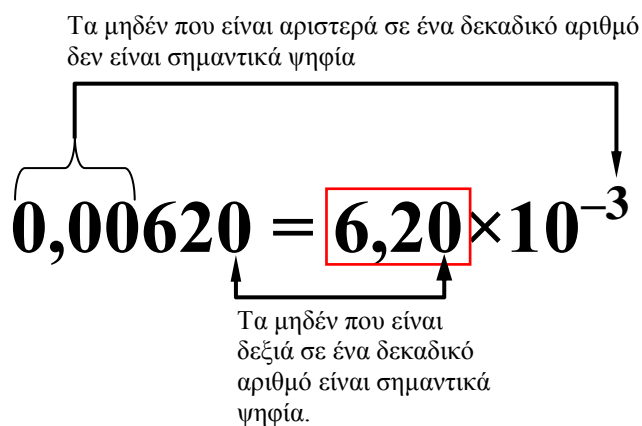


## ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Είναι απαραίτητο να πούμε μερικά πράγματα για μια επαναλαμβανόμενη πηγή προβλημάτων και δυσκολιών: **τα σημαντικά ψηφία**. Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη όπου οι αριθμοί και οι σχέσεις μπορούν να είναι ακριβείς όσο χρειάζεται. Αντίθετα, θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η φυσική ασχολείται με τον πραγματικό κόσμο της αμφιβολίας και της ανακρίβειας. Είναι σημαντικό σε όλες τις περιοχές της επιστήμης να δηλώσετε καθαρά τι γνωρίζετε για μια κατάσταση – όχι λιγότερα και, ειδικά, όχι περισσότερα. Τα νούμερα, που προκύπτουν κατά τη διαδικασία μιας μέτρησης, παρέχουν και πληροφορίες για το μετρητικό σύστημα που χρησιμοποιήθηκε. Για παράδειγμα, αν αναφέρετε ότι το μήκος ενός αντικειμένου έχει τιμή 6,2 m, το συμπέρασμα είναι ότι η πραγματική τιμή θα κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 6,15 m και 6,25 m. Αν το αναμενόμενο αποτέλεσμα για τη συγκεκριμένη αυτή μέτρηση είναι πράγματι 6,2 m και εσείς αναφέρετε ότι το μήκος αυτό είναι απλά 6 m που αναφέρει λιγότερα από ό,τι γνωρίζετε, αποκρύπτετε πληροφορίες που έχουν σχέση με την ακρίβεια του μετρητικού συστήματος που χρησιμοποιήσατε. Από την άλλη μεριά, αν αναφέρετε ότι το μήκος του αντικειμένου είναι 6,213 m τότε, αυτός που σας ανέθεσε να κάνετε τη μέτρηση αυτή θα μεταφράσει την τιμή 6,213 m, με την έννοια ότι το πραγματικό μήκος βρίσκεται μεταξύ 6,2125 m και 6,2135 m. Σε αυτή την περίπτωση, ισχυρίζεστε ότι έχετε γνώσεις και πληροφορίες οι οποίες δε ανταποκρίνονται στις προδιαγραφές του μετρητικού συστήματος που χρησιμοποιήσατε.

Ο τρόπος με τον οποίο δηλώνετε τις πληροφορίες ακριβώς γίνεται μέσω της σωστής χρήσης των **σημαντικών ψηφίων**. Μπορείτε να σκεφτείτε το σημαντικό ψηφίο ως ένα αριθμό που είναι αξιόπιστα γνωστός. Μια μετρούμενη τιμή ενός φυσικού μεγέθους, όπως το μήκος των 6,2 m, έχει δυο σημαντικά ψηφία επειδή το επόμενο δεκαδικό, δηλαδή το ένα εκατοστό (1 cm), δεν είναι αξιόπιστα γνωστό. Όπως δείχνει το **ΣΧΗΜΑ 1**, ο καλύτερος τρόπος να καθορίσουμε πόσα σημαντικά ψηφία έχει ένας αριθμός είναι να γράψουμε τον αριθμό αυτό σε επιστημονική γραφή.



