ciletti, 2014; Pritchard, 2015)*

α. Αλγεβρική μέθοδος,
β. Γραφική μέθοδος,
γ. Διαγράμματα του Venn,
δ. Χάρτης Karnaugh,
ε. Μέθοδος Quine -Mc Cluskey

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των μεθόδων ελαχιστοποίησης, θα μελετήσουμε τους ελαχιστοβάθμιους και μεγιστοβάθμιους όρους μίας συνάρτησης καθώς και την κανονικοποίηση.

3.9.1. Ελαχιστοβάθμιοι και μεγιστοβάθμιοι όροι

3.9.1.1 Ελαχιστοβάθμιος όρος (Minterm) - ΕΛΒΟ

Ένας ελαχιστοβάθμιος όρος (ΕΛΒΟ) είναι ένα γινόμενο παραγόντων, στο οποίο κάθε μεταβλητή εισόδου εμφανίζεται μία μόνο φορά. Στις συναρτήσεις που ακολουθούν, για λόγους λειτουργικότητας, η παρουσίαση των ΕΛΒΟ γίνεται με τη χρήση του λογικού γινομένου $(\cdot)$ μεταξύ των λογικών μεταβλητών, ή, όπου δε χρησιμοποιείται, θεωρείται αυτονόητη η ύπαρξή του.

Μία συνάρτηση με n μεταβλητές έχει 2^n ελαχιστοβάθμιους όρους (καθώς κάθε μεταβλητή μπορεί να εμφανιστεί με την κανονική ή τη συμπληρωματική της μορφή).

Έτσι μία συνάρτηση με τρεις μεταβλητές, όπως π.χ. η f(x,y,z), έχει $2^3 = 8$ ελαχιστοβάθμιους όρους:

1ος	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	2ος	$\overline{x}\,\overline{y}z$	3ος	$\overline{x}y\overline{z}$	4ος	$\overline{x}yz$
5ος	$x\overline{y}\,\overline{z}$	6ος	$x\overline{y}z$	7ος	$xy\overline{z}$	8ος	xyz

Κάθε ελαχιστοβάθμιος όρος είναι αληθής για ακριβώς ένα συνδυασμό εισόδων:

ΕΛΒΟ (Μεταβλητές x,y,z)	**Είναι αληθής όταν..**	**Συντομογραφία**
$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	x=0, y=0, z=0	m_0
$\overline{x}\,\overline{y}z$	x=0, y=0, z=1	m_1
$\overline{x}y\overline{z}$	x=0, y=1, z=0	m_2
$\overline{x}yz$	x=0, y=1, z=1	m_3
$x\overline{y}\,\overline{z}$	x=1, y=0, z=0	m_4
$x\overline{y}z$	x=1, y=0, z=1	m_5
$xy\overline{z}$	x=1, y=1, z=0	m_6
xyz	x=1, y=1, z=1	m_7

Κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν ένα άθροισμα ελαχιστοβάθμιων όρων (ΕΛΒΟ), το οποίο είναι μία ειδική μορφή αθροίσματος γινομένων.

Η μορφή αθροίσματος των ΕΛΒΟ για κάθε συνάρτηση είναι μοναδική. Αν έχουμε τον πίνακα αληθείας μιας συνάρτησης, μπορούμε να γράψουμε το άθροισμα των ΕΛΒΟ, απλώς αθροίζοντας τις σειρές του πίνακα, όπου η έξοδος της συνάρτησης είναι 1.

x	**y**	**z**	f **(x,y,z)**	$\overline{f}$ **(x,y,z)**
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Έστω λοιπόν ο παραπάνω πίνακας αλήθειας, στον οποίο θεωρούμε δεδομένη τη συνάρτηση f και συνεπώς και τη συμπληρωματική της:

Έτσι εύκολα προκύπτουν οι συναρτήσεις για την f και την $\overline{f}$ αντίστοιχα :

$$f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + xy\overline{z} \qquad \overline{f} = x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xyz$$

$$= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_6 \qquad = m_4 + m_5 + m_7$$

$$= \sum m(0,1,2,3,6) \qquad = \sum m(4,5,7)$$

Η $\overline{f}$ περιέχει όλους τους ΕΛΒΟ που δεν περιέχονται στην f.

3.9.1.2 Μεγιστοβάθμιος όρος (Maxterm) - ΜΕΒΟ

Το συμπλήρωμα των ΕΛΒΟ (η δυική ιδέα) είναι το γινόμενο αθροισμάτων. Στο γινόμενο αθροισμάτων (Product Of Sum-POS) πρέπει να γνωρίζουμε ότι η έκφραση αυτή περιέχει μόνο πράξεις AND (γινόμενο). Κάθε παράγοντάς της αποτελείται από ένα άθροισμα όρων.

Ένας μεγιστοβάθμιος όρος (ΜΕΒΟ) είναι το άθροισμα όρων, στους οποίους κάθε μεταβλητή είσοδος εμφανίζεται μόνο μια φορά με την κανονική ή τη συμπληρωματική της μορφή.

Μια συνάρτηση με n μεταβλητές έχει 2^n μεγιστοβάθμιους όρους. Οι ΜΕΒΟ για μια συνάρτηση τριών μεταβλητών f(x,y,z) είναι:

1ος	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$	2ος	$\overline{x}+\overline{y}+z$	3ος	$\overline{x}+y+\overline{z}$	4ος	$\overline{x}+y+z$
5ος	$x+\overline{y}+\overline{z}$	6ος	$x+\overline{y}+z$	7ος	$x+y+\overline{z}$	8ος	$x+y+z$

Κάθε ΜΕΒΟ είναι *ψευδής* για έναν ακριβώς συνδυασμό των εισόδων:

ΜΕΒΟ (Μεταβλητές x,y,z)	**Είναι *ψευδής* όταν...**	**Συντομογραφία**
$x+y+z$	x=0, y=0, z=0	M_0
$x+y+\overline{z}$	x=0, y=0, z=1	M_1
$x+\overline{y}+z$	x=0, y=1, z=0	M_2
$x+\overline{y}+\overline{z}$	x=0, y=1, z=1	M_3
$\overline{x}+y+z$	x=1, y=0, z=0	M_4
$\overline{x}+y+\overline{z}$	x=1, y=0, z=1	M_5
$\overline{x}+\overline{y}+z$	x=1, y=1, z=0	M_6
$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$	x=1, y=1, z=1	M_7

Κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν ένα μοναδικό γινόμενο ΜΕΒΟ. Αν έχουμε για μία συνάρτηση τον πίνακα αληθείας, μπορούμε να την εκφράσουμε σαν ένα γινόμενο ΜΕΒΟ, επιλέγοντας τις σειρές του πίνακα όπου η έξοδος είναι 0. (Προσοχή! Γράφουμε τους πραγματικούς όρους)

x	**y**	**z**	f **(x,y,z)**	$\overline{f}$ **(x,y,z)**
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$f = (\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$ $\quad\overline{f} = (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)\,(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)$

$= M_4\, M_5\, M_7$ $\quad= M_0\, M_1\, M_2\, M_3\, M_6$

$= \prod M(4,5,7)$ $\quad= \prod M(0,1,2,3,6)$

Και εδώ η $\overline{f}$ περιέχει όλους τους ΜΕΒΟ που δεν περιέχονται στην f.

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι ΕΛΒΟ και οι ΜΕΒΟ αλληλοσυσχετίζονται. Κάθε ΕΛΒΟ m_i είναι το συμπλήρωμα του αντιστοίχου ΜΕΒΟ M_i.

