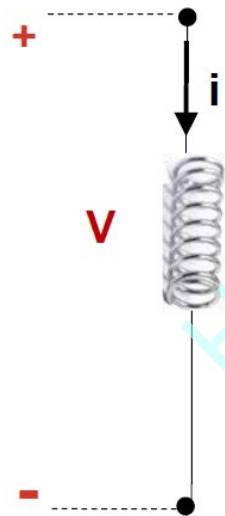


Πηνίο

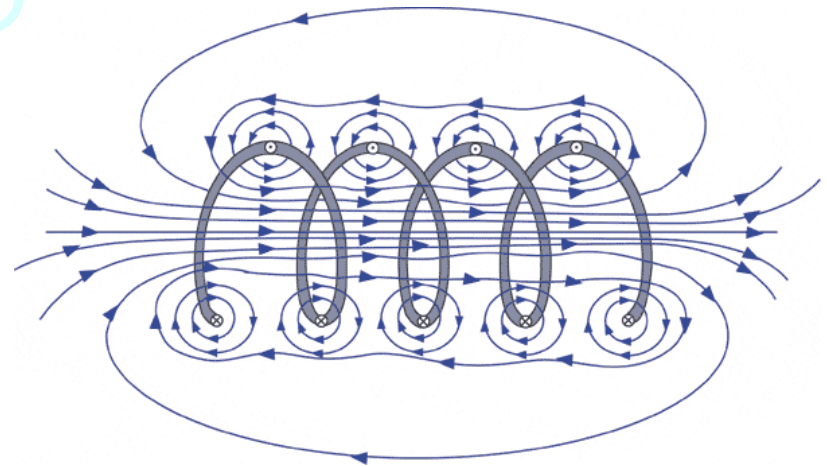
- **Πηνίο** (ή επαγωγέας) είναι στοιχείο κυκλώματος που προκύπτει από ένα **περιελιγμένο σύρμα** γύρω από έναν πυρήνα υλικού μέσου (π.χ. συνήθως γύρω από σιδηρομαγνητικό υλικό ή, στην απλούστερη περίπτωση, τον αέρα).
- Αξιοποιείται χάρις στην ικανότητά του να αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια διαμέσου της μαγνητικής ροής που εμπλέκει το αγωγίμο τύλιγμά του (**φαινόμενο ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής**).
- **Εφαρμογές:** ηλεκτροκινητήρες, μετασχηματιστές, ηλεκτρικές γεννήτριες, ηλεκτρομαγνήτες κ.τλ.

Πηνίο

- **Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή:** ρεύμα έντασης i διαρρέει ένα πηνίο $\rightarrow$ δημιουργία μαγνητικού πεδίου $\rightarrow$ μαγνητική ροή Φ (αριθμός μαγνητικών γραμμών που διέρχονται από μια επιφάνεια) $\rightarrow \Phi(t) = f(i(t))$



Σύμβολο



Διάταξη

Πηνίο

- **Νόμος Faraday:** μεταβολή της μαγνητικής ροής Φ που διέρχεται από τις σπείρες ενός πηνίου $\rightarrow$ δημιουργία (επαγωγή) διαφοράς δυναμικού στα άκρα του (ηλεκτρεγερτική δύναμη, ΗΕΔ) $\rightarrow v(t) \propto \frac{d\Phi(t)}{dt}$
- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πηνίο:** $\Phi(t) = Li(t)$ όπου L : αυτεπαγωγή $\rightarrow$ ικανότητα του πηνίου να αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια, μονάδα μέτρησης Henry, εξαρτάται μόνο από γεωμετρικά/ μαγνητικά χαρακτηριστικά του μέσου και όχι από την τροφοδοσία.

Πηνίο

- Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πηνίο:

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow$$

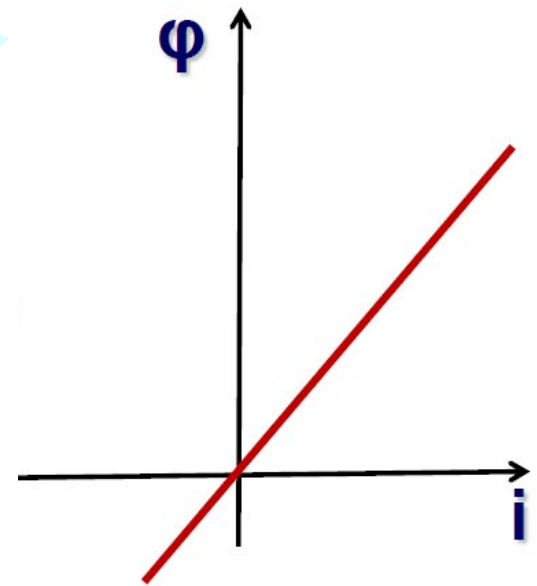
i, v συνδέονται με διαφορική σχέση

- Ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$

- Ενέργεια σε διάστημα $[t_o, t]$:

$$w(t) = \int_{t_o}^t p(t) dt \rightarrow$$

$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(t_o)$$



Χαρακτηριστική $i - \varphi$

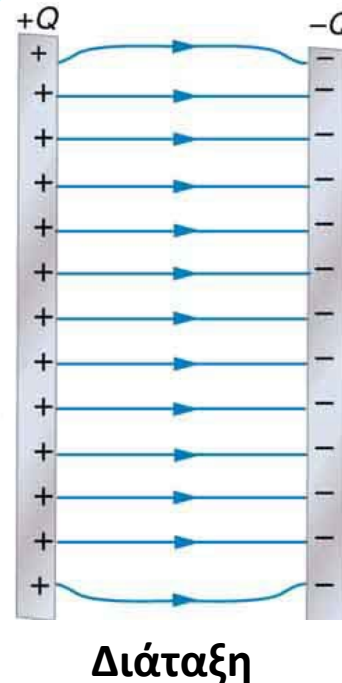
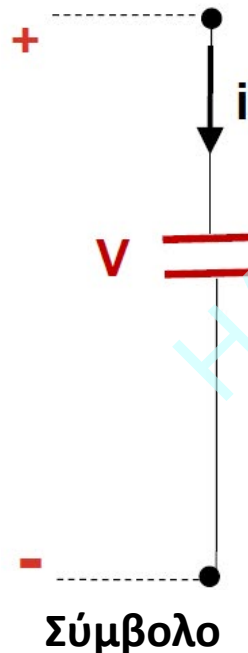
- $w(t) > 0 \rightarrow$ αποθήκευση ενέργειας στο πηνίο
- $w(t) < 0 \rightarrow$ απόδοση ενέργειας στο κύκλωμα

Πυκνωτής

- **Πυκνωτής** είναι στοιχείο κυκλώματος που προκύπτει από μια διάταξη παράλληλων αγωγίμων σωμάτων (οπλισμοί) που διαχωρίζονται από μονωτικό ή διηλεκτρικό υλικό μέσο.
- Αξιοποιείται χάρις στην ικανότητά του να αποθηκεύει ηλεκτρική ενέργεια διαμέσου της συγκέντρωσης ίσων αλλά αντίθετης πολικότητας ηλεκτρικών φορτίων στους οπλισμούς του.
- **Εφαρμογές:** τροφοδοτικά, αντιστάθμιση ηλεκτρικών μηχανών, φίλτρα κ.τλ.

Πυκνωτής

- **Δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου:** επιβολή τάσης v στα άκρα του πυκνωτή $\rightarrow$ συσσώρευση ηλεκτρικού φορτίου q στους οπλισμούς του $\rightarrow$ δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του $\rightarrow q(t) = f(v(t))$



Πυκνωτής

- **Λειτουργία σε κύκλωμα:** μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου $q \rightarrow$ δημιουργία ρεύματος μεταξύ των οπλισμών $\rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$
- **Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πυκνωτή:** $q(t) = Cv(t)$ όπου C : χωρητικότητα $\rightarrow$ ικανότητα του πυκνωτή να αποθηκεύει ηλεκτρική ενέργεια, μονάδα μέτρησης Farad, εξαρτάται μόνο από γεωμετρικά/ ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του μέσου και όχι από την τροφοδοσία.