**ΣΧΗΜΑ 1** Προσδιορίζοντας τα σημαντικά ψηφία.

### Γενικοί Κανόνες για τα Σημαντικά Ψηφία

1. Το πλήθος των σημαντικών ψηφίων **ΔΕΝ** είναι το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

2. Το πλήθος των σημαντικών ψηφίων είναι το πλήθος των ψηφίων της αριθμητικής τιμής ενός φυσικού μεγέθους όταν αυτή γράφεται με επιστημονική μορφή.
3. Στους ακέραιους αριθμούς, τα μηδέν που βρίσκονται στο δεξιό μέρος του αριθμού δεν είναι σημαντικά ψηφία. Για παράδειγμα οι αριθμοί 320 ή 3200 έχουν δυο σημαντικά ψηφία. Σε επιστημονική μορφή, οι αριθμοί αυτοί γράφονται  $3,2 \times 10^2$  και  $3,2 \times 10^3$ , αντίστοιχα.
4. Αλλάζοντας τις μονάδες ενός φυσικού μεγέθους αλλάζει θέση μόνο η υποδιαστολή στην αριθμητική τιμή του μεγέθους. Το πλήθος των σημαντικών ψηφίων παραμένει το ίδιο.
5. Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε αριθμούς ή υπολογίζουμε ρίζες ή τριγωνομετρικούς αριθμούς ή λογαρίθμους, το πλήθος των σημαντικών ψηφίων στο αποτέλεσμα πρέπει να είναι ίσο με τον πλήθος των σημαντικών ψηφίων του αριθμού με τη μικρότερη ακρίβεια που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό. Με άλλα λόγια, στο αποτέλεσμα κρατάμε τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία,
6.
  - α. Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε δεκαδικούς αριθμούς, το αποτέλεσμα θα έχει τόσα δεκαδικά ψηφία όσα ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία.
  - β. Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε ακέραιους αριθμούς, η απόλυτη ακρίβεια του αποτελέσματος θα είναι η ίδια με την απόλυτη ακρίβεια του αριθμού με την μικρότερη απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα, η απόλυτη ακρίβεια των αριθμών 235, 1850 και 5800 είναι αντίστοιχα στις μονάδες και στις δεκάδες και στις εκατοντάδες. Ο αριθμός 5800 έχει τη μικρότερη απόλυτη ακρίβεια.

Υπάρχουν δυο σημαντικές εξαιρέσεις σε αυτούς τους κανόνες:

1. Συνηθίζεται να κρατάμε ένα επιπλέον σημαντικό ψηφίο αν (και μόνο αν) ο αριθμός ξεκινά με το ψηφίο ένα (1). Για παράδειγμα, ο αριθμός 10,43 μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υπολογισμό με τον αριθμό 8,91. Η λογική για αυτή την εξαίρεση είναι ότι τέσσερα σημαντικά ψηφία για αριθμό που ξεκινά με το νούμερο ένα (1) έχει περίπου την ίδια ποσοστιαία ακρίβεια με τους αριθμούς που έχουν τρία σημαντικά ψηφία και οι οποίοι αρχίζουν με νούμερα από το 2 – 9.
2. Είναι αποδεκτό να κρατάτε ένα ή δυο επιπλέον ψηφία κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων βημάτων του υπολογισμού, καθώς η τελική απάντηση αναφέρεται με τον κατάλληλο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Ο στόχος είναι να ελαττώσουμε τα λάθη στρογγυλοποίησης στους υπολογισμούς.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ>** Προσοχή! Πολλές αριθμομηχανές έχουν ένα δεδομένο τρόπο που παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων, π.χ. με δυο ή τρία δεκαδικά ψηφία. Αυτό είναι επικίνδυνο να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, στη περίπτωση που θέλουμε να διαιρέσουμε δυο μετρούμενα μεγέθη των οποίων η ακρίβεια τους καθορίζεται με τρία σημαντικά ψηφία, π.χ. τους αριθμούς 5,23 και 58,5 τότε, σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη αναφέρει, το αποτέλεσμα τη διαίρεσης πρέπει να γραφεί με τρία σημαντικά ψηφία, δηλαδή  $5,23/58,5=0,0894$ . Αντίθετα, αν η αριθμομηχανή είναι ρυθμισμένη να εκφράζει τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων απλά με δυο μόνο δεκαδικά ψηφία, τότε η διαίρεση που αναφέραμε θα έδινε ως αποτέλεσμα τον αριθμό 0,09. Αλλά κάνοντάς αυτό, έχετε ήδη μειώσει την ακρίβεια του αποτελέσματος από τρία σημαντικά ψηφία στο ένα σημαντικό ψηφίο. Για να αποφύγετε αυτό το λάθος πρέπει να ρυθμίσετε την αριθμομηχανή έτσι ώστε αυτή να απεικονίζει τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων με επιστημονική γραφή.