Για παράδειγμα: $\overline{m_4} = M_4$ καθώς $\overline{x\bar{y}\bar{z}} \;=\; \bar{x} + y + z$

Με βάση τον *πίνακα 3.4,* που ακολουθεί, μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε ένα άθροισμα ΕΛΒΟ σε ένα γινόμενο ΜΕΒΟ.

Από τα προηγούμενα: $f = \sum m(0,1,2,3,6)$ και $\overline{f} = \sum m(4,5,7) = m_4 + m_5 + m_7$

Η συμπληρωματική συνάρτηση $\overline{\overline{f}} \;=\; \overline{m_4 + m_5 + m_7}$ έτσι $f = \overline{m_4}\,\overline{m_5}\,\overline{m_7}$ [θεώρημα De Morgan]

$= M_4\, M_5\, M_7$ [βάσει του προηγούμενου πίνακα] $= \prod M(4,5,7)$

Γενικότερα απλώς αντικαθιστούμε τους ΕΛΒΟ με τους ΜΕΒΟ, χρησιμοποιώντας τους ΜΕΒΟ που δεν εμφανίζονται στο άθροισμα των ΕΛΒΟ:

$$f = \sum m(0,1,2,3,6) = \prod M(4,5,7)$$

Η ίδια μεθοδολογία χρησιμοποιείται και για την αντίστροφη μετατροπή από γινόμενο ΜΕΒΟ σε άθροισμα ΕΛΒΟ.

ΜΕΒΟ	**Συντομογραφία**	**ΕΛΒΟ**	**Συντομογραφία**
$x + y + z$	M_0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_0
$x + y + \bar{z}$	M_1	$\bar{x}\bar{y}z$	m_1
$x + \bar{y} + z$	M_2	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2
$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3	$\bar{x}yz$	m_3
$\bar{x} + y + z$	M_4	$x\bar{y}\bar{z}$	m_4
$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5	$x\bar{y}z$	m_5
$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6	$xy\bar{z}$	m_6
$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7	xyz	m_7

Πίνακας 3.4. *Αντιστοίχιση μεταξύ των ΕΛΒΟ και των ΜΕΒΟ*

Κανονική μορφή (Κανονικοποίηση)

Κανονική λέγεται η συνάρτηση στην οποία όλες οι μεταβλητές, ή το συμπλήρωμά τους, εμφανίζονται μόνο μία φορά σε κάθε όρο της υπό μορφή αθροίσματος ελαχιστοβάθμιων όρων ή υπό μορφή γινομένου μεγιστοβάθμιων όρων.

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα με ανάστροφο τρόπο, για να προσθέσουμε τις μεταβλητές που δε συμπεριλαμβάνονται στην αρχική συνάρτηση. Αυτή η διαδικασία γίνεται σπάνια, αλλά είναι αρκετά χρήσιμη.

Έστω λοιπόν η συνάρτηση:

$$xy + \overline{y}z + xz = (xy \cdot 1) + (\overline{y}z \cdot 1) + (xz \cdot 1) = (xy \cdot (z + \overline{z})) + (\overline{y}z \cdot (x + \overline{x})) + (xz \cdot (y + \overline{y}))$$

$$= (xyz + xy\overline{z}) + (\overline{y}zx + \overline{y}z\overline{x}) + (xzy + xz\overline{y}) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}z$$

Και στις δύο περιπτώσεις κάνουμε πιο πολύπλοκη την αρχική μας έκφραση. Η έκφραση που προκύπτει είναι μεγαλύτερη από την αρχική, αλλά, έχοντας όλους τους μεμονωμένους ΕΛΒΟ, είναι πιο εύκολο να τους συνδυάσουμε σε ένα χάρτη Karnaugh που χρησιμοποιείται για την απλοποίηση, και τον οποίο θα αναλύσουμε λεπτομερώς παρακάτω.

3.9.2. Αλγεβρική ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των θεωρημάτων και αξιωμάτων της άλγεβρας Boole και μέσω καταλλήλου μετασχηματισμού των παραστάσεων.

Όπως ήδη έχουμε δει, το λογικό γινόμενο δύο ή περισσοτέρων λογικών μεταβλητών ονομάζεται *ελαχιστοβάθμιος όρος*, ενώ το λογικό άθροισμα δύο ή περισσοτέρων λογικών μεταβλητών ονομάζεται *μεγιστοβάθμιος όρος*.

Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα ελαχιστοποίησης λογικών συναρτήσεων.

Α) Έστω η συνάρτηση:

$$\mathrm{T} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Z} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} \cdot \overline{\mathrm{Z}} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \overline{\mathrm{Z}} \cdot \mathrm{W} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Z} \cdot \mathrm{W} + \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \overline{\mathrm{Z}} \cdot \overline{\mathrm{W}}$$

Μια πρώτη απλοποίηση επιτυγχάνεται ως εξής:

$$T = X \cdot W \cdot (Y \cdot Z + \overline{Y} \cdot Z + Y \cdot \overline{Z} + \overline{Y} \cdot \overline{Z}) + \overline{X} \cdot Y \cdot Z \cdot W + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} \Rightarrow$$

$$T = X \cdot W + \overline{X} \cdot Y \cdot Z \cdot W + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W}$$

και αυτό, γιατί η παράσταση μέσα στην παρένθεση ισούται με τη μονάδα, αφού περιέχει το άθροισμα όλων των δυνατών συνδυασμών δύο λογικών μεταβλητών.

Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω, θέτοντας στη θέση του $X \cdot W$ την έκφραση $X \cdot W + X \cdot W$. Θα έχουμε επομένως:

$$T = X \cdot W + X \cdot W + \overline{X} \cdot Y \cdot Z \cdot W + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} \Rightarrow$$

$$T = X \cdot (\overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} + W) + W \cdot (\overline{X} \cdot Y \cdot Z + X) \Rightarrow \qquad \text{(Θεώρημα } 4^{O}\text{)}$$

$$T = X \cdot (\overline{Y} \cdot \overline{Z} + W) + W \cdot (Y \cdot Z + X) \Rightarrow$$

$$T = X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + X \cdot W + Y \cdot Z \cdot W + X \cdot W \Rightarrow$$

$$T = X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} + X \cdot W + Y \cdot Z \cdot W = X \cdot (\overline{Y} \cdot \overline{Z} + W) + Y \cdot Z \cdot W \quad \textbf{(3-19)}$$

έκφραση η οποία είναι απλοποιημένη σχετικά με την αρχική.

Β) Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση: $T = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα De Morgan, θα έχουμε:

$$T = \overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B}) \Rightarrow \; T = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B + B \cdot \overline{B} \Rightarrow \; T = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

3.9.3. Μέθοδος ελαχιστοποίησης με διαγράμματα Venn

Η γραφική απεικόνιση των λογικών συναρτήσεων Boole με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζει τις «καταστάσεις γειτνιάσεως» (γειτονικές καταστάσεις), δηλαδή τους όρους της λογικής συνάρτησης οι οποίοι διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την τιμή μιας μόνο μεταβλητής.

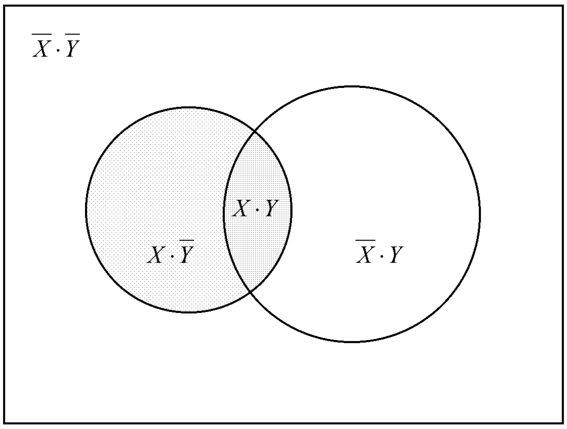
Στο *Σχήμα 3.17* παριστάνεται μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στο σχήμα εμφανίζονται οι τέσσερις περιοχές με τις αντίστοιχες μεταβλητές που παριστάνουν, δηλαδή: **XY**, $\mathbf{X\overline{Y}}$, $\mathbf{\overline{X}Y}$, $\mathbf{\overline{X}\overline{Y}}$. Η ζώνη που περικλείει το εμβαδόν των δύο κύκλων είναι η ζώνη $\mathbf{X + Y = X \cdot \overline{Y} + X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y}$.

