

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : Από την Κλασική στη Σύγχρονη Φυσική

1.4 Κύματα Υλης και Κβάντωση Ενέργειας

1.4.1 Η υπόθεση του de Broglie (1924) Nobel Prize 1929

Η φύση πρέπει να έχει μιας μορφής συμμετρία : Αφού το φως (κύμα) εμφανίζει σωματιδιακές ιδιότητες (βλ. Einstein και ΦΦ) γιατί τα σωματίδια να μην εμφανίζουν κυματικές ιδιότητες;

Συνδιάζοντας τη Θεωρία της Σχετικότητας με τη σχέση του Einstein $E=hf$ κατέληξε ότι:

«Αν ένα σωματιδιο με ορμή $p = mv$ έχει κυματικές ιδιότητες, τότε το μήκος κύματός του είναι $\lambda = h / p$ »

Το λ ονομάστηκε **μήκος κύματος de Broglie** του σωματιδίου.

Παραδείγματα

- Ηλεκτρονιο με $E=1\text{eV}$ έχει $u=(2E/m)^{1/2} = 5.9 \times 10^6 \text{m/s}$ άρα $\lambda = 1.2 \times 10^{-9} \text{m} \sim 10 a_{\text{crist}}$ **← μετρήσιμο με περίθλαση από κρυσταλλο**
- Μπαλάκι τέννις με $m=50\text{g}$ και $u=10\text{m/s}$ έχει $\lambda = 1.3 \times 10^{-33} \text{m}$ **← πολύ μικρό για να μετρηθεί !!**

39.1 Louis-Victor de Broglie, the seventh Duke de Broglie (1892–1987), broke with family tradition by choosing a career in physics rather than as a diplomat. His revolutionary proposal that particles have wave characteristics—for which de Broglie won the 1929 Nobel Prize in physics—was published in his doctoral thesis.



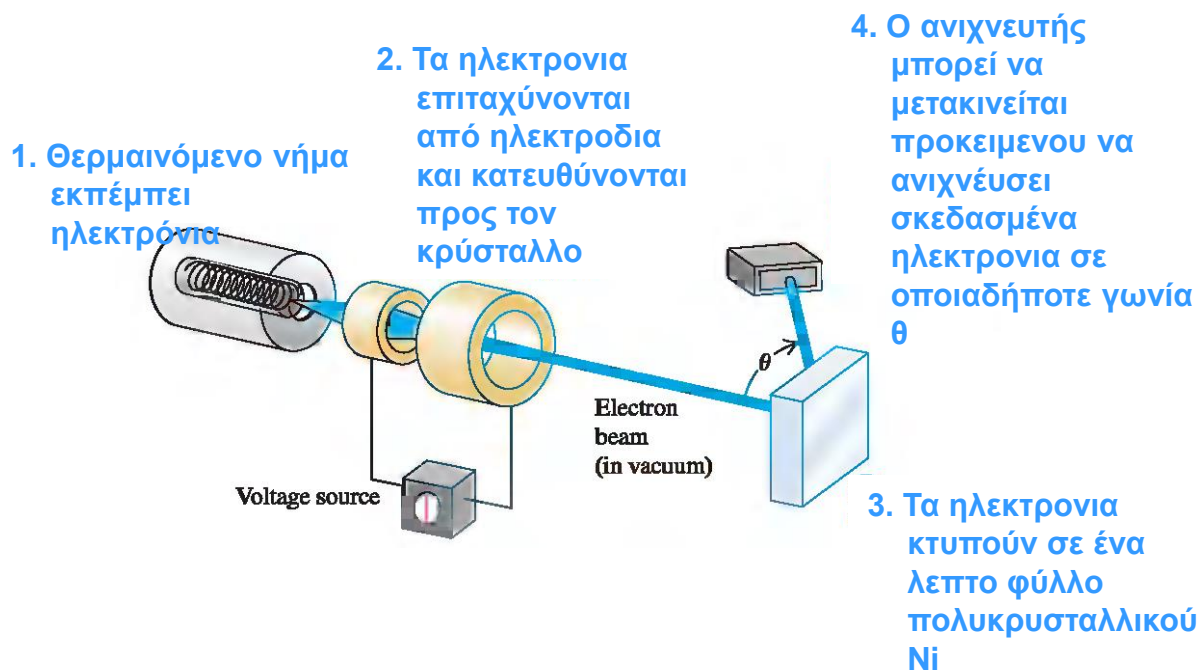
1.4.2 Επαλήθευση της υπόθεσης de Broglie : Κύματα Υλης και Περίθλαση