Κατάλληλη χρήση των σημαντικών ψηφίων είναι μέρος της «κουλτούρας» των επιστημόνων και των μηχανικών. Θα δίνουμε συχνά έμφαση σε αυτήν την «κουλτούρα» επειδή πρέπει να μάθετε να μιλάτε την ίδια γλώσσα αν θέλετε να επικοινωνείτε σωστά.

## Αναγνώριση σημαντικών ψηφίων

Τα ψηφία τα οποία καθορίζουν την αριθμητική τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους και τα οποία προσδιορίζουν την ακρίβεια της μέτρησης ονομάζονται **σημαντικά ψηφία**. Συγκεκριμένα:

1. Όλα τα **μη μηδενικά ψηφία** στην αριθμητική τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι **σημαντικά ψηφία**.
2. Όλα τα **μηδέν** που ευρίσκονται **μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων** είναι σημαντικά ψηφία.
3. Στη περίπτωση που η αριθμητική τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους είναι δεκαδικός αριθμός, τότε όλα τα μηδέν που ευρίσκονται δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο είναι σημαντικά ψηφία.

### Αντίθετα:

- α. Τα **μηδέν** που βρίσκονται **δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο ακέραιου αριθμού**, και
- β. Τα **μηδέν** που βρίσκονται **αριστερά από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεκαδικού αριθμού**  
**δεν είναι σημαντικά ψηφία.**

### Παραδείγματα:

1. Οι αριθμοί: 0,0006, 0,002, 0,5 καθώς και οι αριθμοί 5, 10, 50, 200, 3000 κλπ έχουν ένα σημαντικό ψηφίο.
2. Οι αριθμοί: 0,0030, 2,0, 3,5, 1500, 25000 κλπ έχουν δυο σημαντικά ψηφία.
3. Οι αριθμοί: 0,00200, 0,0508, 5,00, 205, 10500 κλπ έχουν τρία σημαντικά ψηφία.
4. Ο αριθμός 2000 έχει ένα σημαντικό ψηφίο. Αν ο αριθμός αυτός είχε προκύψει από μέτρηση με ακρίβεια δυο σημαντικών ψηφίων, τότε θα γραφόταν:  $2,0 \cdot 10^3$ .

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσετε το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός μετρούμενου μεγέθους είναι να γράψετε την τιμή του μετρούμενου μεγέθους σε επιστημονική μορφή, δηλαδή ο αριθμός πρέπει να γραφεί με την εξής μορφή:

$[(\text{ένα ακέραιο ψηφίο } a), (\text{δεκαδικά ψηφία } \delta)] \times (\text{δύναμη του } 10)$

$(a, \delta \delta \delta \dots) \times (\text{δύναμη του } 10)$

Το πλήθος όλων των ψηφίων που εκφράζουν το δεκαδικό αριθμός (ακέραιο και δεκαδικό μέρος) είναι ίσο με το πλήθος των σημαντικών ψηφίων. Η δύναμη του 10 δεν επηρεάζει το πλήθος των σημαντικών ψηφίων)

### Παραδείγματα:

$2010=2,010 \times 10^3$  (ο αριθμός 2010 γράφηκε με 4 σημαντικά ψηφία)  
 $2010=2,01 \times 10^3$  (ο αριθμός 2010 γράφηκε με 3 σημαντικά ψηφία)  
 $2010=2,0 \times 10^3$  (ο αριθμός 2010 γράφηκε με 2 σημαντικά ψηφία)  
 $2010=2 \times 10^3$  (ο αριθμός 2010 γράφηκε με 1 σημαντικό ψηφίο)

$100=1,000 \times 10^2$  (ο αριθμός 100 γράφηκε με 4 σημαντικά ψηφία)  
 $100=1,00 \times 10^2$  (ο αριθμός 100 γράφηκε με 3 σημαντικά ψηφία)  
 $100=1,0 \times 10^2$  (ο αριθμός 100 γράφηκε με 2 σημαντικά ψηφία)  
 $100=1 \times 10^2$  (ο αριθμός 100 γράφηκε με 1 σημαντικό ψηφίο)