Πράγματι: $\mathbf{X \cdot \overline{Y} + X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y = X \cdot (\overline{Y} + Y) + \overline{X} \cdot Y = X + \overline{X} \cdot Y = X + Y}$ Η ζώνη αυτή είναι συμπληρωματική της $\overline{X} \cdot \overline{Y}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.17, που ακολουθεί.

Χρησιμοποιώντας το *σχήμα 3.17,* εύκολα συνάγουμε το συμπέρασμα ότι σε άθροισμα γειτονικών ζωνών απαλείφεται η μεταβλητή, η οποία εμφανίζεται με διαφορετική τιμή στις δύο ζώνες.

Στο *σχήμα 3.18* απεικονίζεται μια συνάρτηση τριών μεταβλητών ***X, Y, Z***. Διακρίνουμε εύκολα τις 8 ζώνες που αντιστοιχούν στους 8 δυνατούς συνδυασμούς. Και εδώ εύκολα αποδεικνύεται ότι η ζώνη, η περικλειόμενη από το εμβαδόν των τριών κύκλων, ισούται με ***X+Y+Z,*** πράγματι

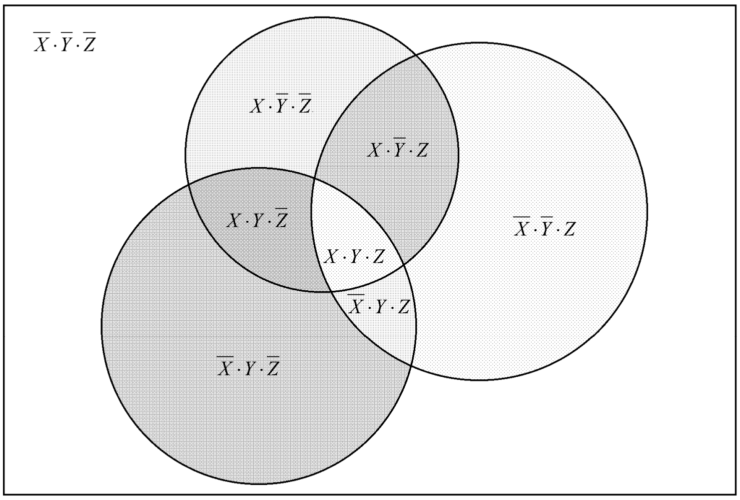
$$\mathrm{T} = \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \overline{\mathrm{Z}} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{Y} \cdot \overline{\mathrm{Z}} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z} + \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} \cdot \overline{\mathrm{Z}} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Z} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Z} =$$
$$= X \cdot \overline{Z} \cdot (Y + \overline{Y}) + X \cdot Z \cdot (Y + \overline{Y}) + \overline{X} \cdot Y \cdot (Z + \overline{Z}) + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z =$$



Σχήμα 3.17. *Οι τέσσερις περιοχές μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών*

$$\mathrm{T} = \mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Z}} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{Z} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{Y} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z} = \mathrm{X} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \mathrm{Y} + \overline{\mathrm{X}} \cdot \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z} = \mathrm{X} + \overline{\mathrm{X}}(\mathrm{Y} + \overline{\mathrm{Y}} \cdot \mathrm{Z})$$
$$= X + \overline{X} \cdot (Z + Y) = X + \overline{X} \cdot Z + \overline{X} \cdot Y = X + Y + \overline{X} \cdot Z = X + Y + Z \qquad \mathbf{(3\text{-}23)}$$

Κατ' αναλογία, οι ζώνες που περικλείονται από το εμβαδόν δύο μόνο κύκλων, ισούται αντίστοιχα με **X+Y**, **X+Z**, **Y+Z.**



Σχήμα 3.18. *Οι οκτώ περιοχές του διαγράμματος Venn των συναρτήσεων τριών μεταβλητών*

Για συναρτήσεις με περισσότερες των τριών μεταβλητών, η απεικόνιση με κύκλους παρουσιάζει δυσκολίες. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται κυρίως πίνακες. Οι πίνακες πρέπει να δημιουργηθούν έτσι, ώστε κάθε συνδυασμός να γειτνιάζει με τέσσερις άλλους συνδυασμούς, οι οποίοι θα διαφέρουν κατά την τιμή μιας μόνο μεταβλητής.

3.9.4. *Μέθοδοι ελαχιστοποίησης με τους χάρτες Karnaugh*

Οι *χάρτες Karnaugh* είναι πίνακες Veitch ελάχιστα τροποποιημένοι, ώστε να μπορούν να παραστήσουν συνδυασμούς **n** μεταβλητών. Αν και η μέθοδος που βασίζεται σ’ αυτούς τους πίνακες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για **n** μεταβλητές, χρησιμοποιείται για απλοποιήσεις συναρτήσεων το πολύ έξι μεταβλητών.

Ένας πρώτος τρόπος απεικόνισης των μεταβλητών του χάρτη Karnaugh, με βάση τους πίνακες Veitch για τρεις μεταβλητές, είναι ο ακόλουθος: (εννοείται ότι όπου δεν υπάρχει η μεταβλητή χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμά της). Παρατηρούμε λοιπόν στον *πίνακα 3.5α* ότι π.χ. αριστερά και δεξιά της μεταβλητής Z οι όροι εμφανίζονται με το συμπλήρωμα της μεταβλητής Z. Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες μεταβλητές του πίνακα. Συνεπώς στην πρώτη γραμμή οι όροι περιέχουν το συμπλήρωμα της μεταβλητής X και οι δύο αριστεροί κάθετοι όροι περιέχουν το συμπλήρωμα της μεταβλητής Y.

			Y	
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$
X	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz	$xy\bar{z}$
		Z		

Με τη χρήση ελαχιστοβάθμιων όρων θα έχουμε την ακόλουθη απεικόνιση του χάρτη:

			Y	
	m_0	m_1	m_3	m_2
X	m_4	m_5	m_7	m_6
		Z		

Πίνακας 3.5α*. Χάρτης Karnaugh – 1η μορφή*

Είναι προφανές ότι η αναπαράσταση εξασφαλίζει ότι γειτονικά τετράγωνα έχουν κοινές μεταβλητές και ο κάθε γειτονικός όρος διαφέρει από τον άλλο σε μία μόνο μεταβλητή.

Χάρτης Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

Θα ξεκινήσουμε με την απεικόνιση με τις τέσσερεις μεταβλητές (έστω w,x, y,z) λίγο διαφορετική από την συνηθισμένη:

			Y		
	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	
	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	X
W	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$	$wxyz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	X
W	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	
		Z			

			Y		
	m_0	m_1	m_3	m_2	
	m_4	m_5	m_7	m_6	X
W	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	X
W	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	
		Z			

Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης (ο πλέον συνηθισμένος) του χάρτη Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών δίνεται στον *πίνακα 3.5β* που ακολουθεί:

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο κάθε γειτονικός όρος διαφέρει από τον άλλο σε ένα μόνο δυαδικό ψηφίο (μία μεταβλητή). Έτσι, για τον παρακάτω χάρτη των 16 θέσεων, έχουμε τους συνδυασμούς 00, 01, 11, 10. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία 11,10, 00, 01, ή οποιαδήποτε άλλη που πληροί την προϋπόθεση μεταξύ των γειτονικών όρων.

