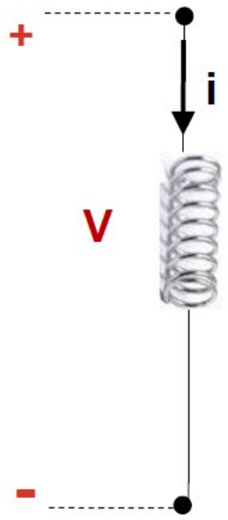
Πηνίο

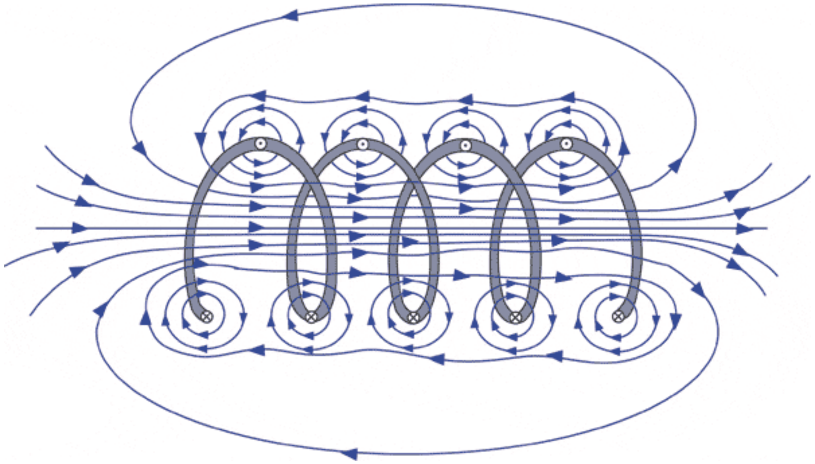
- **Πηνίο** (ή επαγωγέας) είναι στοιχείο κυκλώματος που προκύπτει από ένα **περιελιγμένο σύρμα** γύρω από έναν πυρήνα υλικού μέσου (π.χ. συνήθως γύρω από σιδηρομαγνητικό υλικό ή, στην απλούστερη περίπτωση, τον αέρα).
- Αξιοποιείται χάρις στην ικανότητά του να αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια διαμέσου της μαγνητικής ροής που εμπλέκει το αγώγιμο τύλιγμά του (**φαινόμενο ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής**).
- **Εφαρμογές**: ηλεκτροκινητήρες, μετασχηματιστές, ηλεκτρικές γεννήτριες, ηλεκτρομαγνήτες κ.τλ.

Πηνίο

- **Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή:** ρεύμα έντασης $\boldsymbol{i}$ διαρρέει ένα πηνίο → δημιουργία μαγνητικού πεδίου → μαγνητική ροή $\boldsymbol{\varphi}$ (αριθμός μαγνητικών γραμμών που διέρχονται από μια επιφάνεια) → $\boldsymbol{\varphi(t) = f\big(i(t)\big)}$



Σύμβολο



Διάταξη

Πηνίο

- **Νόμος Faraday:** μεταβολή της μαγνητικής ροής $\boldsymbol{\varphi}$ που διέρχεται από τις σπείρες ενός πηνίου $\rightarrow$ δημιουργία (επαγωγή) διαφοράς δυναμικού στα άκρα του (ηλεκτρεγερτική δύναμη, ΗΕΔ) $\rightarrow \boldsymbol{v(t)} \propto \frac{\boldsymbol{d\varphi(t)}}{\boldsymbol{dt}}$
- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πηνίο**: $\boldsymbol{\varphi(t) = Li(t)}$ όπου $\boldsymbol{L}$: **αυτεπαγωγή** $\rightarrow$ ικανότητα του πηνίου να αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια, μονάδα μέτρησης Henry, εξαρτάται μόνο από γεωμετρικά/ μαγνητικά χαρακτηριστικά του μέσου και όχι από την τροφοδοσία.