$999,84=9,9984 \times 10^2$  (ο αριθμός 999,84 γράφηκε με 5 σημαντικά ψηφία)  
 $999,84=9,998 \times 10^2$  (ο αριθμός 999,84 γράφηκε με 4 σημαντικά ψηφία)  
 $999,84=1000=1,00 \times 10^3$  (ο αριθμός 999,84 γράφηκε με 3 σημαντικά ψηφία)  
 $999,84=1000=1,0 \times 10^3$  (ο αριθμός 999,84 γράφηκε με 2 σημαντικά ψηφία)  
 $999,84=1000=1 \times 10^3$  (ο αριθμός 999,84 γράφηκε με 1 σημαντικό ψηφίο)

Άλλο παράδειγμα:

$0,000452=4,520 \times 10^{-4}$  (ο αριθμός 0,000452 γράφηκε με 4 σημαντικά ψηφία)  
 $0,000452=4,52 \times 10^{-4}$  (ο αριθμός 0,000452 γράφηκε με 3 σημαντικά ψηφία)  
 $0,000452=4,5 \times 10^{-4}$  (ο αριθμός 0,000452 γράφηκε με 2 σημαντικά ψηφία)  
 $0,000452=5 \times 10^{-4}$  (ο αριθμός 0,000452 γράφηκε με 1 σημαντικό ψηφίο)

Να προσέχετε τη στρογγυλοποίηση όταν διώχνετε κάποιο ή κάποια από τα τελευταία ψηφία του δεκαδικού αριθμού. Παρακάτω δίνονται οι κανόνες στρογγυλοποίησης.

## Στρογγυλοποίηση Αριθμών.

Σε πολλές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα συμβαίνει μετά από μαθηματικές πράξεις μεταξύ μετρούμενων μεγεθών ή πράξης για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και του σφάλματος ενός μετρούμενου μεγέθους, είναι αναγκαία η στρογγυλοποίηση των αντίστοιχων τιμών σε αριθμούς με το απαραίτητο πλήθος σημαντικών ψηφίων. Για το σκοπό αυτό **εντοπίζουμε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο που θέλουμε να κρατήσουμε** στη τιμή του μετρούμενου μεγέθους, (η αρίθμηση των σημαντικών ψηφίων γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά του αριθμού) το οποίο συμβολίζουμε με  $a$  και κάνουμε τους παρακάτω ελέγχους **εξετάζοντας το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο** το οποίο συμβολίζουμε με  $\beta$ :

1. Αν το ψηφίο  $\beta$  είναι μικρότερο του 5 ( $\beta < 5$ ) τότε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αριθμού που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το  $a$  παραμένει το ίδιο και όλα τα επόμενα από αυτό, συμπεριλαμβανομένου και του  $\beta$ , είτε διαγράφονται αν αυτά είναι δεκαδικά, ή αντικαθίστανται με μηδέν (0) αν αυτά δεν είναι δεκαδικά.

**Π.χ.** Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 17,24798 και 434376 σε αριθμούς με τρία (3) σημαντικά ψηφία.

Στον δεκαδικό αριθμό το τρίτο σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει είναι το 2 ( $a=2$ ). Το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο είναι το  $\beta=4 < 5$ , οπότε το τρίτο σημαντικό ψηφίο παραμένει ως έχει ( $a=2$ ) και τα δεκαδικά ψηφία 4, 7, 9 και 8 που ακολουθούν διαγράφονται. Οπότε:

$17,24798 \Rightarrow 17,2$  (τρία σημαντικά ψηφία)

Στη περίπτωση του ακέραιου αριθμού 434376, το  $\alpha=4$ . Το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο είναι το  $\beta=3<5$ , οπότε το τρίτο σημαντικό ψηφίο, παραμένει το ίδιο ( $\alpha=4$ ) και τα ψηφία 3, 7 και 6 που ακολουθούν αντικαθίστανται με μηδενικά. Οπότε:  
 $434376 \Rightarrow 434000$  (τρία σημαντικά ψηφία)

2. Αν το ψηφίο  $\beta$  είναι μεγαλύτερο του πέντε ( $\beta>5$ ) τότε το σημαντικό ψηφίο  $\alpha$  αυξάνεται κατά μια μονάδα. Τα σημαντικά ψηφία που είναι μετά το  $\alpha$  ή διαγράφονται ή αντικαθίστανται με μηδενικά σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση.

**Π.χ.** Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0,0206723 και 3236784 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία.