Σε καθεμία από τις 16 θέσεις του πίνακα αντιστοιχούμε ένα ΕΛΒΟ όρο.

Παρατηρούμε ότι οι ΕΛΒΟ στην τρίτη και την τέταρτη στήλη και στην τρίτη και τέταρτη γραμμή αλλάζουν μεταξύ τους. Η ομαδοποίηση των ΕΛΒΟ γίνεται με παρόμοιο τρόπο, ανεξάρτητα του αριθμού των μεταβλητών, έχοντας υπόψη μας ότι μπορούμε να έχουμε ομάδες από 1, 2, 4, 8 ή 16 ΕΛΒΟ.

Επίσης δεν ξεχνάμε ότι μπορούμε να «διπλώσουμε» (switch around) και τις τέσσερις πλευρές του χάρτη. (Η απεικόνιση που θα επιλέξει ο κάθε χρήστης στην υλοποίησή του είναι αυθαίρετη, εφόσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις των γειτονικών όρων).

WZ \ XY	**00**	**01**	**11**	**10**
00				
01				
11				
10				

Πίνακας 3.5β. *Χάρτης Karnaugh – Συνήθης μορφή αναπαράστασης*

Στο χάρτη Karnaugh και στις αντίστοιχες θέσεις του θέτουμε 1 ή 0, ανάλογα με το αν ο όρος της συνάρτησης που προορίζεται να απλοποιηθεί υπάρχει ή όχι. Έτσι η συνάρτηση:

$T = A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$ απεικονίζεται στο χάρτη Karnaugh του πίνακα 3.6:

Στις κενές θέσεις τοποθετούνται τα μηδενικά, τα οποία όμως παραλείπονται για την καλύτερη ευκρίνεια του χάρτη. Σε περίπτωση όπου η προς απλοποίηση συνάρτηση έχει και όρους με λιγότερες από τέσσερις μεταβλητές, τότε θα σημειώνονται άσσοι σε όλες τις θέσεις που ορίζουν οι συνδυασμοί των απόντων όρων. Εάν, για παράδειγμα, είχαμε τον όρο ABC ή τον όρο AD, ο αντίστοιχος χάρτης δίνεται στους πίνακες 3.7α και 3.7β.

CD \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
00		**1**		
01		**1**	**1**	
11		**1**		
10	**1**			**1**

Πίνακας 3.6. *Η συνάρτηση* $T = A\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D + A\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C\cdot \overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot D$

Από τους πίνακες που ακολουθούν φαίνεται καθαρά ότι οι ομάδες των γειτονικών άσσων παίζουν σημαντικό ρόλο στην απλοποίηση μιας συνάρτησης. Επαναλαμβάνουμε ότι, αν μια συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών έχει κάποιον όρο αποτελούμενο από τρεις μεταβλητές, αντιστοιχούν σε αυτόν δύο γειτνιάζοντες άσσοι. Κατά ανάλογο τρόπο, σε κάποιον όρο αποτελούμενο από δύο μεταβλητές, αντιστοιχούν τέσσερις γειτνιάζοντες άσσοι, ενώ σ' έναν όρο αποτελούμενο από μια μεταβλητή αντιστοιχούν οκτώ άσσοι.

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11			1	
10			1	

Πίνακας 3.7α. *Παράσταση του όρου ABC*

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01			1	1
11			1	1
10				

Πίνακας 3.7β. *Παράσταση του όρου AD*

Η διαδικασία που ακολουθείται για την απλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης περιγράφεται παρακάτω:

α. Παριστάνεται η συνάρτηση στο χάρτη Karnaugh.

β. Βρίσκουμε τους υπάρχοντες υποχάρτες με το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό γειτνιαζόντων άσσων.

γ. Τυχόν επικαλύψεις υποχαρτών επιτρέπονται.

Συνιστάται στον αναγνώστη μια καλή εξάσκηση στο χάρτη Karnaugh έτσι, ώστε η εύρεση και επιλογή των υποχαρτών να είναι η καλύτερη δυνατή για την απλοποίηση των αντιστοίχων συναρτήσεων.

Για την καλύτερη κατανόηση της χρήσης του, θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα απλοποίησης με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.

Παράδειγμα 1ο:

Έστω η παρακάτω συνάρτηση προς απλοποίηση:

$$T = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} \qquad \textbf{(3-24)}$$

της οποίας ο αντίστοιχος χάρτης Karnaugh αποδίδεται στον *πίνακα 3.8*.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		1
01			1	
11		1	1	
10	1	1		

Πίνακας 3.8. *Χάρτης Karnaugh της σχέσης 3-24*

Η αντίστοιχη απλοποιημένη συνάρτηση, όπως προκύπτει με βάση τις παραπάνω ομαδοποιήσεις, έχει ως εξής: $T = \overline{A}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot D + \overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$

Εάν η υπό μελέτη συνάρτηση έχει πολλούς άσσους, αυτή θα μπορούσε να γραφεί με βάση τα μηδενικά, δηλαδή γινόμενα αθροισμάτων (maxterm), αρκεί να δημιουργηθούν οι κατάλληλοι υποχάρτες μηδενικών.

Παράδειγμα 2ο: (Παράδειγμα όπου γίνεται χρήση των μηδενικών).

Έστω η συνάρτηση: $T = \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$

$$+ A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} \qquad \textbf{(3-25)}$$

από την οποία προκύπτει ο *πίνακας 3.9* που ακολουθεί:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

Πίνακας 3.9. *Χάρτης Karnaugh της σχέσης 3-25*

Η απλοποιημένη συνάρτηση που προκύπτει είναι η: $\overline{T} = A \cdot C + \overline{B} \cdot \overline{D}$ από την οποία, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Morgan, έχουμε: $T = (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (B + D)$

Παράδειγμα 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση: $f = \sum 0,2,4,6,7,10,13,14,15$. Χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh, να βρείτε την ελάχιστη έκφραση του αθροίσματος γινομένων (SOP) και του γινομένου αθροισμάτων (POS).

Λύση

Αρχικά τοποθετούμε τους όρους που δόθηκαν στον *πίνακα 3.10*. Το άθροισμα των γινομένων δεν είναι τίποτε άλλο από τους γνωστούς μας ελαχιστοβάθμιους όρους, τα δε γινόμενα αθροισμάτων είναι οι μεγιστοβάθμιοι όροι.

Είναι προφανές ότι, για να υπολογίσουμε το άθροισμα των γινομένων, κάνουμε τις ομαδοποιήσεις των άσσων της συνάρτησης σε υποχάρτες. Η τελική απλοποιημένη συνάρτηση προκύπτει από την απλοποίηση των όρων. Έτσι έχουμε: $f_1 = A \cdot B \cdot D + B \cdot C + C\overline{D} + \overline{A}\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Πίνακας 3.10. *Η συνάρτηση* $f = \sum 0,2,4,6,7,10,13,14,15$ *σε χάρτη Karnaugh*

Για να προσδιορίσουμε τώρα τα γινόμενα αθροισμάτων, δουλεύουμε με τα μηδενικά, και κατόπιν, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της Άλγεβρας Boole, παίρνουμε το συμπλήρωμα της συνάρτησης. Τελικά καταλήγουμε στην: $f_2 = (\overline{A} + C + D) \cdot (A + C + \overline{D}) \cdot (B + \overline{D})$

(Η απόδειξη και των δύο παραπάνω σχέσεων αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη).