Davisson & Germer (1927)

Παρατήρησαν (εκ παραδρομής) φαινόμενα συμβολής στην σκεδαζόμενη δέσμη ηλεκτρονίων από φύλλα Ni, επαληθεύοντας έτσι την κυματική φύση των ηλεκτρονίων και το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie.

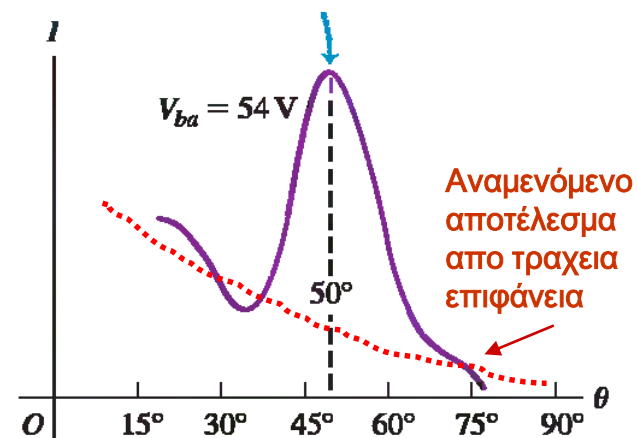
Το πείραμα ...

$$E=54\text{eV} \Rightarrow \lambda=0.16\text{nm} = 1.6 \text{ \AA} \quad \text{και } d(\text{Ni})\sim 3.5 \text{ \AA}$$



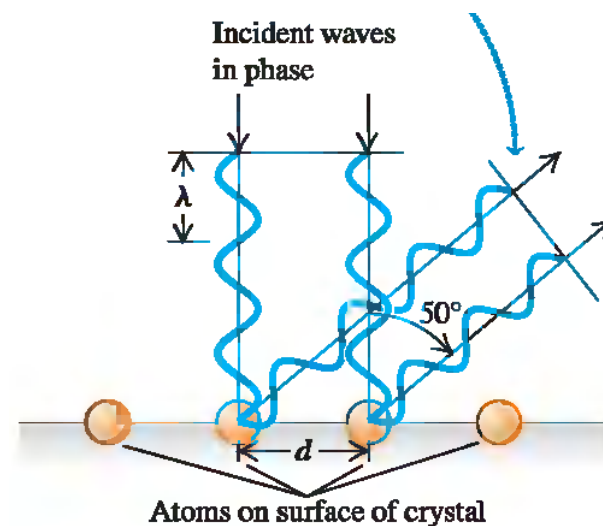
... οι μετρήσεις ...

- (a) Κορυφή λόγω ενισχυτικής συμβολής των σκεδαζομενων ηλεκτρονιων



... και η ερμηνεία

- (b) Ενισχυτική συμβολή σκεδαζομενων ηλεκτρονιων



1.4.3 Συνεπεις υπόθεσης de Broglie : Κβάντωση της Ενέργειας

Ερώτημα: Τι συνέπειες έχει ο κυματικός χαρακτήρας της ύλης για ένα σωματίδιο που είναι περιορισμένο να κινείται σε μια μικρή περιοχή του χώρου;

Εστω ένα ηλεκτρονιο μαζας m που κινείται σε μια κβαντικη κουκιδα(*) μήκους L .