Πυκνωτής

- Για γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πυκνωτή:

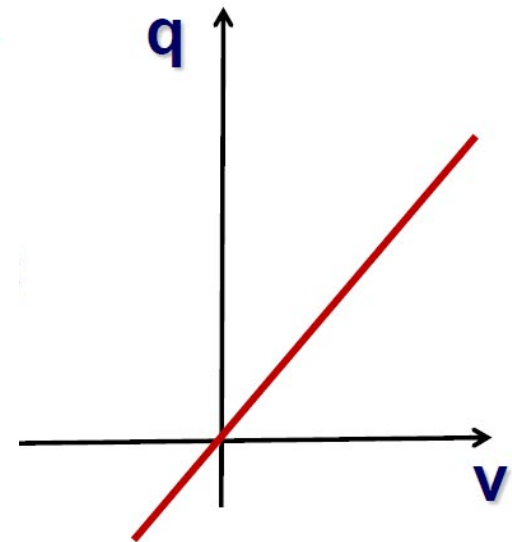
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow$$

i, v συνδέονται με διαφορική σχέση

- Ισχύς: $p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt}$
- Ενέργεια σε διάστημα $[t_o, t]$:

$$w(t) = \int_{t_o}^t p(t)dt \rightarrow$$

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) - \frac{1}{2} C v^2(t_o) = \frac{1}{2C} q^2(t) - \frac{1}{2C} q^2(t_o)$$



Χαρακτηριστική $v - q$

- $w(t) < (>) 0 \rightarrow$ απόδοση (αποθήκευση) ενέργειας

Εφαρμογή με πηνίο

Εφαρμογή 9η

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 50 (μH) είναι

$$i(t) = 18t \cdot e^{-10t} (\text{A}) \text{ για } t \geq 0^+ (\text{s})$$

Ζητούνται:

- α) η τάση στα άκρα του πηνίου για $t > 0^+$.
- β) η ισχύς (σε μW) του πηνίου για $t = 200 (\text{ms})$.
- γ) απορροφά ή παρέχει ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή $t = 200 (\text{ms})$;
- δ) η ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή $t = 200 (\text{ms})$
- ε) η μέγιστη ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο καθώς και η χρονική στιγμή (σε ms) που συμβαίνει αυτό.
- στ) οι γραφικές παραστάσεις των $i(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $w(t)$.

Εφαρμογή 9η

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 50 (μH) είναι

$$i(t) = 18t \cdot e^{-10t} \text{ (A) για } t \geq 0^+ \text{ (s)}$$

Ζητούνται:

- α) η τάση στα άκρα του πηνίου για $t > 0^+$.
- β) η ισχύς (σε μW) του πηνίου για $t = 200$ (ms).
- γ) απορροφά ή παρέχει ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή $t = 200$ (ms);
- δ) η ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή $t = 200$ (ms)
- ε) η μέγιστη ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο καθώς και η χρονική στιγμή (σε ms) που συμβαίνει αυτό.
- στ) οι γραφικές παραστάσεις των $i(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $w(t)$.

Λύση

α) Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

$$\begin{aligned} v(t) &= L \cdot \frac{di}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d}{dt} [18t \cdot e^{-10t}] = 900 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \text{ (V)} \end{aligned}$$

β)
$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \cdot 18t \cdot e^{-10t} = 16200 \cdot e^{-20t} \cdot t \cdot (1 - 10t) \text{ (μJ)}$$

Άρα

$$p(t = 200 \text{ ms}) = 16200 \cdot e^{-20 \cdot 0,2} \cdot 0,2 \cdot (1 - 10 \cdot 0,2) \Rightarrow p(t = 200 \text{ ms}) = -59,34 \text{ (μJ)}$$

γ) Επειδή $p(t=200 \text{ ms}) < 0$, συμπεραίνουμε ότι, το πηνίο παρέχει ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 200 \text{ (ms)}$.

δ)

$$w(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt + w(0^-) = 16200 \cdot \int_0^t e^{-20t} \cdot (t - 10t^2) \cdot dt + 0 \Rightarrow w(t) = 8100 \cdot e^{-20t} \cdot t^2 \quad (\mu\text{J})$$

Άρα

$$w(t = 200 \text{ ms}) = 8100 \cdot e^{-20 \cdot 0,2} \cdot 0,2^2 \Rightarrow w(t = 200 \text{ ms}) = 5,93 \quad (\mu\text{J})$$