3.9.5. Χάρτης Karnaugh με περισσότερες από τέσσερις μεταβλητές

Αν ένας χάρτης Karnaugh περιλαμβάνει περισσότερες από τέσσερις μεταβλητές είναι προτιμότερο, αντί για ένα ενιαίο χάρτη, όπως αυτός του *πίνακα 3.11* που ακολουθεί, να σχεδιάσουμε δύο ή περισσότερους χάρτες από τους οποίους ο καθένας θα έχει το πολύ τέσσερις μεταβλητές. Π.χ. αν έχουμε μια συνάρτηση με πέντε μεταβλητές, έστω οι **A**, **B**, **C**, **D**, **E,** τότε είναι καλύτερο να δημιουργήσουμε δύο χάρτες, όπως φαίνεται στον *πίνακα 3.11*, όπου στον αριστερό χάρτη έχουμε τη μεταβλητή $\overline{E}$ και στο δεξιό τη μεταβλητή E. *(Nashelsk,y 1994; Κοσσίδας, 1996; Wakerly, 2006; Pritchard, 2015)*

Οι ελάχιστοι όροι από 0 - 15 θα ανήκουν τότε στον αριστερό χάρτη, όπου θεωρούμε ότι E=0 και οι ελάχιστοι όροι από 16 - 31 θα ανήκουν στο δεξιό χάρτη, όπου έχουμε τη μεταβλητή E=1.

Για κάθε ένα χάρτη ισχύουν οι κανόνες που έχουν αναφερθεί προηγουμένως. Επιπλέον κάθε τετράγωνο στο χάρτη E=0 είναι γειτονικό με το αντίστοιχο στο χάρτη E=1, εφόσον βρίσκεται στην ίδια θέση υπερθέτοντας υποθετικά τον ένα χάρτη επάνω στον άλλο. Π.χ. το 2 είναι γειτονικό με το 18, το 13 με το 29, το 11 με το 27 κ.λπ. Στην περίπτωση των έξι μεταβλητών, οι αντίστοιχοι χάρτες που πρέπει να δημιουργηθούν είναι τέσσερις (βλέπε πίνακα 3.12α). Και γι’ αυτούς θα ισχύουν τα ίδια, όπως και στους χάρτες των πέντε μεταβλητών.

CD \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
00	**0**	**1**	**3**	**2**
01	**4**	**5**	**7**	**6**
11	**12**	**13**	**15**	**14**
10	**8**	**9**	**11**	**10**

CD \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
00	**16**	**17**	**19**	**18**
01	**20**	**21**	**23**	**22**
11	**28**	**29**	**31**	**30**
10	**24**	**25**	**27**	**26**

Πίνακας 3.11. *Διπλός χάρτης Karnaugh για συναρτήσεις με περισσότερες από τέσσερις μεταβλητές*

Παράδειγμα 4ο:

Θα αναλύσουμε την περίπτωση όπου έχουμε μία συνάρτηση με έξη μεταβλητές. Έστω η συνάρτηση:

$$\begin{aligned}
T = {} & \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E}\cdot F+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E}\cdot F+A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E}\cdot F+ \\
& +A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot\overline{E}\cdot F+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E\cdot F+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}\cdot E\cdot F+ \\
& +\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E\cdot\overline{F}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E\cdot\overline{F}+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\cdot E\cdot\overline{F}+ \\
& +A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot\overline{E}\cdot F+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot E\cdot\overline{F}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D\cdot E\cdot\overline{F}+ \\
& +A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D\cdot E\cdot\overline{F}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot E\cdot\overline{F}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot F+ \\
& +\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot F+A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot F+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot F+ \\
& +A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot\overline{F}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D\cdot\overline{E}\cdot\overline{F} \qquad \textbf{(3-26)}
\end{aligned}$$

Και στον ανωτέρω χάρτη για την ομαδοποίηση των όρων του εφαρμόζουμε τις προϋποθέσεις που χρησιμοποιήσαμε και στο χάρτη των τεσσάρων μεταβλητών. Έτσι ομαδοποιούμε σε ζεύγη ή τετράδες γειτονικούς όρους. Η απλοποίηση αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Ας εξετάσουμε τώρα την παραπάνω περίπτωση, χρησιμοποιώντας τέσσερεις χάρτες των τεσσάρων μεταβλητών (Πίνακας 3.12). Για την απλοποίηση χρησιμοποιούμε τις παρακάτω συνθήκες:

Δύο όροι είναι γειτονικοί, όχι μόνο αν πληρούν τις προϋποθέσεις που εφαρμόσαμε στους χάρτες των τεσσάρων μεταβλητών, αλλά και στην περίπτωση που ο ένας όρος, μετά την υπέρθεση γειτονικών χαρτών, βρίσκεται υπεράνω ή κάτω του άλλου αντίστοιχα. Έτσι, για παράδειγμα, ο όρος 5 είναι γειτονικός του 31 και αντίστοιχα γειτονικός του 37, αφού καταλαμβάνουν την ίδια θέση σε γειτονικό χάρτη των τεσσάρων μεταβλητων**.**

$\overline{E}$, $\overline{F}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

E, $\overline{F}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$\overline{E}$, F

AB \ CD	00	01	11	10
00	32	33	35	34
01	36	37	39	38
11	44	45	47	46
10	40	41	43	42

E, F

AB \ CD	00	01	11	10
00	48	49	51	50
01	52	53	55	54
11	60	61	63	62
10	56	57	59	58

Πίνακας 3.12. *Χάρτης Karnaugh της σχέσης 3-26 με τέσσερις χάρτες(έξη μεταβλητές)*

3.9.6. Μέθοδος ελαχιστοποίησης με τη μέθοδο Quine-Mc Cluskey

Στην περίπτωση στην οποία πρέπει να επιλύσουμε συναρτήσεις με περισσότερες από 6 μεταβλητές, τότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Quine-Mc Cluskey. (*Φραγκάκης, 1975; Nashelsky, 1994; Givone, 2002; Katz, 2005; Wakerly, 2006; Godse, & Godse, 2010; Mano, & Ciletti, 2014; Roth, 2014*). Η μέθοδος αυτή δεν είναι γραφική μέθοδος, όπως ο χάρτης Karnaugh, και μπορεί εύκολα να προγραμματισθεί σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Βασίζεται στη συστηματική και εξαντλητική διερεύνηση της σύγκρισης όλων των όρων της συνάρτησης, την οποία καλούμαστε να απλοποιήσουμε. Θα αναλύσουμε τη μεθοδολογία, δίνοντας ένα παράδειγμα με τέσσερις μεταβλητές:

Παράδειγμα 5ο:

Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση: $f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BD+A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}D+\overline{A}BC$

Λύση

Βήμα 1ο

Αρχικά εκφράζουμε τη συνάρτηση στην κανονικοποιημένη της μορφή και, κατόπιν, αντιστοιχούμε κάθε όρο με τον ισοδύναμο δεκαδικό αριθμό.

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BD+A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}D+\overline{A}BC\Rightarrow$$

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}(D+\overline{D})+\overline{A}B(C+\overline{C})D+A\overline{B}\overline{C}(D+\overline{D})+A\overline{B}(\overline{C}+C)D+\overline{A}BC(D+\overline{D})$$

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}BDC+\overline{A}BD\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}D+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$+A\overline{B}DC+A\overline{B}D\overline{C}+\overline{A}BCD+\overline{A}BC\overline{D}$$

Ξαναγράφοντας τη συνάρτηση αλλά τοποθετώντας τις μεταβλητές στην αντίστοιχη θέση έχουμε:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BCD+\overline{A}B\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$
$$+A\overline{B}CD+A\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}BCD+\overline{A}BC\overline{D}$$

από την οποία απαλείφοντας τους όμοιους όρους και κάνοντας απλοποίηση έχουμε:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BCD+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}CD+\overline{A}BC\overline{D}$$

Οι όροι είναι λοιπόν, από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11.