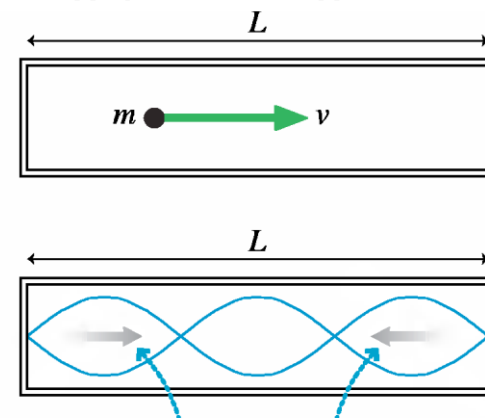
Λόγω ανακλάσεων δημιουργει «στάσιμο κύμα de Broglie». Οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν δεσμούς στα όρια του κουτιού. Δηλαδή:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Αλλά } \lambda = h/p, \text{ οπότε: } p_n = n \frac{h}{2L}$$

και κατά συνέπεια $E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} = n^2 E_1$ $n = \text{κβαντικός αριθμός}$

όπου $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$ $E_n = \text{ενεργειακές σταθμες}$
 $E_1 = \text{θεμελιώδες κβάντο ενεργειας του σωματιδίου.}$

Ενα σωματιδιο μεσα σε ένα κουτί δημιουργεί ένα στασιμο κύμα de Broglie εξαιτίας των ανακλασεων στα τοιχώματα του δοχείου



Κύματα ύλης ταξιδεύουν και προς τις δυο κατευθύνσεις

Η κβάντωση της ενέργειας ενός σωματιδίου είναι συνέπεια του περιορισμού του στο χώρο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Κβαντικά Πηγάδια (Q. Wells), Κβαντικά Συρματα (Q. Wires) και Κβαντικές Κουκίδες (Q. Dots) (>1980)

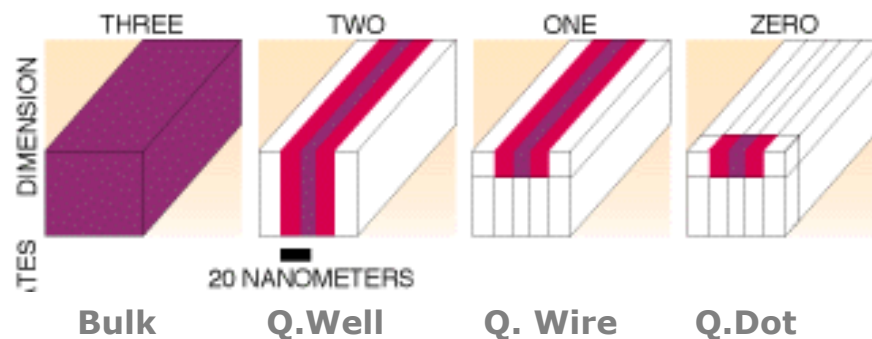
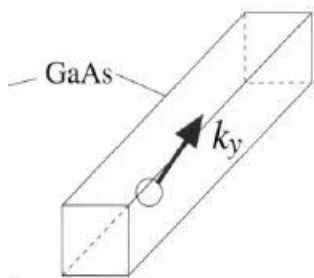
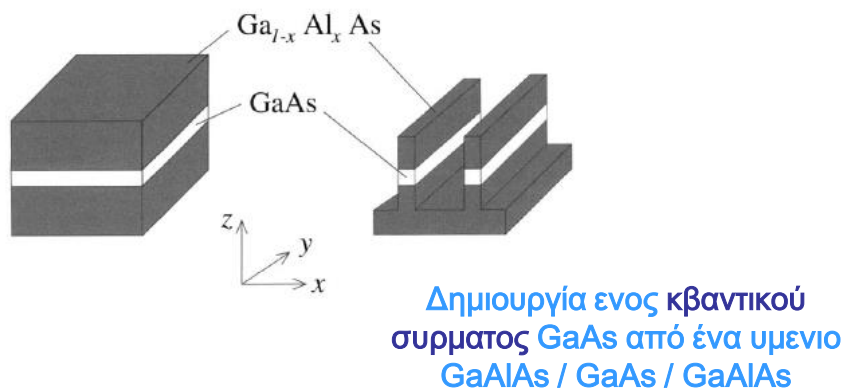
Τεχνικά ανεπτυγμένοι συνδυασμοί υλικών (ημιαγώγιμων) τέτοιοι ώστε, για ενεργειακούς λόγους, οι ηλεκτρικοί φορείς (βλεπε ηλεκτρονια) του ενός υλικού δεν μπορούν να εισέλθουν στην περιοχή του άλλου υλικού.