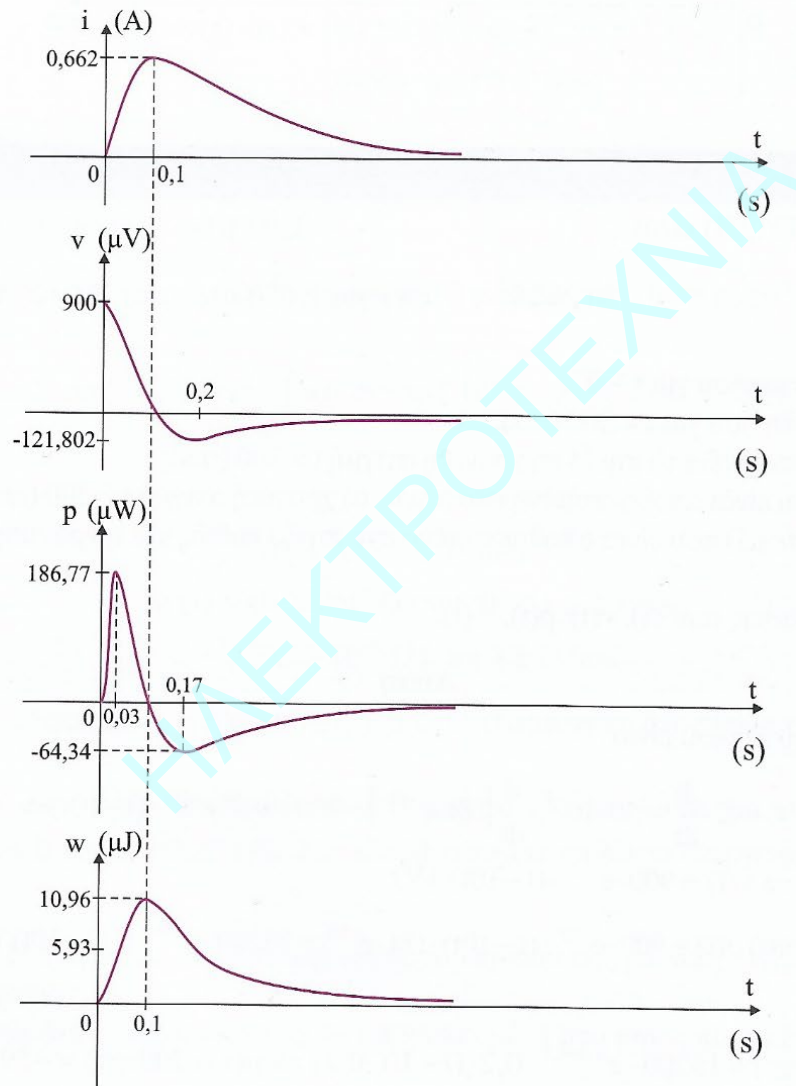
ε)

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} = 0 &\Rightarrow p(t) = 0 \Rightarrow 16200 \cdot e^{-20t} \cdot t \cdot (1 - 10t) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \quad (\text{s}) \\ t = 0,1 \quad (\text{s}) \end{cases}, \text{απορρίπτεται διότι } w(t = 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Για } t = 0,1(\text{s}): w(t = 0,1\text{s}) = 8100 \cdot e^{-20 \cdot 0,1} \cdot 0,1^2 \Rightarrow w(t = 0,1\text{s}) = 10,96 \quad (\mu\text{J})$$

Αυτή είναι η μέγιστη ενέργεια ($w_{\max} = 10,96 \mu\text{J}$) η οποία είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή $t = 100 \text{ (ms)}$.

στ) Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών $i(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $w(t)$ φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Εφαρμογή με πυκνωτή

Εφαρμογή 11η

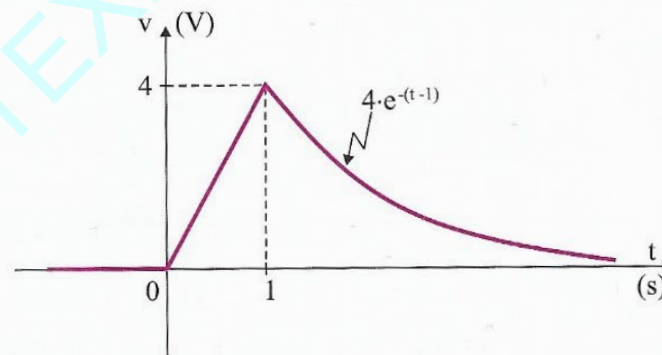
Ο παλμός τάσης του διπλανού σχήματος εφαρμόζεται σ' έναν πυκνωτή $0,5\ (\mu\text{F})$. Βρείτε το ρεύμα, την ισχύ και την ενέργεια του πυκνωτή και δώστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Λύση