Βήμα 2ο

Ομαδοποιούμε τους όρους ανάλογα με τον αριθμό των άσσων τους. Έτσι οι όροι της πρώτης ομάδας περιέχουν έναν άσσο, της δεύτερης δύο, κ.ο.κ. Προκύπτει ο πίνακας 3.13α που ακολουθεί.

Βήμα 3ο

Συγκρίνουμε κάθε όρο της πρώτης ομάδας με όλους τους όρους της επόμενης ομάδας. Σε κάθε σύγκριση ελέγχουμε αν οι δύο όροι διαφέρουν σε μία μόνο μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση δημιουργούμε ένα νέο όρο με τις κοινές μεταβλητές των δύο αρχικών όρων. Στη θέση της διαφορετικής μεταβλητής θέτουμε μια παύλα (-).

Το βήμα αυτό εκτελείται συνεχώς, μέχρι ότου να συγκρίνουμε όλους τους όρους της κάθε ομάδας με τους όρους της επόμενης ομάδας και να μην υπάρχει δυνατότητα περαιτέρω συγκρίσεων. Ο αρχικός πίνακας, που προκύπτει, είναι ο πίνακας 3.13β:

Όροι της Συνάρτησης	Δεκαδικός αριθμός	Δυαδική μορφή	Χρήση
$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	4	0100	ναι
$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	8	1000	ναι
$\overline{A}B\overline{C}D$	5	0101	ναι
$\overline{A}BC\overline{D}$	6	0110	ναι
$A\overline{B}\,\overline{C}D$	9	1001	ναι
$\overline{A}BCD$	7	0111	ναι
$A\overline{B}CD$	11	1011	ναι

***Πίνακας 3.13α**. Ομαδοποίηση των όρων ανάλογα με το πλήθος των άσσων τους*

Συνδυασμοί	Δυαδική μορφή	Χρήση
4,5	010-	ναι
4,6	01-0	ναι
8,9	100-	Κ
5,7	01-1	ναι
6,7	011-	ναι
9,11	10-1	Λ

***Πίνακας 3.13β.** Συγχώνευση γειτονικών όρων*

Με βάση τον παραπάνω πίνακα συνεχίζουμε τις συγκρίσεις και έχουμε:

Συνδυασμοί	Δυαδική μορφή	Χρήση
4,5,6,7	01--	Μ

Βήμα 4ο

Αφού εξαντλήσουμε όλους τους όρους, σε όσους από αυτούς δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τοποθετούμε ένα γράμμα, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο βήμα μας. Οι όροι αυτοί ονομάζονται *πρώτοι συνεπάγοντες (prime implicants):*

Βήμα 5ο

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των πρώτων συνεπαγόντων όρων, του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τους πρώτους συνεπάγοντες, και οι στήλες από τους αρχικούς όρους της συνάρτησης. Στα σημεία τομής των συνεπαγόντων όρων με τους αντίστοιχους όρους της αρχικής συνάρτησης θέτουμε ένα Χ.

		4	5	6	7	8	9	11
Κ(8,9)						X	X	
Λ(9,11)							X	X
Μ(4,5,6,7)		X	X	X	X			

Βήμα 6ο

Χρησιμοποιώντας τον τελευταίο πίνακα, βρίσκουμε τους *ουσιώδεις όρους* (essential terms), οι οποίοι ορίζονται ως οι πρώτοι συνεπάγοντες όροι στους οποίους, και μόνο σε αυτούς, περιέχεται ένας από τους όρους της προς απλοποίηση συνάρτησης. Ουσιώδεις λοιπόν είναι οι όροι οι οποίοι έχουν στην κατακόρυφο μόνο ένα Χ. Στην παραπάνω συνάρτηση διαπιστώνουμε ότι όλοι οι όροι είναι ουσιώδεις, καθώς όλοι έχουν από ένα όρο που δε συμπεριλαμβάνεται σε άλλο πρώτο συνεπάγοντα. Ο ουσιώδεις όροι πρέπει να καλύπτουν όλους τους όρους της αρχικής συνάρτησης.

Η τελική συνάρτηση είναι: $f(A,B,C,D) = K + \Lambda + \mathrm{M}$

Όπου $K = A\overline{B}\overline{C}$, $\Lambda = A\overline{B}D$ και τέλος $M = \overline{A}B$ οπότε $f(A,B,C,D) = A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}D + \overline{A}B$. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε το τελικό αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh.

3.9.7. Αδιάφοροι όροι

Στα λογικά κυκλώματα που εξετάσαμε μέχρι τώρα, για καθέναν από τους συνδυασμούς των μεταβλητών εισόδου είχαμε πάντοτε μια συγκεκριμένη τιμή εξόδου, 0 ή 1. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις που για μερικούς συνδυασμούς δε μας ενδιαφέρει το ποια θα είναι η λογική κατάσταση της εξόδου του κυκλώματος. Οι συνδυασμοί αυτοί, στους οποίους η τιμή τους δεν είναι καθορισμένη, και, συνεπώς, δεν επηρεάζει τη συνάρτηση εξόδου, λέγονται *αδιάφοροι όροι (don't care*) και παριστάνονται στους χάρτες του Karnaugh με το σύμβολο Χ.

Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουμε τους όρους αυτούς σ' ένα χάρτη Karnaugh είναι πολύ απλός. Έχοντας τοποθετήσει τους άσσους στα τετράγωνα εκείνα που προβλέπονται από τον πίνακα αλήθειας, τοποθετούμε αμέσως μετά τους αδιάφορους όρους με το Χ. Ελέγχουμε αν μερικά από τα Χ γειτονεύουν με τους άσσους (1). Αν πράγματι συμβαίνει αυτό, θεωρούμε ότι τα συγκεκριμένα Χ έχουν τιμή 1 και κάνουμε τις απλοποιήσεις, όπως ξέρουμε. Εκείνα που δε γειτονεύουν με 1, τα αγνοούμε.

Παράδειγμα 6ο:

Ο πίνακας 3.14 περιγράφει παράδειγμα στο οποίο γίνεται χρήση των αδιάφορων όρων: Έστω ότι έχουμε τα δέκα ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης (0_{10} - 9_{10}) και θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα λογικό κύκλωμα που στην έξοδό του θα παράγει λογικό 1 μόνο, όταν στην είσοδο του κυκλώματος υπάρχει ένας δυαδικός αριθμός που αντιπροσωπεύει έναν περιττό δεκαδικό. Δεδομένου ότι τα δέκα δεκαδικά ψηφία περιγράφονται με δέκα συνδυασμούς των τεσσάρων δυαδικών ψηφίων, ο πίνακας αλήθειας, που θα περιγράφει τη συνάρτηση, θα περιλαμβάνει $2^4 = 16$ γραμμές, εκ των οποίων μόνο οι 10 θα είναι δυνατόν να επιβληθούν στην είσοδο του κυκλώματος. Οι υπόλοιπες 6 είσοδοι αναφέρονται σε συνδυασμούς οι οποίοι δεν περιγράφουν αριθμούς του δεκαδικού συστήματος και, συνεπώς, είναι αδιάφοροι όροι.