Ανάλογα με το γεωμετρικό σχήμα της περιοχής που κινούνται οι φορείς, διακρινουμε:

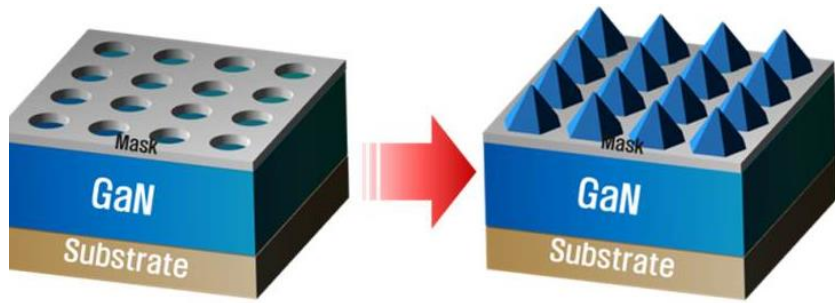
Κβαντικά Πηγάδια – Κινηση φορέων σε 2 διαστασεις

Κβαντικά συρματα – Κινηση φορέων σε 1 διάσταση

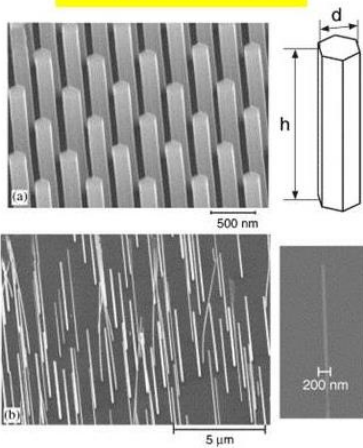
Κβαντικές Κουκίδες – Πληρης Περιορισμός των φορεων στο χώρο



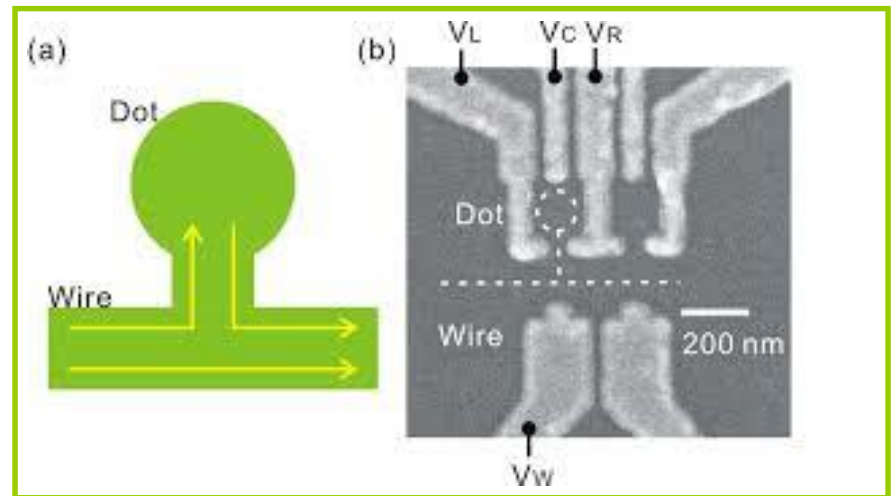
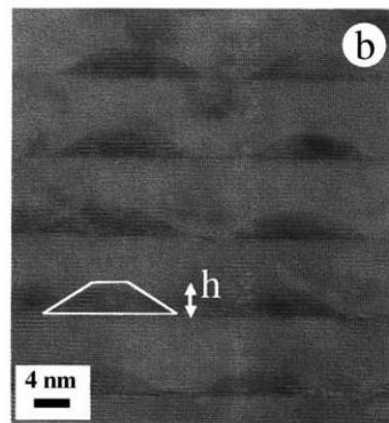
Τα κβαντικά (κυματικά) χαρακτηριστικά των ηλεκτρονίων γίνονται σημαντικά όταν η κίνηση τους περιορίζεται σε ένα τμήμα του υλικού που έχει μήκος συγκρίσιμο με το $\mu.κ.$ De Broglie, $L \sim \lambda \Rightarrow L \sim 1-10nm$ **NANOTEΧΝΟΛΟΓΙΑ !!!**