Η αναλυτική έκφραση της τάσης $v(t)$ που εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$v(t) = \begin{cases} 0\ (\text{V}) & \text{αν } t \leq 0^- (\text{s}) \\ 4t\ (\text{V}) & \text{αν } 0^+ \leq t \leq 1^- (\text{s}) \\ 4 \cdot e^{-(t-1)}\ (\text{V}) & \text{αν } t \geq 1^+ (\text{s}) \end{cases}$$

Το ρεύμα $i(t)$ στα άκρα του πυκνωτή είναι



$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 0(\mu\text{A}) & \text{αν } t \leq 0^-(s) \\ 2(\mu\text{A}) & \text{αν } 0^+ \leq t \leq 1^-(s) \\ -2 \cdot e^{-(t-1)}(\mu\text{A}) & \text{αν } t \geq 1^+(s) \end{cases}$$

Η ισχύς $p(t)$ του πυκνωτή είναι

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \begin{cases} 0(\mu\text{W}) & \text{αν } t \leq 0^-(s) \\ 8t(\mu\text{W}) & \text{αν } 0^+ \leq t \leq 1^-(s) \\ -8 \cdot e^{-2(t-1)}(\mu\text{W}) & \text{αν } t \geq 1^+(s) \end{cases}$$

Για την εύρεση της ενέργειας $w(t)$ του πυκνωτή έχουμε

$$\text{Αν } t \leq 0^-(s): w(t) = 0(\mu\text{J})$$

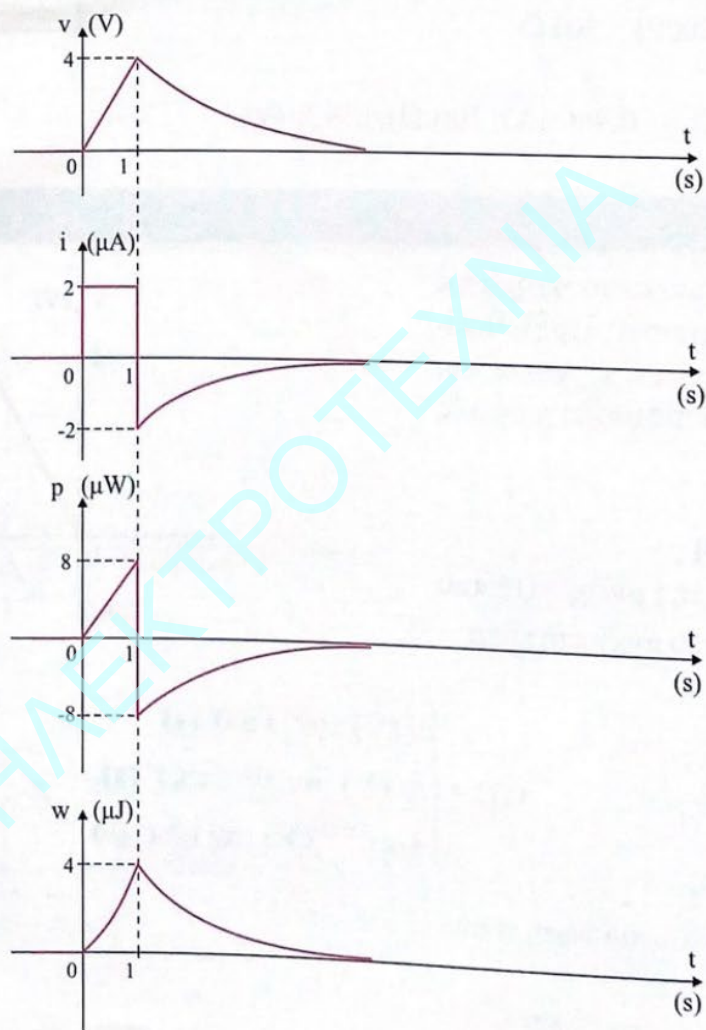
$$\text{Αν } 0^+ \leq t \leq 1^-(s): w(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt + w(0^-) = \int_0^t 8t \cdot dt + 0 = 4t^2(\mu\text{J})$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } t \geq 1^+(s): w(t) &= \int_1^t p(t) \cdot dt + w(1^-) = -\int_1^t 8 \cdot e^{-2(t-1)} \cdot dt + 4 = \\ &= 4 \cdot e^{-2(t-1)}(\mu\text{J}) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$w(t) = \begin{cases} 0(\mu\text{J}) & \text{αν } t \leq 0^-(s) \\ 4 \cdot t^2(\mu\text{J}) & \text{αν } 0^+ \leq t \leq 1^-(s) \\ 4 \cdot e^{-2(t-1)}(\mu\text{J}) & \text{αν } t \geq 1^+(s) \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$, $w(t)$ φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Εφαρμογή με διάταξη ΠΥΚΝΩΤΩΝ