Πηνίο

- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πηνίο**:

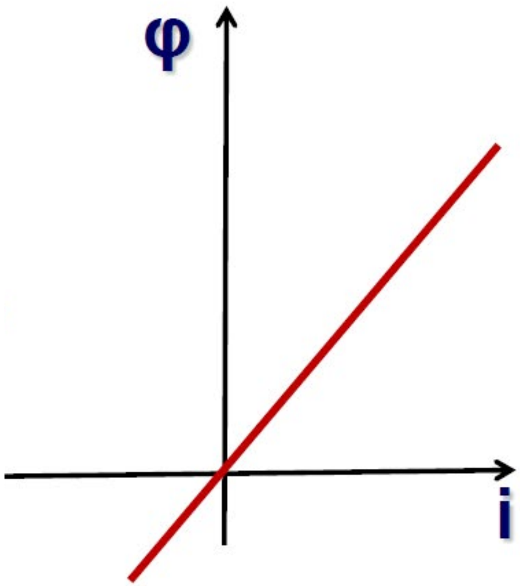
$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow$$

i, v συνδέονται με **διαφορική σχέση**

- **Ισχύς:** $p(t) = v(t)i(t) = L\frac{di(t)}{dt}i(t)$
- **Ενέργεια** σε διάστημα $[t_o, t]$:

$$w(t) = \int_{t_o}^{t} p(t)dt \rightarrow$$

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(t_o)$$



Χαρακτηριστική i - φ

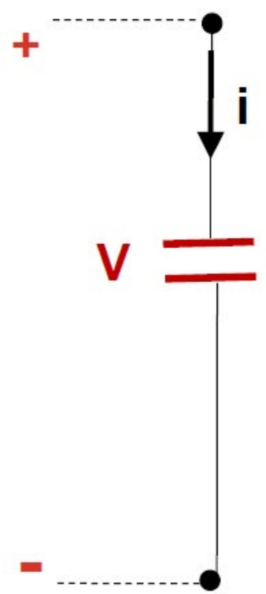
- $w(t) > 0 \rightarrow$ αποθήκευση ενέργειας στο πηνίο
- $w(t) < 0 \rightarrow$ απόδοση ενέργειας στο κύκλωμα

Πυκνωτής

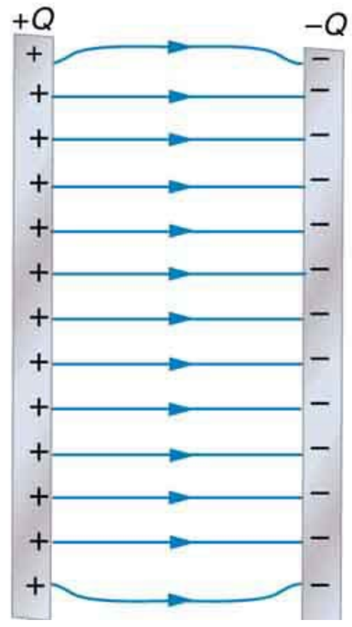
- **Πυκνωτής** είναι στοιχείο κυκλώματος που προκύπτει από μια διάταξη παράλληλων αγώγιμων σωμάτων (οπλισμοί) που διαχωρίζονται από μονωτικό ή διηλεκτρικό υλικό μέσο.
- Αξιοποιείται χάρις στην ικανότητά του να αποθηκεύει ηλεκτρική ενέργεια διαμέσου της συγκέντρωσης ίσων αλλά αντίθετης πολικότητας ηλεκτρικών φορτίων στους οπλισμούς του.
- **Εφαρμογές**: τροφοδοτικά, αντιστάθμιση ηλεκτρικών μηχανών, φίλτρα κ.τλ.

Πυκνωτής

- **Δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου:** επιβολή τάσης $\boldsymbol{v}$ στα άκρα του πυκνωτή → συσσώρευση ηλεκτρικού φορτίου $\boldsymbol{q}$ στους οπλισμούς του → δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του → $\boldsymbol{q(t) = f(v(t))}$



Σύμβολο



Διάταξη

Πυκνωτής

- **Λειτουργία σε κύκλωμα:** μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου $\boldsymbol{q}$ $\rightarrow$ δημιουργία ρεύματος μεταξύ των οπλισμών $\rightarrow$ $\boldsymbol{i(t)=\frac{dq(t)}{dt}}$
- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πυκνωτή**: $\boldsymbol{q(t)=Cv(t)}$ όπου $\boldsymbol{C}$: **χωρητικότητα** $\rightarrow$ ικανότητα του πυκνωτή να αποθηκεύει ηλεκτρική ενέργεια, μονάδα μέτρησης Farad, εξαρτάται μόνο από γεωμετρικά/ ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του μέσου και όχι από την τροφοδοσία.