Nanowire



Quantum dot



1.4.3 Κβάντωση της Ενέργειας

Παράδειγμα-1: Το κβάντο ενέργειας ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα κουτί μήκους $L=0.10\text{nm}$. Θυμηθείτε ότι η ακτίνα του ατομου του υδρογονου είναι $a_B\sim 0.05\text{nm}$. Είναι $m = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$, οπότε $E_1 = 6.0 \times 10^{-18}\text{J} = 38\text{eV}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ κοντα στην ακριβή τιμή της θεμελιώδους ενεργειας του ατομου του υδρογόνου, δηλαδή $E_1=13.6\text{eV}$.

Παράδειγμα-2: Το κβάντο ενέργειας μιας σταγόνας λαδιού με $\varnothing=0.1\mu\text{m}$ που είναι μέσα σε ένα κουτί μήκους $L=10\mu\text{m}$. Είναι $m = \rho V = 4.7 \times 10^{-16}\text{kg}$, οπότε $E_1 = 7.3 \times 10^{-24}\text{eV} \Rightarrow$ πάρα πολύ μικρη τιμη για να παρατηρηθεί η διαφορά μεταξύ $E_1, 4E_1, 9E_1, \dots$ κλπ \Rightarrow η ενεργεια μοιάζει συνεχής ποσότητα

Παράδειγμα-3: Μια μπίλια με $m=100\text{gr}$ κινείται μέσα σε ένα σπирτόκουτο με $L=3\text{cm}$. Είναι $E_1 = 6.1 \times 10^{-63}\text{eV} \Rightarrow$ είναι πρακτικά αδύνατο να μετρηθεί η διαφορά μεταξύ $E_1, 4E_1, 9E_1, \dots$ κλπ \Rightarrow η ενεργεια είναι συνεχής ποσότητα

1.4.4 Ερμηνεία της θεωρίας του Bohr με την υπόθεση de Broglie

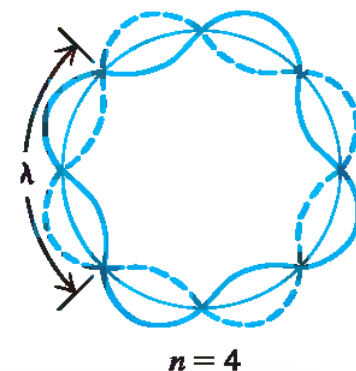
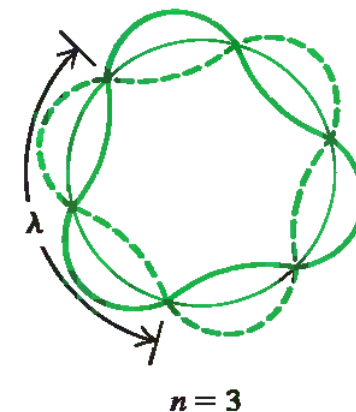
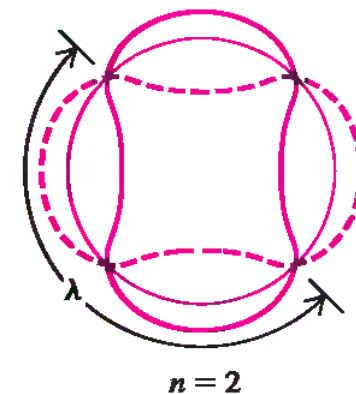
Bohr: Το ηλεκτρόνιο κινείται σε συγκεκριμένη τροχιά γύρω από τον πυρήνα ...

