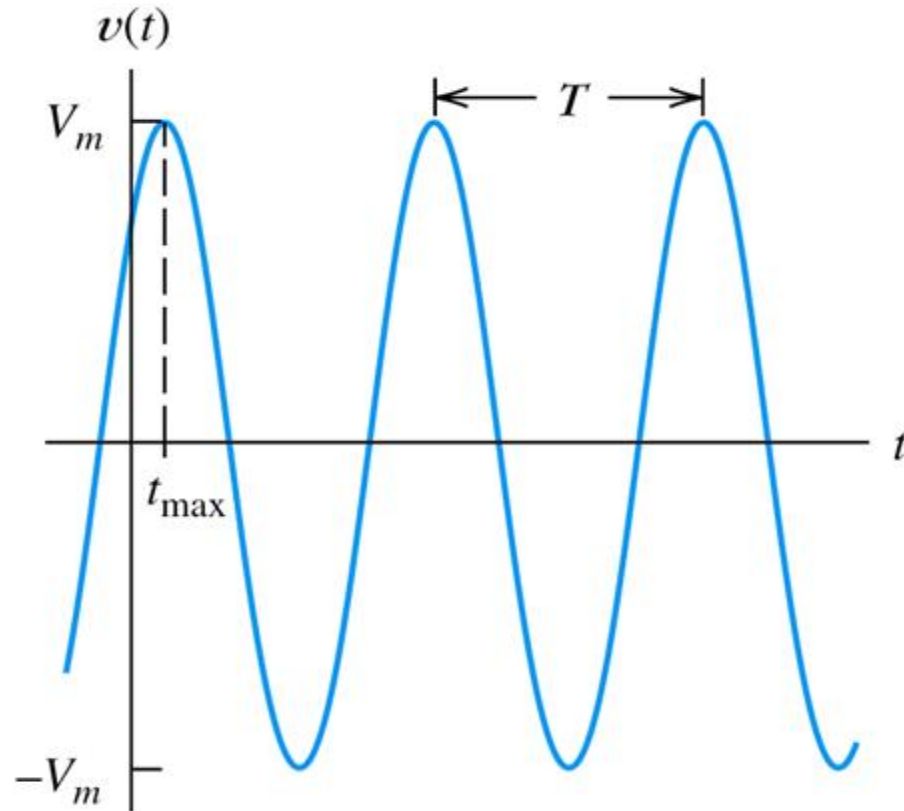


Η σπουδαιότητα της ανάλυσης κυκλωμάτων στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)

- Το ημιτονικό εναλλασσόμενο (ac) ρεύμα παράγεται στους σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, μεταφέρεται από τα συστήματα μεταφοράς και διανομής και χρησιμοποιείται σε οικιακές και βιομηχανικές εφαρμογές.
- Τα τηλεπικοινωνιακά σήματα είναι ημιτονικά.
- Όλα τα περιοδικά σήματα συντίθενται από ημιτονικές συνιστώσες σύμφωνα με την ανάλυση Fourier.

Ημιτονικά Ρεύματα και Τάσεις

(Η τάση ή το ρεύμα είναι ημιτονικές συναρτήσεις του χρόνου)



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

Παράμετροι Ημιτονικών Ρευμάτων και Τάσεων

- V_m το πλάτος, (volt)
- ω η κυκλική συχνότητα (rad/second)
- f η συχνότητα (Hertz (Hz) ή sec^{-1}).
- ωt η στιγμιαία φάση ή όρισμα
- θ αρχική φάση, (rad ή μοίρες).

Παράμετροι Ημιτονικών Ρευμάτων και Τάσεων

Συχνότητα

$$f = \frac{1}{T}$$

Κυκλική
Συχνότητα

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Σημείωση: $\sin(z) = \cos(z - 90^\circ)$

rms (Root-Mean-Square) ή Ενεργές Τιμές

Γενικός ορισμός:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$P_{\text{avg}} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$$

$$P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}}^2 R$$

Μέση Ισχύς

RMS τιμή ημιτονικής τάσης

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Δεν ισχύει για άλλες περιοδικές κυματομορφές.

