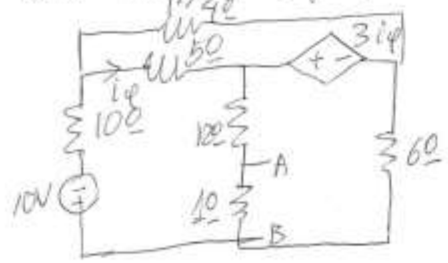
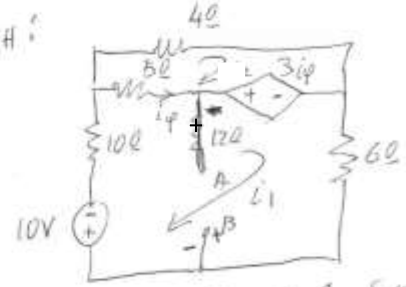
Ισοδύναμα κατά Thevenin – Norton

όταν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές



V_{TH}:



$$\begin{bmatrix} 21 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-3i_\varphi \\ 3i_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-3(i_1-i_2) \\ 3(i_1-i_2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$i_\varphi = i_1 - i_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 224$

$i_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -0{,}536\,A$

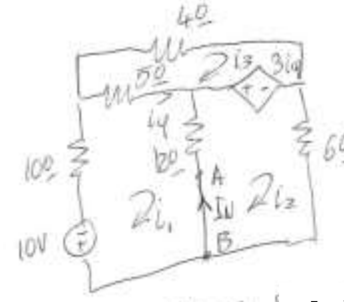
$i_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -0{,}357\,A$

$|A_2| = \begin{bmatrix} 24 & -10 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = -80 \quad |A_1| = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = -120$

$10V + i_1 10 + (i_1 - i_2)5 + V_{TH} = 0 \Rightarrow 10V + (-0{,}536A)\cdot 10\Omega + 5\Omega(-0{,}536+0{,}3$

$+V_{TH} = 0 \Rightarrow 10V - 5{,}36\,V - 0{,}89 - V_{TH} = 0 \Rightarrow V_{TH} = +3{,}74$

I_N:



$$\begin{bmatrix} 27 & -12 & -5 \\ -12 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -3i\varphi \\ 3i\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -3(\iota1-\iota3) \\ 3(\iota1-\iota3) \end{bmatrix}$$

$i_\varphi = i_1 - i_3$

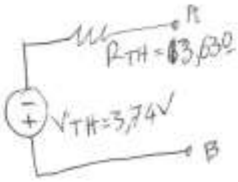
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 27 & -12 & -5 \\ -9 & 18 & -3 \\ -8 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota1 \\ \iota2 \\ \iota3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

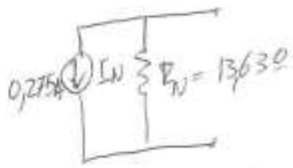
$i_1 = -0{,}55$

$i_2 = -0{,}274$

$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} = 13{,}63\,\Omega$

$I_N = i_2 - i_1 = 0{,}275\,A$





$$P = I^2 R_L = \left(\frac{V_{TH}}{R_L + R_{TH}}\right)^2 R_L$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{{V_{TH}}^2((R_L + R_{TH})^2 - R_L 2(R_L + R_{TH})}{(R_L + R_{TH})^4} = \frac{{V_{TH}}^2(-{R_L}^2 + {R_{TH}}^2)}{(R_L + R_{TH})^4} = 0$$

$$-{R_L}^2 + {R_{TH}}^2 = 0 \Rightarrow R_L = \mp R_{TH}$$

$$R_L = R_{TH}$$

$$P_{max} = \left(\frac{V_{TH}}{R_L + R_{TH}}\right)^2 R_L = \left(\frac{V_{TH}}{2R_{TH}}\right)^2 R_{TH} = \frac{{V_{TH}}^2}{4R_{TH}}$$

Π.χ

Στο προηγούμενο παράδειγμα

$$P_{max} = \frac{{V_{TH}}^2}{4R_{TH}} = \frac{(3{,}74V)^2}{4R_{TH}}$$

Ηλεκτρική ισχύς

Στιγμιαία ισχύς $p(t) = i(t)v(t)$

Ενεργός ισχύς $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt}$ για περιοδικό σήμα

μέση ισχύς $\bar{P} = \frac{1}{t}\int_0^t p(t)dt$

Μιγαδική ισχύς

$S = P + jQ$

S σε V.A | $S = |S|e^{j\varphi} = |S|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

P σε Watt | $P = |S|\cos\varphi$

Q σε VAr | $Q = |S|\sin\varphi \Rightarrow Q = P\tan\varphi$

P η ενεργός πραγματική ισχύς $\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$

Q η άεργος ισχύς — Q αποθηκεύεται στα ηλεκτ. πεδία C / μαγν. πεδία L

P καταναλώνεται ως θερμότητα

Για εναλλασσόμενα ρεύματα (δηλ. όταν οι τάσεις και τα ρεύματα είναι ημιτονοειδή σήματα) μετά την πάροδο των μεταβατικών φαινομένων οι τάσεις και τα ρεύματα στους κλάδους γραμμικών κυκλωμάτων με μιγαδικές αντιστάσεις είναι ημιτονοειδή σήματα της ίδιας συχνότητας. ~~Τα~~ τους Εάν ω γνωστή μορφής $V(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$ ή $I(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$. τότε $V(t)$, $i(t)$ περιγράφονται από τα μεγέθη $\dot{V} = V\angle\varphi$, $\dot{I} = I\angle\varphi$