ΔΕΚΑΔΙΚΟ	ΔΥΑΔΙΚΟ ABCD	ΕΞΟΔΟΣ T
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	0
3	0011	1
4	0100	0
5	0101	1
6	0110	0
7	0111	1
8	1000	0
9	1001	1
10	1010	X
11	1011	X
12	1100	X
13	1101	X
14	1110	X
15	1111	X

Πίνακας 3.14. *Όροι με αδιάφορες καταστάσεις*

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί στον πίνακα αλήθειας.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X	1
11	1	1	X	X
10	0	0	X	X

Από το χάρτη Karnaugh, αν δε λάβουμε υπόψη τους αδιάφορους όρους, προκύπτει η λογική συνάρτηση: **T= ¬AD +¬B¬CD** (άλλος τρόπος απεικόνισης που απαντάται στην βιβλιογραφία) ή αλλιώς $T = \overline{A} \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D$, (έχουμε μία τετράδα όρων και ένα ζευγάρι).

Αν θεωρήσουμε τους αδιάφορους όρους που γειτονεύουν με 1 ίσους με 1, θα έχουμε μια απλούστερη μορφή: (έχουμε μία οκτάδα γειτονικών όρων) $\mathbf{T = \overline{A} \cdot D + A \cdot D = D}$.

Άρα η χρήση των αδιάφορων όρων βοηθά στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης.

3.10. Ασκήσεις – Ερωτήσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Κάθε «1» σε ένα χάρτη Karnaugh αντιπροσωπεύει:
   Α. HIGH για κάθε είσοδο κατάστασης του πίνακα αληθείας που παράγει έξοδο HIGH
   Β. έξοδο HIGH στο πίνακα αληθείας για όλους τους LOW συνδυασμούς εισόδων
   Γ. έξοδο LOW για όλες τις HIGH πιθανές καταστάσεις εισόδου
   Δ. κατάσταση ΑΔΙΑΦΟΡΗ για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς εισόδων του πίνακα αληθείας

2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα της άλγεβρας Boole αναφέρει ότι: A + B = A x B
   Α. Σωστό   Β. Λάθος

3. Να μετατρέψετε την παρακάτω έκφραση του SOP σε μια ισοδύναμη με POS.

   $X = ABC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$

   Α. $X = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$
   Β. $X = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)$
   Γ. $X = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)$
   Δ. $X = (A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)$

4. Όταν ομαδοποιούμε κελιά σε ένα χάρτη Karnaugh, τα κελιά πρέπει να συνδυάζονται σε ομάδες των:
   Α. 2   Β. 1, 2 , 4, 8 κ.τ.λ.   Γ. 4   Δ. 3

5. Στη συνάρτηση $X = \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$ αντιστοιχεί ο χάρτης Karnaugh

AB \ C	0	1		AB \ C	0	1		AB \ C	0	1		AB \ C	0	1
00				00	1			00		1		00	1	1
01	1	1		01	1	1		01				01		
11	1			11				11	1	1		11	1	
10		1		10	1			10	1	1		10		1

(A)   (B)   (C)   (D)

   Α. (A)   Β. (B)   Γ. (C)   Δ. (D)

6. Ποια πρόταση περιγράφει καλύτερα το χάρτη Karnaugh;
   Α. Ο χάρτης Karnaugh χρησιμοποιείται, για να αντικαταστήσει τους κανόνες της Άλγεβρας Boole
   Β. Ο χάρτης Karnaugh απαλείφει την ανάγκη για πύλες NAND και NOR
   Γ. Τα συμπληρώματα των μεταβλητών θα απαλειφθούν με το χάρτη Karnaugh
   Δ. Ο χάρτης Karnaugh αποτελεί ένα εύκολο τρόπο απλοποίησης των Boolean εκφράσεων

7. Ποιος από τους παρακάτω συνδυασμούς δεν μπορεί να συμπεριληφθεί σε χάρτη Karnaugh;
   Α. Γωνίες στην ίδια γραμμή   Β. Γωνίες στην ίδια στήλη
   Γ. Διαγώνιος   Δ. Επικαλυπτόμενοι συνδυασμοί

8. Ποιο από τα παρακάτω παραδείγματα εκφράζει ην επιμεριστική ιδιότητα της άλγεβρας Boole;
   Α. (A + B) +C =A+ (B+C)   Β. A(B+C) =AB+AC
   Γ. A + (B+C) =AB+AC   Δ. A(BC) = (AB) +C

9. Να καθορίσετε τις δυαδικές τιμές των μεταβλητών για τις οποίες η έκφραση των POS

   $X = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C}) = 0\cdot$

   Α. (0 + 1 + 0)(1 + 0 + 1)   Β. (1 + 1 + 1)(0 + 0 + 0)
   Γ. (0 + 0 + 0)(1 + 0 + 1)   Δ. (1 + 1 + 0)(1 + 0 + 0)

10. Εφαρμόζοντας το θεώρημα De Morgan στην έκφραση $X = \overline{ABC}$ έχουμε ως αποτέλεσμα:

Α. $X = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ Β. $X = \overline{(A + B + C)}$

Γ. $X = A + \overline{B} + \overline{C}C$ Δ. $X = A(B + C)$

11. Συστηματική μείωση των λογικών κυκλωμάτων επιτυγχάνεται με:
Α. Χρήση άλγεβρας Boolean Β. Συμβολική μείωση
Γ. Λογική TTL Δ. Χρήση πινάκων αληθείας

12. Πόσες πύλες απαιτούνται για να υλοποιηθεί η παρακάτω Boolean έκφραση, πριν την απλοποίηση; XY + X(X + Z) + Y(X + Z)
Α. 1 Β. 2 Γ. 4 Δ. 5

13. Η έκφραση AC+ABC=AC είναι
Α. Σωστή Β. Λάθος

14. Ο χάρτης Karnaugh είναι ένας συστηματικός τρόπος απλοποίησης της έκφρασης:
Α. POS Β. XNOR Γ. SOP Δ. Των συζυγών παραστάσεων

15. Ένα από τα θεωρήματα De Morgan εκφράζεται από τη σχέση $\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ:
Α. Μιας NOR και μιας AND πύλης με ανεστραμμένες εισόδους
Β. Μιας NAND και μιας OR πύλης με ανεστραμμένες εισόδους
Γ. Μιας AND και μιας NOR πύλης με ανεστραμμένες εισόδους
Δ. Μιας NOR και μιας NAND πύλης με ανεστραμμένες εισόδους

16. Ποιο από τα παρακάτω είναι σημαντικό χαρακτηριστικό της έκφρασης του SOP;
Α. Όλα τα λογικά κυκλώματα είναι απλά AND και OR πύλες
Β. Μειώνεται σημαντικά ο χρόνος καθυστέρησης (Delay)
Γ. Δεν υπάρχει σήμα που να πρέπει να περάσει μέσα από περισσότερες από δύο πύλες, μη συμπεριλαμβάνοντας τους μετατροπείς
Δ. Ο μέγιστος αριθμός πυλών που κάθε σήμα μπορεί να περάσει μέσα τους μειώνεται κατά έναν παράγοντα του δύο.