Άσκηση:

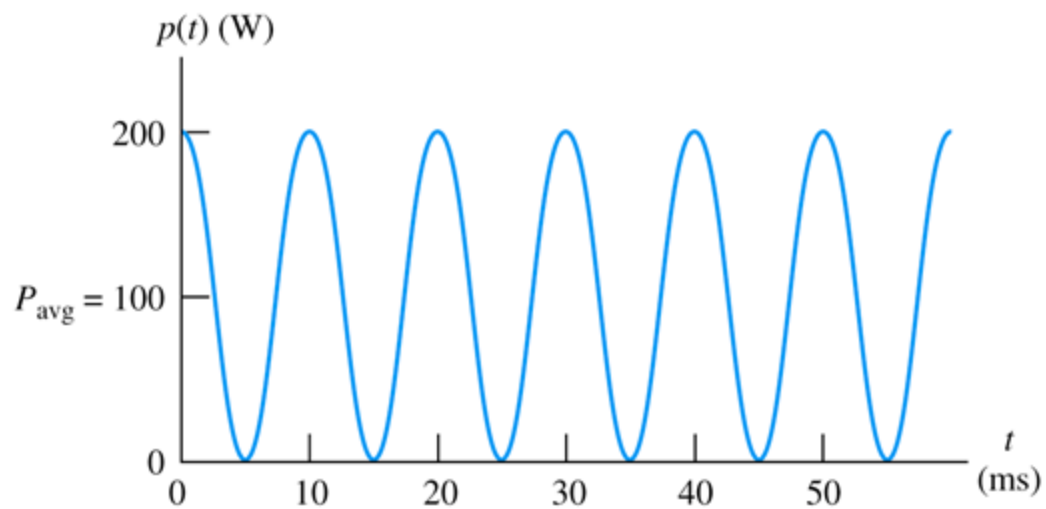
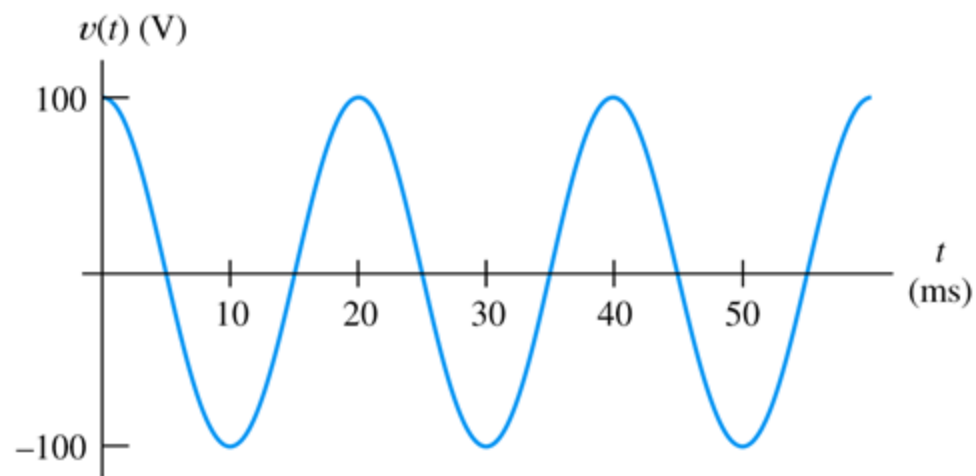
Μια τάση $v(t) = 100 \cos(100\pi t)$ εφαρμόζεται στα άκρα αντίστασης 50Ω . Βρείτε την rms τιμή της τάσης και τη μέση ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση.

$$v(t) = 100 \cos(100\pi t)$$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 70.71 \text{ V}$$

$$P_{avg} = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{70.71^2}{50} = 100 \text{ W}$$

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = 200 \cos^2(100\pi t) \text{ W}$$



Μιγαδικοί Αριθμοί

- Τρεις Μορφές Μιγαδικών Αριθμών
- Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