Πυκνωτής

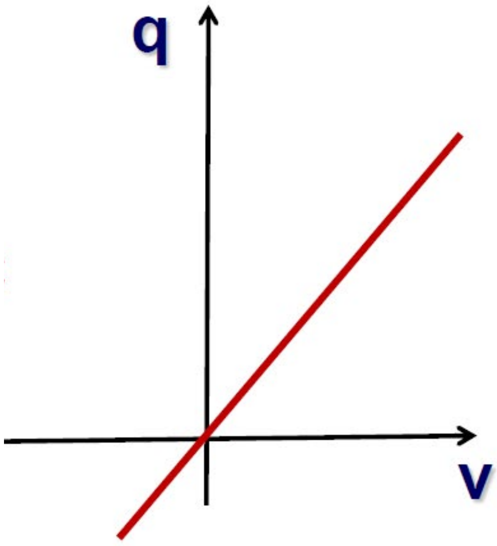
- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πυκνωτή**:

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}} \rightarrow$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}$ συνδέονται με **διαφορική σχέση**

- **Ισχύς:** $\boldsymbol{p(t) = v(t)i(t) = v(t)C\frac{dv(t)}{dt}}$
- **Ενέργεια** σε διάστημα $[\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t}]$:

$$\boldsymbol{w(t) = \int_{t_o}^{t} p(t)dt} \rightarrow$$



Χαρακτηριστική v - q

$$\boldsymbol{w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) - \frac{1}{2}Cv^2(t_o) = \frac{1}{2C}q^2(t) - \frac{1}{2C}q^2(t_o)}$$

➢ $\boldsymbol{w(t) < (>)0} \rightarrow$ απόδοση (αποθήκευση) ενέργειας

Εφαρμογή με πηνίο

Εφαρμογή 9η

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 50 (μH) είναι

$$i(t) = 18t \cdot e^{-10t} (A) \ \text{για} \geq 0^{+} (s)$$

Ζητούνται:

α) η τάση στα άκρα του πηνίου για $t > 0^{+}$.

β) η ισχύς (σε μW) του πηνίου για t = 200 (ms).

γ) απορροφά ή παρέχει ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή t = 200 (ms);

δ) η ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή t = 200 (ms)

ε) η μέγιστη ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο καθώς και η χρονική στιγμή (σε ms) που συμβαίνει αυτό.

στ) οι γραφικές παραστάσεις των i(t), v(t), p(t), w(t).

Εφαρμογή 9η

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 50 (μH) είναι

$$i(t) = 18t \cdot e^{-10t} (A) \ \text{για} \geq 0^{+} (s)$$

Ζητούνται:

α) η τάση στα άκρα του πηνίου για $t > 0^{+}$.

β) η ισχύς (σε μW) του πηνίου για t = 200 (ms).

γ) απορροφά ή παρέχει ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή t = 200 (ms);

δ) η ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή t = 200 (ms)

ε) η μέγιστη ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο καθώς και η χρονική στιγμή (σε ms) που συμβαίνει αυτό.

στ) οι γραφικές παραστάσεις των i(t), v(t), p(t), w(t).

Λύση

α) Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d}{dt}\left[18t \cdot e^{-10t}\right] = 900 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \ (V)$$

β) $$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \cdot 18t \cdot e^{-10t} = 16200 \cdot e^{-20t} \cdot t \cdot (1 - 10t) \ (\mu J)$$

Άρα

$$p(t = 200\,ms) = 16200 \cdot e^{-20 \cdot 0,2} \cdot 0,2 \cdot (1 - 10 \cdot 0,2) \Rightarrow p(t = 200\,ms) = -59,34 (\mu J)$$

γ) Επειδή $p(t=200\ ms)<0$, συμπεραίνουμε ότι, το πηνίο παρέχει ενέργεια τη χρονική στιγμή $t=200\ (ms)$.