de Broglie: ... η κυματική του φύση το αναγκάζει να σχηματίσει στασιμο κύμα. Οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν $2\pi r = n\lambda \Rightarrow 2\pi r = nh/mv \Rightarrow mvr = nh/2\pi \Rightarrow L_n = n\hbar$.

Η κβάντωση της στροφορμής είναι αποτέλεσμα του κυματικού χαρακτήρα του ηλεκτρονίου

Με βάση το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να αποδείξουμε τις σχέσεις της §1.3.4 (Ατομο Υδρογόνου)

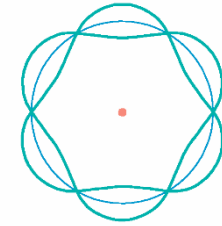
Η υπόθεση de Broglie ερμήνευσε την προέλευση των Στάσιμων Καταστάσεων, που αναφέρονται στο Ατομικό Πρότυπο Bohr, ως αποτέλεσμα της κυματικής φύσης του ηλεκτρονίου και του γεγονότος ότι η κίνησή του είναι περιορισμένη στο χώρο.



Στάσιμα κύματα που αντιστοιχούν στην κίνηση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο. Προσεξτε ότι ο κβαντικός αριθμός (n) συνδέεται με το πλήθος των δεσμών του ΣΚ (N) με τη σχέση $n = N/2$

1.4.5 Ασκήσεις

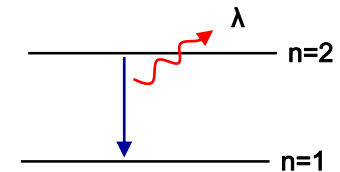
13. Ποιός είναι ο κβαντικός αριθμός (n) που περιγράφει την στάσιμη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου που φαίνεται στο σχήμα;



Απ. $n=3$

14. Γιατί δεν είναι επιτρεπτή μια στάσιμη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου με περιττό αριθμό δεσμών; Απ. *Γιατί το στάσιμο κύμα που περιγράφει το ηλεκτρόνιο θα είχε σε κάθε σημείο της τροχιάς δύο διαφορετικές τιμές φάσης.*

15. Ένας ηλεκτρονιο που κινείται μέσα σε μια κβαντική κουκίδα GaAs διάστασης L εκπέμπει φωτόνιο μήκους κύματος $\lambda=200\text{nm}$ όταν μεταπίπτει από τη στάθμη $n=2$ στη σταθμη $n=1$. Προσδιορίστε το L αν ξέρετε ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m^*=0.063m_e$. *Υπόδειξη: $\Delta E=3E_1$, $E_1=h^2/8m^*L^2$ και $\Delta E=hc/\lambda$.*



16. Ένα ηλεκτρονιο κινείται σε μία κβαντική κουκίδα GaAs μήκους L . Από τη φασματική ανάλυση της κουκίδας έχει βρεθεί ότι ο φορέας μπορεί να βρεθεί σε διαδοχικές ενεργειακές στάθμες με ενέργειες 12eV , 27eV και 48eV . Να προσδιορίστε το L . Δίνεται $m^*=0.063m_e$. *Υπόδειξη: $E_n=n^2E_1$, $E_1=h^2/8m^*L^2$.*