Καρτεσιανή Μορφή

$$A = a + jb$$

- Φανταστική Μονάδα

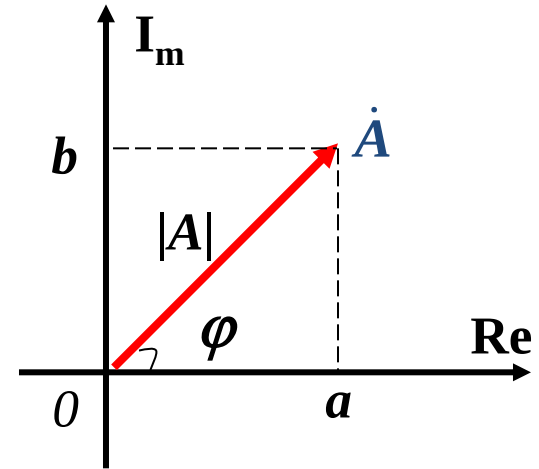
$$\mathbf{j} = \sqrt{-1}$$

- Πραγματικό μέρος

$$a = \text{Re}[A]$$

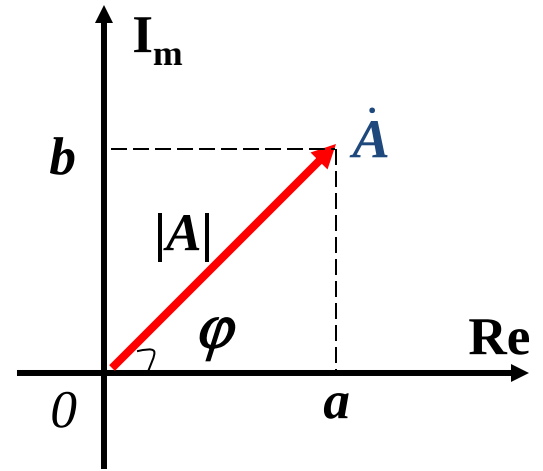
- Φανταστικό μέρος

$$b = \text{Im}[A]$$



- Μέτρο

$$a^2 + b^2 = |A|^2 \Rightarrow |A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



- Γωνία

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

- Συζυγής

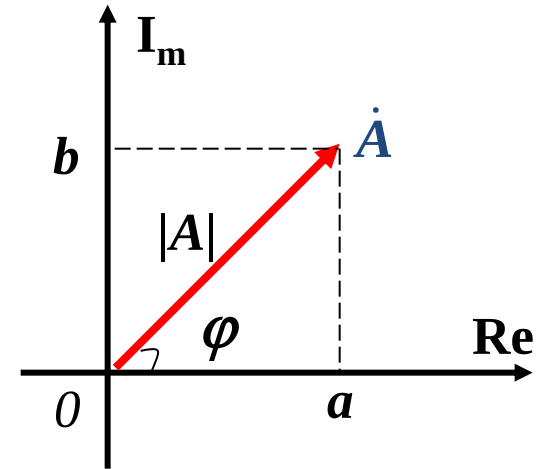
$$\bar{A} = a - jb$$

$$|\bar{A}| = |A|$$

$$A\bar{A} = |A|^2$$

Πολική Μορφή

$$A = |A| \angle \varphi$$



$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$



$$a = |A| \cos \varphi$$

$$b = |A| \sin \varphi$$

Μετατροπές από πολική σε καρτεσιανή και το αντίστροφο

$$A = |A| \angle \varphi$$

$$\begin{aligned} A &= |A| \cos \varphi + j |A| \sin \varphi \\ &= |A| (\cos \varphi + j \sin \varphi) \end{aligned}$$

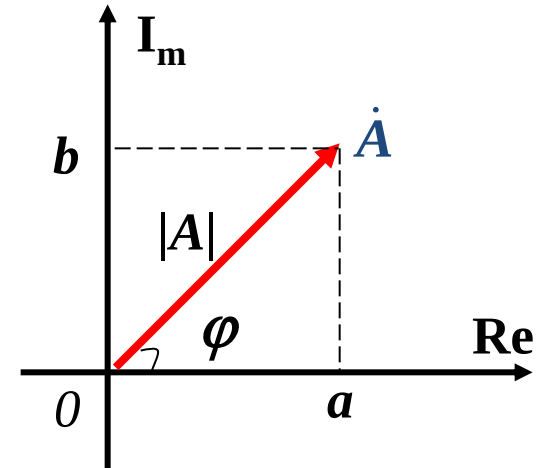
$$A = a + jb$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \arctan \frac{b}{a}$$