δ)

$$w(t)=\int_0^t p(t)\cdot dt+w(0^-)=16200\cdot\int_0^t e^{-20t}\cdot(t-10t^2)\cdot dt+0 \Rightarrow w(t)=8100\cdot e^{-20t}\cdot t^2\quad(\mu J)$$

Άρα

$$w(t=200\ ms)=8100\cdot e^{-20\cdot 0,2}\cdot 0,2^2 \Rightarrow w(t=200\ ms)=5,93\ (\mu J)$$

ε)

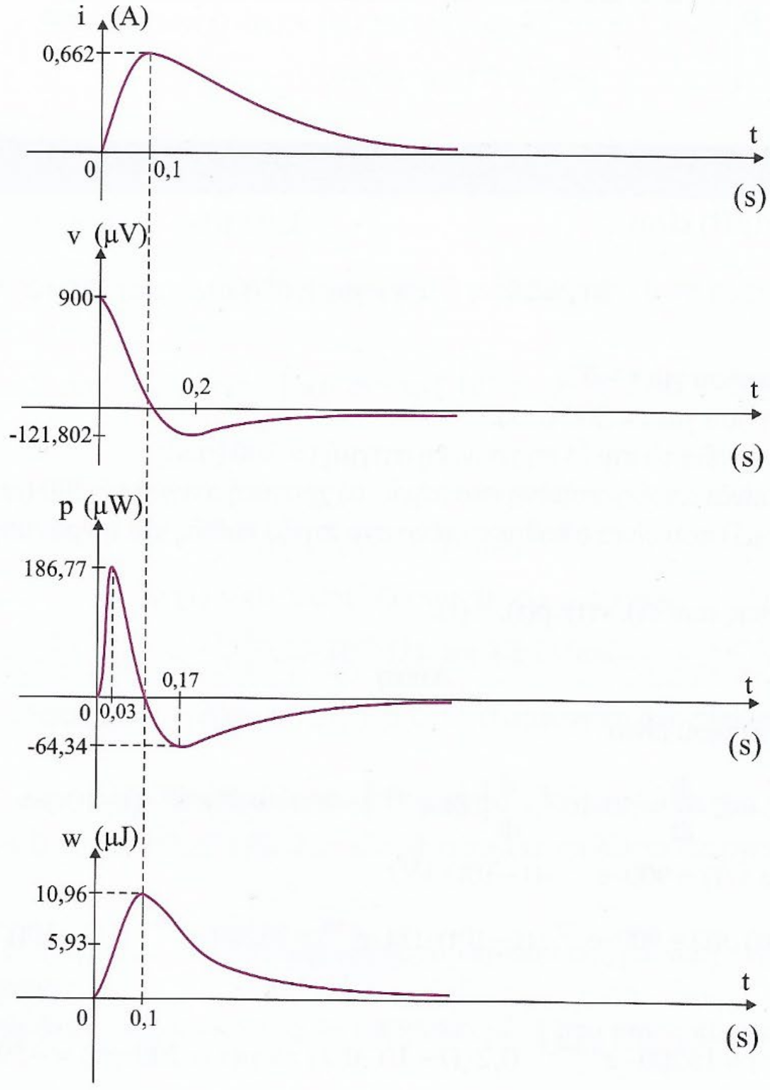
$$\frac{dw(t)}{dt}=0\Rightarrow p(t)=0\Rightarrow 16200\cdot e^{-20t}\cdot t\cdot(1-10t)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t=0 \quad (s) & \text{, απορρίπτεται διότι } w(t=0)=0 \\ t=0,1\ (s) & \end{cases}$$

Για $t=0,1(s)$: $w(t=0,1s)=8100\cdot e^{-20\cdot 0,1}\cdot 0,1^2 \Rightarrow w(t=0,1s)=10,96\ (\mu J)$

Αυτή είναι η μέγιστη ενέργεια ($w_{max}=10,96\ \mu J$) η οποία είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή $t=100\ (ms)$.

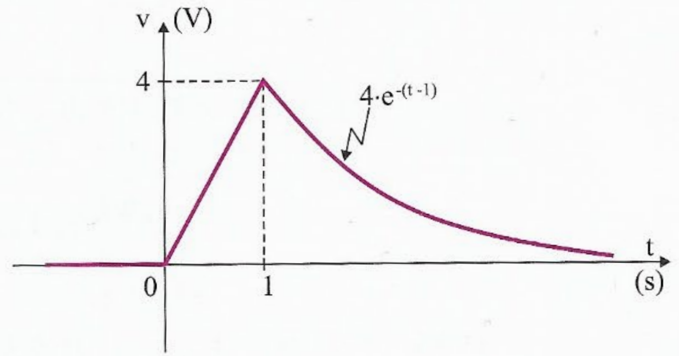
στ) Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών i(t), v(t), p(t), w(t) φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Εφαρμογή με πυκνωτή

Εφαρμογή 11η

Ο παλμός τάσης του διπλανού σχήματος εφαρμόζεται σ' έναν πυκνωτή 0,5 (μF). Βρείτε το ρεύμα, την ισχύ και την ενέργεια του πυκνωτή και δώστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