Στον δεκαδικό αριθμό 0,0206723 το τρίτο σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει είναι το  $\alpha=6$  και το αμέσως επόμενο είναι το  $\beta=7>5$ , οπότε το  $\alpha$  αυξάνεται κατά μια μονάδα και τα ψηφία που ακολουθούν διαγράφονται.

$0,0206723 \Rightarrow 0,0207$  (τρία σημαντικά ψηφία)

Στον ακέραιο αριθμό 3236784 το  $\alpha=3$  και το  $\beta=6>5$  οπότε ο αριθμός  $\alpha=4$  αυξάνεται κατά μια μονάδα:

$3236784 \Rightarrow 3240000$  (τρία σημαντικά ψηφία)

3. Αν το ψηφίο  $\beta=5$  τότε:

- 3.1 Αν μετά το ψηφίο  $\beta$  (σε οποιαδήποτε θέση) υπάρχει έστω και ένα ψηφίο  $\gamma>0$ , τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 2, δηλαδή ο αριθμός  $\alpha$  αυξάνεται κατά μια μονάδα..

**Π.χ.** Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0,032450102 και 43250001 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία:

$0,032450102 \Rightarrow 0,0325$

$4325001 \Rightarrow 4330000$

- 3.2 Αν μετά το ψηφίο  $\beta$  δεν υπάρχει κανένα ψηφίο ή αν υπάρχουν μηδενικά ψηφία, τότε σύμφωνα με το National Institute of Standards and Technology των Η.Π.Α., ισχύουν τα εξής:

- Αν το ψηφίο  $\alpha$  είναι άρτιος αριθμός, τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 1.

**Π.χ.** Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0,03245, 0,03225000, 2325 και 2325000 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία:

$0,03245 \Rightarrow 0,0324$

$0,03225000 \Rightarrow 0,0322$

$2325 \Rightarrow 2320$

$2325000 \Rightarrow 2320000$

- Αν το ψηφίο  $\alpha$  είναι περιττός αριθμός, τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 2.

**Π.χ.** Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0,02335, 0,02335000, 3235 και 3235000 σε αριθμούς με τρία σημαντικά ψηφία:

$0,02335 \Rightarrow 0,0234$

$0,02335000 \Rightarrow 0,0234$

$3235 \Rightarrow 3240$

$3235000 \Rightarrow 3240000$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε τον αριθμός 9452 με επιστημονική μορφή και να τον στρογγυλοποιήσετε με 3, με 2 και με 1 σημαντικό ψηφίο

2. Να γράψετε τον αριθμό 0,0000475 με επιστημονική μορφή και να στον στρογγυλοποιήσετε με 4, με 3, με 2 και με 1 σημαντικό ψηφίο
3. Ένας αμερικάνος μηχανικός μέτρησε το μήκος του Μαραθώνιου Δρόμου και το βρήκε ίσο με 26 μίλια. Δεδομένου ότι 1km=0,623 μίλια, να υπολογίσετε το μήκος του μαραθώνιου δρόμου σε χιλιόμετρα.
4. Ένας άγγλος μας λέει ότι το ύψος του είναι 74 ίντσες. Πόσο είναι το ύψος του ανθρώπου αυτού σε μέτρα; (1 ίντσα = 2,54 cm).
5. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις. Οι αριθμητικές τιμές των μεγεθών που συμμετέχουν στις πράξεις έχουν προκύψει από μετρήσεις και έχουν γραφεί σύμφωνα με την ακρίβεια του αντίστοιχου μετρητικού συστήματος που κάθε φορά χρησιμοποιήθηκε.

$$2,712 + 10,5 =$$

$$1,23 + 2,50 \times 10^{-3} =$$

$$321,475 + 42,500 + 2,75 =$$

$$10,2 \times 7,1 =$$

$$12,75 \times 4,375 =$$

$$27,1/5,05 =$$

$$3^5 =$$

$$(3,0)^5 =$$

$$\log\left(\frac{12,75 \times 4,375}{5,05}\right) =$$

$$\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \quad \text{όπου } t = 12,328 \text{ s} \quad \text{και } T = 1,325 \text{ s}$$

6. Να υπολογίσετε τον όγκο σε m<sup>3</sup> της σφαίρας που έχει ακτίνα (α) 3 cm (β) 3,0 cm.
7. Μια σφαίρα έχει όγκο 102 cm<sup>3</sup>. Να υπολογίσετε την ακτίνα της σφαίρας σε m.