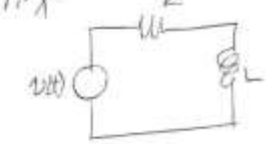
$\dot{V}$, $\dot{I}$ ονομάζονται φασιθέτες ή φάσορες

Αποδεικνύεται ότι για κυκλώματα με πυκνωτές ή/και πηνία, μπορούμε να τα επιλύσουμε (ως προς τους φάσορες των μεγεθών) χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff και τις μιγαδικές εμπεδήσεις των επιμέρους στοιχείων: $Z_R = R$

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

$Z_L = j\omega L$

Π.χ



$$v(t) = A\cos\omega t$$

$$\dot{V}_{\Pi} = A\angle 0^{\circ}$$

$$a + bj = C = |C|\angle C = \sqrt{a^2+b^2}\,\angle \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$C = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{j\varphi} = |C|e^{j\varphi}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \Rightarrow Z_{o\lambda} = R + j\omega L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{\Pi}}{R+j\omega L} = \left|\frac{\dot{V}}{R+j\omega L}\right| \angle\left(\dot{V} - \angle(R+j\omega L)\right) = \frac{A}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,\angle -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$\angle\frac{1}{C} = -\angle C \qquad \angle a+bj = \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\left|\frac{1}{C}\right| = \frac{1}{|C|} \qquad a+bj = |a+bj|e^{j\varphi} = |a+bj|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$\cancel{S = \dot{V}\dot{I}}$ ισχύει:

$$\dot{V}_{\Pi} = \dot{I}\,Z_{o\lambda}$$

$$\dot{V}_R = \dot{V}_{\Pi}\,\frac{R}{R+j\omega L}$$

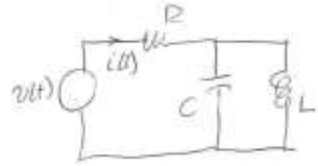
$$\dot{V}_L = \dot{V}_{\Pi}\,\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$$

$$S = \dot{V}\cdot\dot{I} = A\angle 0^{\circ} \cdot \frac{A}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,\angle -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} =$$

$$= \frac{A^2}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,\angle -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} = |S|\angle\varphi = |S|(\cos\varphi + j\sin\varphi) =$$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{\frac{A^2}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\varphi}_{Q}$$

Πχ. 2

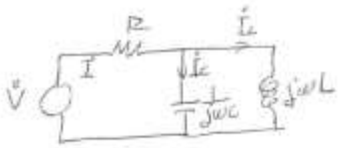


$v(t) = 2\cos t$

$R = 1\Omega$

$C = 0,5\,F$

$L = 0,5\,H$



Ποιό το ρεύμα στην εισαγωγή;

Ποιά η πραγματική, η άεργος και η μιγαδική ισχύς ~~στην εισαγωγή~~ που καταναλώνεται από το κύκλωμα

$\dot V_\pi = 2\angle 0$

$$\dot I_L = \dot I \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \dot I \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{(j\omega L)(j\omega C)}{j\omega C}} = \dot I \frac{1}{1-\omega^2 LC} \quad (1)$$

$$\dot I = \frac{\dot V}{Z_{o\lambda}}$$

$$Z_{o\lambda} = R + (Z_C // Z_L) = R + \frac{\frac{1}{j\omega C} j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = R + \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{\frac{1-\omega^2 LC}{j\omega C}} = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$\dot I = \frac{\dot V}{Z_{o\lambda}} = \frac{|V|\angle 0}{\frac{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L}{1-\omega^2 LC}} = \frac{|V|(1-\omega^2 LC)\angle 0}{|R(1-\omega^2 LC) + j\omega L| \angle \tan^{-1}\frac{L}{R - RLC\omega^2}} =$$

$$= \frac{2(1-0,5\cdot 0,5)\angle 0}{|1(1-0,5\cdot 0,5) + j0,5| \angle \varphi} = 1,664 \angle -33,69^\circ\ A$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{0,5}{1-0,25} = 33,69^\circ$$

(1) $\dot I_L = 1,664 \cdot \frac{1}{1-0,25} \angle -33,69^\circ + 0\ A = 2,219 \angle -33,69^\circ\ A$

$i_L = \quad \cos(t$

$$S = \dot V \cdot \dot I = 2\cdot|\dot I| \angle 0+\varphi = 2\cdot 1,664 \angle -33,69^\circ\ VA = 3,328\ V.A \angle -33,69^\circ$$

$$= 3,328\cos(-33,69^\circ) + j\,3,328\sin(-33,69^\circ) =$$

$$= \underbrace{2,769}_{P} - j\,1,846\ \ VA$$

$P = 2,769\ Watt \quad Q = 1,846\ VAr$