Εκθετική μορφή

- Ο τύπος του Euler

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$



$$A = |A|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$= |A|e^{j\varphi}$$

Τρεις Μορφές

Καρτεσιανή Μορφή

$$A = a + jb$$

Πολική Μορφή

$$A = |A| \angle \varphi$$

Εκθετική Μορφή

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

Αριθμητικές Πράξεις

Έστω $A = a + jb$ $B = c + jd$

• Εάν $A = B \Rightarrow a = c, b = d$

• Πρόσθεση και Αφαίρεση

$$C = A \pm B = e_1 \pm je_2$$

$$e_1 = a \pm c \quad e_2 = b \pm d$$

Αριθμητικές Πράξεις

Έστω $A = a + jb$ $B = c + jd$

- Πολλαπλασιασμός

$$C = A \times B = |A|e^{j\varphi_A} \times |B|e^{j\varphi_B}$$

$$= |C|e^{j\varphi_C}$$

$$e^{j\varphi_C} = e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}$$

$$|C| = |A||B|$$

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_B$$

Αριθμητικές Πράξεις

Έστω $A = a + jb$ $B = c + jd$

• Διαίρεση

$$D = A \div B = \frac{|A|e^{j\varphi_A}}{|B|e^{j\varphi_B}}$$


$$D = |D|e^{j\varphi_D} = \frac{|A|}{|B|}e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

$$|D| = |A| \div |B| = \frac{|A|}{|B|}$$

$$e^{j\varphi_D} = e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

$$\varphi_D = \varphi_A - \varphi_B$$

Φασιθέτες (Phasors)