17. Για τον παρακάτω πίνακα αληθείας να καθοριστεί η έκφραση SOP

ΕΙΣΟΔΟΙ			ΕΞΟΔΟΣ
A	**B**	**C**	**X**
0	0	0	*0*
0	0	1	***1***
0	1	0	*0*
0	1	1	***1***
1	0	0	*0*
1	0	1	*0*
1	1	0	***1***
1	1	1	*0*

Α. X= A$\bar{B}$C+ ABC + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ Β. X= A$\bar{B}$C+ ABC + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
Γ. X= A$\bar{B}$C+ ABC + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ Δ. X= A$\bar{B}$C+ ABC + $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

18. Σε έναν πίνακα αληθείας για την έκφραση SOP $X = A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C}$ πόσους συνδυασμούς εισόδων μπορούμε να έχουμε; $X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$
Α. 1 Β. 2 Γ. 4 Δ. 8

19. Για την έκφραση του SOP $X = A\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$ πόσοι άσσοι βρίσκονται στη στήλη της εξόδου του πίνακα αληθείας;
Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 5

20. Πριν την εφαρμογή αθροίσματος γινομένων (SOP), πόσες πύλες θα απαιτούσε η εξίσωση $X = AB(\overline{C}D + EF)$;

Α. 1 Β. 2 Γ. 4 Δ. 5

21. Η έκφραση του SOP που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα αληθείας είναι:

ΕΙΣΟΔΟΙ			ΕΞΟΔΟΣ
A	B	C	X
0	0	0	*0*
0	0	1	*1*
0	1	0	*0*
0	1	1	*0*
1	0	0	*0*
1	0	1	*0*
1	1	0	*1*
1	1	1	*0*

Α. X= $A\bar{B}C + AB\bar{C}$

Β X= ABC+ ABC

Γ. X= $\bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C}$

Δ. Καμία από τις ανωτέρω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Να δειχθεί με τη βοήθεια πινάκων αληθείας ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των λογικών συναρτή-σεων:** $T_1 = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$ **και** $T_2 = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
Στη συνέχεια να σχεδιαστούν τα λογικά κυκλώματα που αντιστοιχούν σ' αυτές.
2. **Να αποδειχθεί η παρακάτω λογική ισότητα** $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = A \cdot C + \overline{A} \cdot B$ **:**
α) αλγεβρικά και β) με τη βοήθεια του πίνακα αληθείας.
Να σχεδιασθεί το λογικό κύκλωμα της συνάρτησης με διακόπτες.
3. **Να απλοποιήσετε αλγεβρικά την παρακάτω λογική συνάρτηση:**
$T = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$
4. **Να απλοποιήσετε με χάρτη Karnaugh τις παρακάτω λογικές συναρτήσεις**
α) $T_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D +$
$+ \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
β) $T_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$
5. **Να απλοποιήσετε, με χάρτη Karnaugh, τη συνάρτηση:**
$$T = (A + B + C + D) \cdot (\overline{A} + B + C + D) \cdot (A + B + C + \overline{D}) \cdot (A + B + \overline{C} + D) \cdot$$
$$(A + \overline{B} + C + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$$
Σημείωση: Για τη λύση της άσκησης καλό είναι να υπολογιστεί πρώτα αναλυτικά η $\overline{\mathbf{T}}$, να γίνει ο χάρτης Karnaugh, που αντιστοιχεί σ' αυτή, και, στη συνέχεια, για τον υπολογισμό της T, να ληφθούν υπόψη οι κενές θέσεις (μηδενικά της $\overline{\mathbf{T}}$).
6. **Να γράψετε την έκφραση ελαχίστων όρων της συνάρτησης:** $f(A, B, C) = A + BC$
7. **Να απλοποιήσετε την λογική συνάρτηση: α) αλγεβρικά και β) με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.** $T = \overline{A} + A \cdot \overline{B} + B \cdot D + B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$
8. **Να εκφράσετε σε κανονική μορφή τις λογικές συναρτήσεις:**
$$T(A, B, C, D, E) = ABD\overline{E} + A\overline{BE} + \overline{C}E + B\overline{E}$$
$$T(A, B, C) = AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + B\overline{C}$$
9. **Δίνεται ο παρακάτω χάρτης Karnaugh:**

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11				
10	1			1

Να βρεθεί η λογική συνάρτηση που παριστάνει ο χάρτης και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα με διακόπτες.

10. **Για τους παρακάτω χάρτες Karnaugh να γραφούν οι αντίστοιχες λογικές συναρτήσεις.**

C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1		1	1	

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11		1	1	
10	1			1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1			1
11	1			
10	1		1	1

11. **Να απλοποιηθεί με τη μέθοδο Quine-Mc-Cluskey η λογική συνάρτηση:** $f(A,B,C,D,E)=\sum(0,1,2,6,7,8,10,13,17,18,21,22,29,30)$

12. **Να σχεδιάσετε το χάρτη Karnaugh των συναρτήσεων:**

$$f(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{B}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{D})(\overline{C}+\overline{D})$$

$$f(A,B,C,D)=A\overline{B}+C(\overline{D}\oplus(A\oplus B))+A\overline{C}D$$

13. **Να χρησιμοποιήσετε χάρτη Karnaugh και να βρείτε την ελάχιστη συνάρτηση αθροίσματος γινομένων καθώς και την ελάχιστη συνάρτηση γινομένου αθροισμάτων της συνάρτησης:**
$T_1(A,B,C,D) = \sum(0,2,4,6,7,10,13,14,15)$
14. **Να απλοποιήσετε με χάρτη Karnaugh τις λογικές συναρτήσεις:**
$T_1(A,B,C,D) = \sum(0,2,5,6,7,8,10)$ **και** $T_2(X,Y,Z,W) = \sum(5,6,9,10)$
15. **Τι ονομάζουμε δυϊκότητα; Τι ονομάζουμε μεγιστοβάθμιους και τι ελαχιστοβάθμιους όρους;**
16. **Να εκφραστεί η λογική συνάρτηση** $T(A,B,C,D) = \sum(0,2,5,7,10,13)$ **με τρεις διαφορετικούς τρόπους.**
17. **Να απλοποιήσετε τις παρακάτω λογικές συναρτήσεις με το χάρτη Karnaugh.**
α) $T_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C$
β) $T_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
γ) $\mathrm{T_3} = \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{D} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{D} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{D} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{D} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
δ) $\mathrm{T_4} = \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \overline{\mathrm{D}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \overline{\mathrm{D}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{D} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{D} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{D}$
$+ A \cdot B \cdot C \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

Αναφορές-Βιβλιογραφία

Κοσσίδας Α.Θ. (1996). *Σχεδίαση Ψηφιακών Κυκλωμάτων*, Εκδόσεις Μπένος

Φραγκάκης Γ. (1975). Λογικά Κυκλώματα, Αθήνα

Balabanian N., Carlson B. (2007). *Digital Logic Design Principles*, John Wiley

Floyd Thomas L. (2013). *Digital Fundamentals: A systems Approach*, Pearson International Edition

Givone D, (2002). *Digital Principles and Des*ign,. Mc Graw Hill

Godse A.P., Godse D.A. (2011). *Digital Logic Design and Application*, 2nd, Technical Publications Pune

Holdsworth Brian, Woods Clive (2002). *Digital Logic Design*, 4th Edition, Newnes

Katz R., (2005). *Contemporary Logic Design*, 2/e, Prentice Hall

Mano M., Ciletti M., (2014). *Ψηφιακή Σχεδίαση*, 5η έκδοση, Παπασωτηρίου

Maxfield Clive (2009). Bebop to the Boolean Boogie, *An Unconventional Guide to Electronics*, 3rd, Newnes, Elsevier (Online έκδοση: http://english.360elib.com/datu/T/EM140371.pdf)

Nashelsky Louis (1994). *Introduction to Digital Technology*, 4th Ed., Prentice Hall

Nelson V., Nagle H., Carroll B., Irwin J. (1995). *Digital Logic Circuit Analysis and Design*, Prentice-Hall

Predko Myke (2005). *Digital Electronics Demystified*, Mc Graw Hill

Pritchard N. (2015). *Fundamentals of Digital Electronics*, CreateSpace Independent Publishing Platform

Roth Charles Jr., Kinney L.L., (2014). *Fundamentals of Logic Design*, 7th, Cengage Learning

Tocci R. J., Widmer N. S, and Moss Gr. L. (2010). *Digital Systems: Principles and Applications*, 11th, Boston, Addison-Wesley

Wakerly J. (2006). *Digital Design Principles and Practices*, 4/e, Prentice Hall