Λύση

Η αναλυτική έκφραση της τάσης $v(t)$ που εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$v(t)=\begin{cases}0\ (V) & \text{αν}\ \ t\le 0^-(s)\\ 4t\ (V) & \text{αν}\ \ 0^+\le t\le 1^-(s)\\ 4\cdot e^{-(t-1)}\ (V) & \text{αν}\ \ t\ge 1^+(s)\end{cases}$$

Το ρεύμα $i(t)$ στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 0(\mu A) \ \ \alpha\nu \ \ t \le 0^-(s) \\ 2\,(\mu A) \ \ \alpha\nu \ \ 0^+ \le t \le 1^-(s) \\ -2 \cdot e^{-(t-1)}(\mu A) \ \ \alpha\nu \ \ t \ge 1^+(s) \end{cases}$$

Η ισχύς p(t) του πυκνωτή είναι

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \begin{cases} 0\,(\mu W) \ \ \alpha\nu \ \ t \le 0^-(s) \\ 8t\,(\mu W) \ \ \alpha\nu \ \ 0^+ \le t \le 1^-(s) \\ -8 \cdot e^{-2(t-1)}\,(\mu W) \ \ \alpha\nu \ \ t \ge 1^+(s) \end{cases}$$

Για την εύρεση της ενέργειας $w(t)$ του πυκνωτή έχουμε

$$\text{Αν } t \le 0^- \ (s) : w(t) = 0 \ (\mu J)$$

$$\text{Αν } 0^+ \le t \le 1^- \ (s) : w(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt \ + w(0^-) = \int_0^t 8t \cdot dt + 0 = 4t^2 \ (\mu J)$$

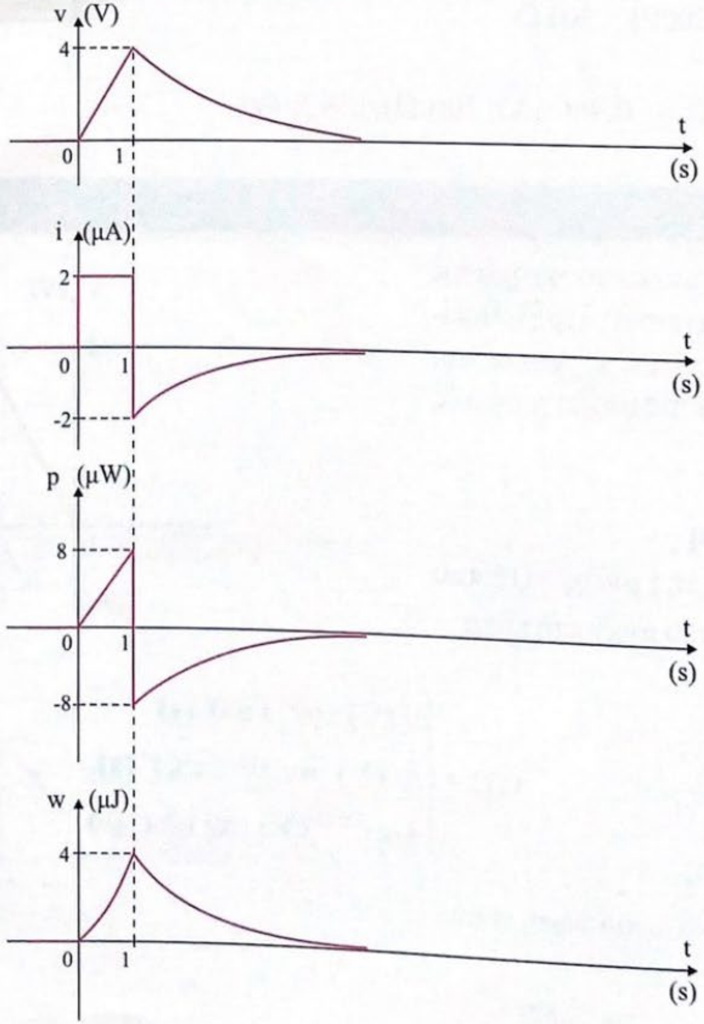
$$\text{Αν } t \ge 1^+ \ (s) : w(t) = \int_1^t p(t) \cdot dt + w(1^-) = -\int_1^t 8 \cdot e^{-2(t-1)} \cdot dt + 4 =$$

$$= 4 \cdot e^{-2(t-1)} \ (\mu J)$$

Επομένως,

$$w(t) = \begin{cases} 0\,(\mu J) \ \ \alpha\nu \ \ t \le 0^-(s) \\ 4 \cdot t^2\,(\mu J) \ \ \alpha\nu \ \ 0^+ \le t \le 1^-(s) \\ 4 \cdot e^{-2(t-1)}\,(\mu J) \ \ \alpha\nu \ \ t \ge 1^+(s) \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών v(t), i(t), p(t), w(t) φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Εφαρμογή με διάταξη πυκνωτών