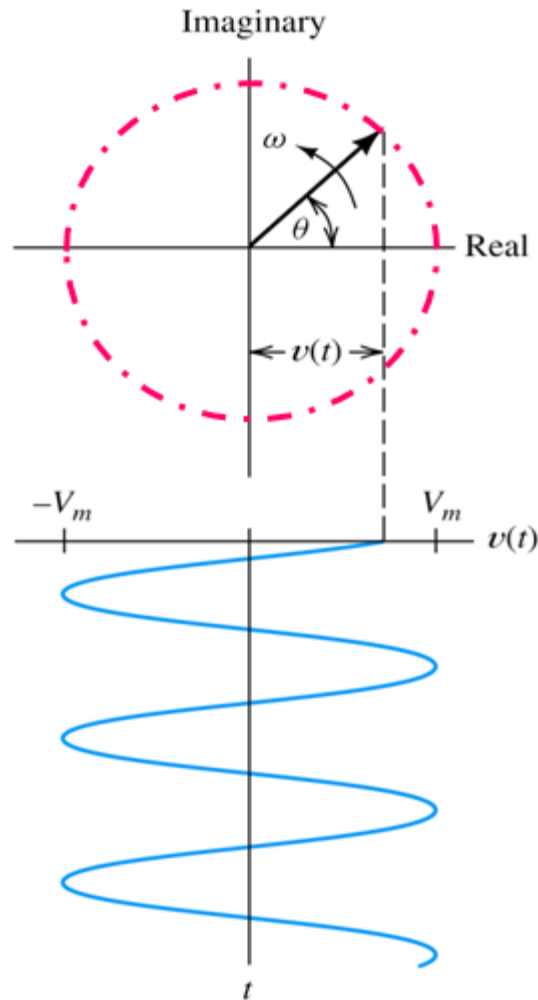
- Ορισμός

Έστω:
$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$

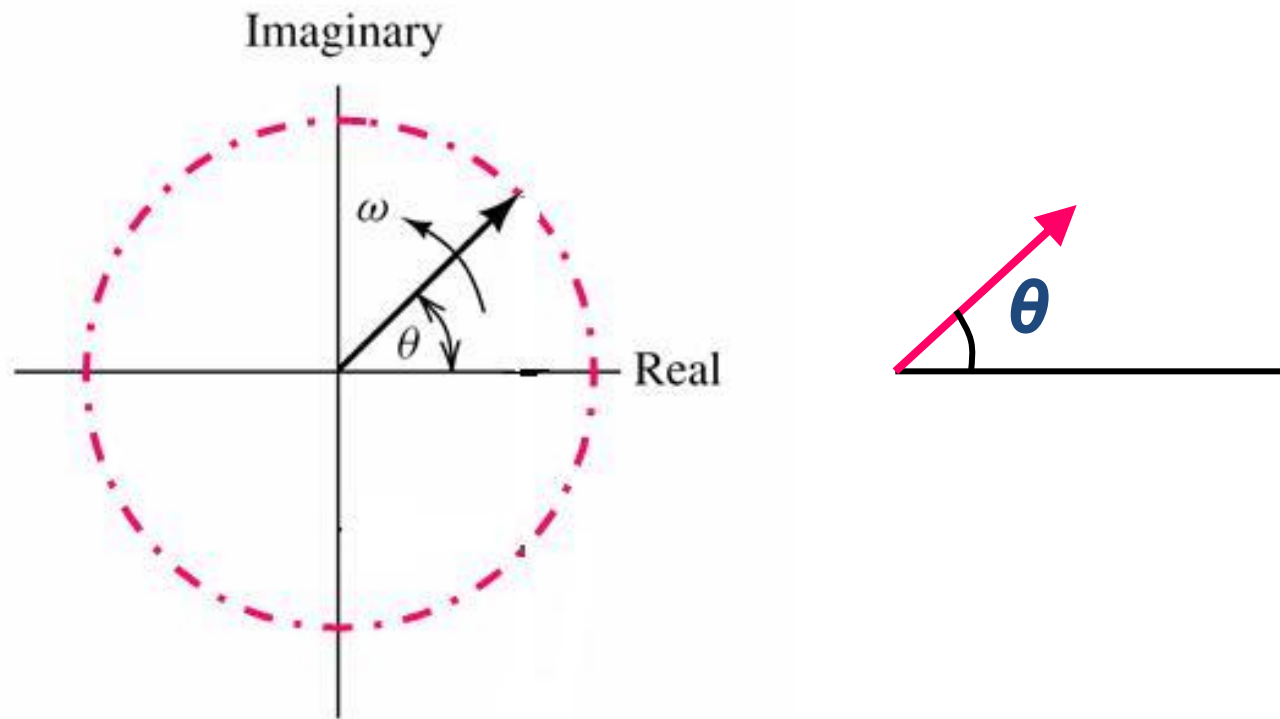
Ο αντίστοιχος
φασιθέτης είναι:

$$\dot{\mathbf{V}}_1 = V_1 \angle \theta_1$$

Οι Phasors ως Περιστρεφόμενα Διανύσματα



Οι ημιτονικές συναρτήσεις παριστάνονται από τις προβολές, στον πραγματικό ή τον φανταστικό άξονα, ενός διανύσματος που περιστρέφεται στο μιγαδικό επίπεδο γύρω από την αρχή των αξόνων με γωνιακή ταχύτητα ω .



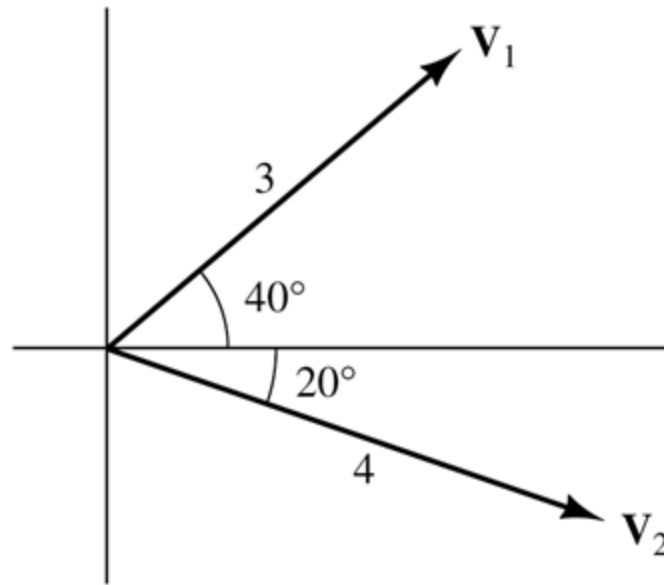
Ο phasor μιας ημιτονικής συνάρτησης είναι ένα στιγμιότυπο του περισρεφόμενου διανύσματος για $t = 0$.