Εφαρμογή 2-6

Να βρεθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα.

$$C_1 = 16 (\mu\text{F})$$

$$C_2 = 48 (\mu\text{F})$$

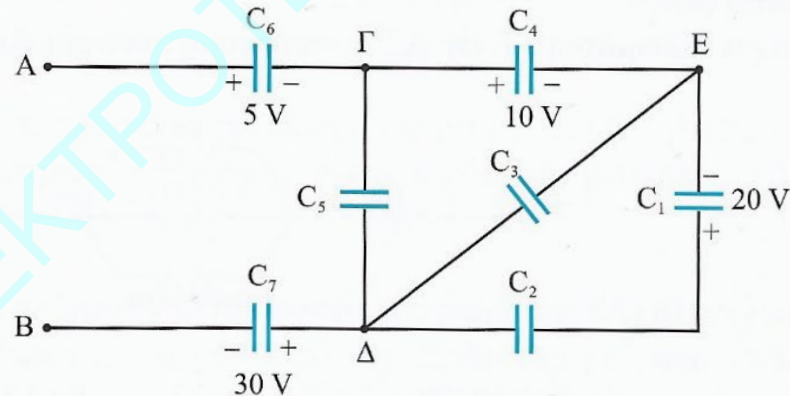
$$C_3 = 3 (\mu\text{F})$$

$$C_4 = 30 (\mu\text{F})$$

$$C_5 = 10 (\mu\text{F})$$

$$C_6 = 5 (\mu\text{F})$$

$$C_7 = 4 (\mu\text{F})$$



Εφαρμογή 2-6

Να βρεθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα.

$$C_1 = 16 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$C_2 = 48 \text{ (}\mu\text{F)}$$

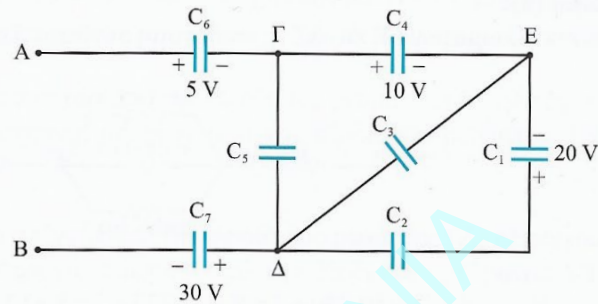
$$C_3 = 3 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$C_4 = 30 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$C_5 = 10 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$C_6 = 5 \text{ (}\mu\text{F)}$$

$$C_7 = 4 \text{ (}\mu\text{F)}$$



Λύση

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{16 \cdot 48}{16 + 48} = 12 \text{ (}\mu\text{F)}$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2}$ είναι: $v_{\Delta E} = v_{C_1} + v_{C_2} = 20 + 0 = 20 \text{ (V)}$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2}$ και C_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3} = C_{1,2} + C_3 = 12 + 3 = 15 \text{ (}\mu\text{F)}$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3}$ είναι $v_{\Delta E} = 20 \text{ (V)}$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3}$ και C_4 είναι σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4} = \frac{C_{1,2,3} \cdot C_4}{C_{1,2,3} + C_4} = \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 10 \text{ (}\mu\text{F)}$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4}$ είναι: $v_{\Delta \Gamma} = v_{\Delta E} + v_{E \Gamma} = 20 - 10 = 10 \text{ (V)}$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3,4}$ και C_5 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4,5} = C_{1,2,3,4} + C_5 = 10 + 10 = 20 \text{ (}\mu\text{F)}$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4,5}$ είναι $v_{\Delta \Gamma} = 10 \text{ (V)}$.

Τέλος

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_{1,2,3,4,5}} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{10}{20} \Rightarrow C_{AB} = 2 (\mu\text{F})$$

και η τάση του C_{AB} είναι: $v_{AB} = v_{AG} + v_{GD} + v_{DB} = 5 - 10 + 30 = 25 (\text{V})$.

Επομένως, το ισοδύναμο κύκλωμα είναι