Εφαρμογή 2-6

Να βρεθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα.

$C_1 = 16\,(\mu F)$

$C_2 = 48\,(\mu F)$

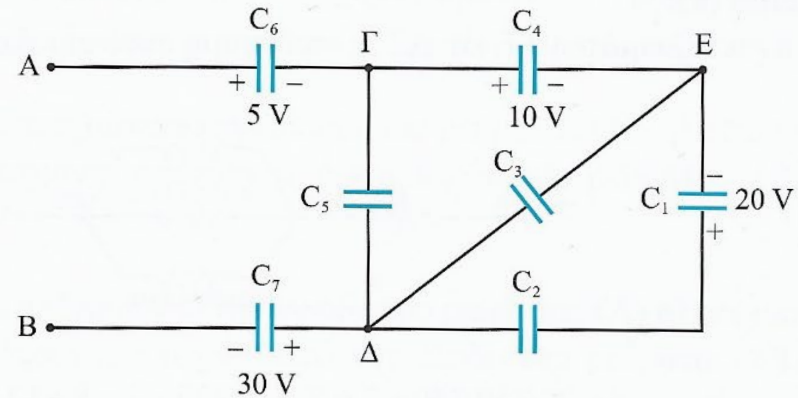
$C_3 = 3\,(\mu F)$

$C_4 = 30\,(\mu F)$

$C_5 = 10\,(\mu F)$

$C_6 = 5\,(\mu F)$

$C_7 = 4\,(\mu F)$



Εφαρμογή 2-6

Να βρεθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα.

$C_1 = 16\,(\mu F)$

$C_2 = 48\,(\mu F)$

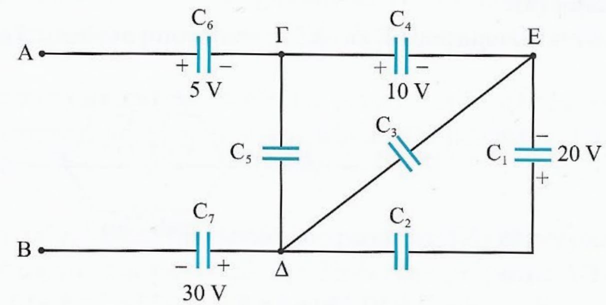
$C_3 = 3\,(\mu F)$

$C_4 = 30\,(\mu F)$

$C_5 = 10\,(\mu F)$

$C_6 = 5\,(\mu F)$

$C_7 = 4\,(\mu F)$



Λύση

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{16 \cdot 48}{16 + 48} = 12\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2}$ είναι: $v_{\Delta E} = v_{c_1} + v_{c_2} = 20 + 0 = 20\,(V)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2}$ και C_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3} = C_{1,2} + C_3 = 12 + 3 = 15\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3}$ είναι $v_{\Delta E} = 20(V)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3}$ και C_4 είναι σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4} = \frac{C_{1,2,3} \cdot C_4}{C_{1,2,3} + C_4} = \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 10\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4}$ είναι: $v_{\Delta\Gamma} = v_{\Delta E} + v_{E\Gamma} = 20 - 10 = 10\,(V)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3,4}$ και C_5 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4,5} = C_{1,2,3,4} + C_5 = 10 + 10 = 20\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4,5}$ είναι $v_{\Delta\Gamma} = 10\,(V)$.

Τέλος

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_{1,2,3,4,5}} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{10}{20} \Rightarrow C_{AB} = 2\,(\mu F)$$

και η τάση του C_{AB} είναι: $v_{AB} = v_{A\Gamma} + v_{\Gamma\Delta} + v_{\Delta B} = 5 - 10 + 30 = 25\,(V)$.

Επομένως, το ισοδύναμο κύκλωμα είναι