Σχέσεις φάσεων των φασιθετών

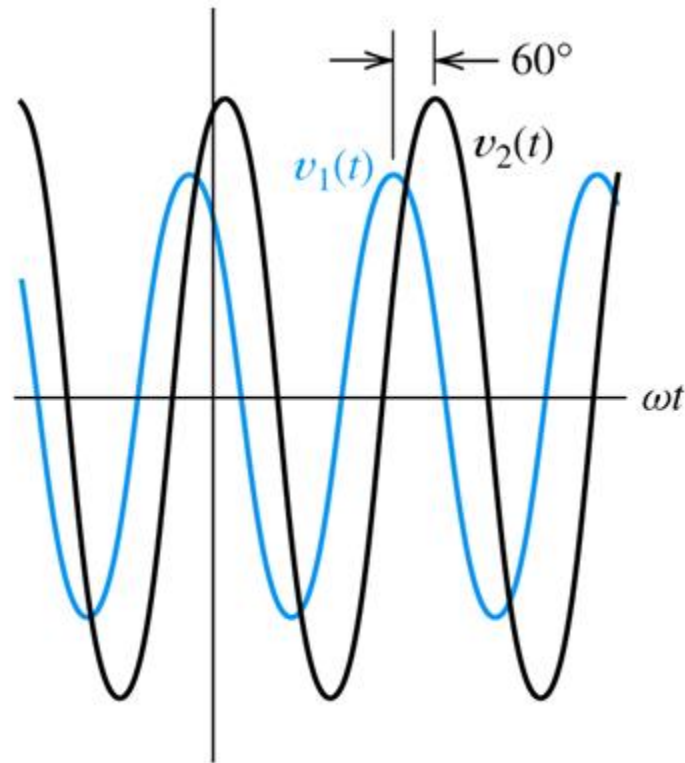
• Για να ορίσουμε τις σχέσεις φάσεων των φασιθετών από το αντίστοιχο διάγραμμα (διανυσματική παράσταση) θεωρούμε ότι οι φασιθέτες περιστρέφονται αντίθετα από τη φορά του ρολογιού.

• Εάν σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο ο V_1 φτάνει πρώτα και ο V_2 φτάνει μετά από γωνία περιστροφής θ , τότε ο V_1 **προπορεύεται** του V_2 κατά θ ή ο V_2 **καθυστερεί** του V_1 κατά θ .

Σχέσεις φάσεων



Σχέσεις φάσεων



Πρόσθεση τάσεων χρησιμοποιώντας Φασιθέτες

Βήμα 1: Ορίζουμε τους φασιθέτες όλων των τάσεων.

Βήμα 2: Προσθέτουμε τους φασιθέτες χρησιμοποιώντας πράξεις μιγαδικών.

Βήμα 3: Μετατρέπουμε το άθροισμα σε πολική μορφή.

Βήμα 4:

Γράφουμε το αποτέλεσμα στο πεδίο χρόνου.

Παράδειγμα: Πρόσθεση ημιτονικών τάσεων με Phasors

Έστω:

$$v_1(t) = 20 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 10 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = ?$$

Λύση:

$$\mathbf{V}_1 = 20 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = 10 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_s &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\
 &= 20\angle -45^\circ + 10\angle -30^\circ \\
 &= 14.14 - j14.14 + 8.660 - j5 \\
 &= 23.06 - j19.14 \\
 &= 29.97\angle -39.7^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\therefore v_s(t) = 29.97 \cos(\omega t - 39.7^\circ) \text{ V}$$

Πρόσθεση ημιτονικών τάσεων με Phasors

• Ασκήσεις

$$1. v_1(t) = 10 \cos(\omega t) + 10 \sin(\omega t)$$

$$2. i_1(t) = 10 \cos(\omega t + 30^\circ) + 5 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$3. i_2(t) = 20 \sin(\omega t + 90^\circ) + 15 \cos(\omega t - 60^\circ)$$

• Απαντήσεις

$$1. v_1(t) = 14.14 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$2. i_1(t) = 11.18 \cos(\omega t + 3.44^\circ)$$

$$3. i_2(t) = 30.4 \cos(\omega t - 25.3^\circ)$$

$$\sin(z) = \cos(z - 90^\circ)$$