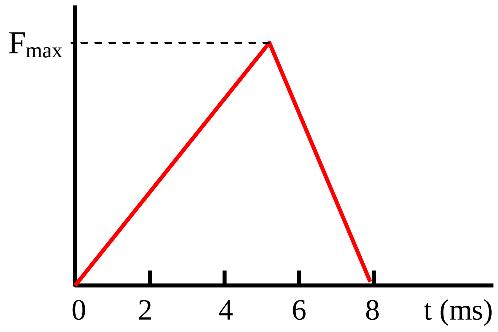
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΩΘΗΣΗΣ

ΚΑΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια δύναμη, που μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, δρα πάνω σε ένα σώμα. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δύναμη F_{max} όταν γνωρίζετε ότι η ώθηση πάνω στο σώμα στο χρονικό διάστημα Δt=8,0 s είναι J(Δt)=6,0 Ns.



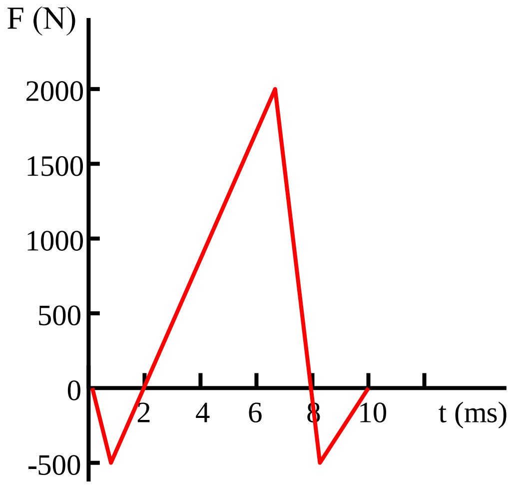
ΛΥΣΗ

Η ώθηση J(Δt) που ασκείται πάνω στο σώμα στο χρονικό διάστημα Δt=8,0 s είναι ίση με το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση F=F(t). Στην περίπτωσή μας η περιοχή που είναι κάτω από τη γραφική παράσταση F=F(t) είναι ένα τρίγωνο με βάση Δt=8,0 ms και ύψος F_{max}. Οπότε:

$$J(\Delta t) = \frac{1}{2}(\Delta t) \times F_{\max} \quad \Rightarrow \quad F_{\max} = \frac{2 \times J(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{2 \times (6{,}0 Ns)}{8{,}0 \times 10^{-3} s} \quad \Rightarrow \quad F_{\max} = 1500\, N$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Πάνω σε ένα σώμα δρα μια δύναμη η οποία μεταβάλλεται σύμφωνα με το γράφημα F=F(t) του διπλανού σχήματος. Να υπολογίσετε τη συνολική ώθηση που ασκείται πάνω στο σώμα.



ΛΥΣΗ

Η συνολική ώθηση που ασκείται πάνω στο σώμα είναι ίση με το εμβαδό της περιοχή που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράσταση F=F(t) και του άξονα t. Το εμβαδό αυτό επιμερίζεται σε τρία επί μέρους εμβαδά:

Ένα εμβαδό στο χρονικό διάστημα (0, 2ms), ένα στο χρονικά διάστημα (2ms, 8ms) και ένα στο χρονικό διάστημα (8ms, 10ms). Στα ίδια χρονικά διαστήματα μπορούμε να επιμερίσουμε και την ώθηση που ασκείται πάνω στο σώμα. Συγκεκριμένα:

$$J_{total} = J(0, 2ms) + J(2ms, 8ms) + J(8ms, 10ms) =$$

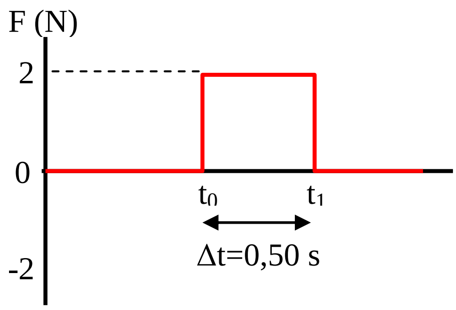
$$= \frac{1}{2}(2{,}0 \times 10^{-3} s) \times (-500N) + \frac{1}{2}(6{,}0 \times 10^{-3} s) \times (2000N) + \frac{1}{2}(2{,}0 \times 10^{-3} s) \times (-500N)$$

$$J_{total} = 5{,}0\, Ns$$

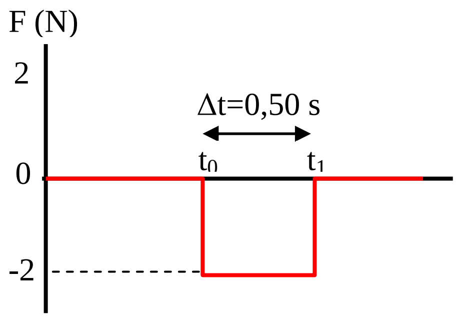
ΑΣΚΗΣΗ 3

A) Ένα αντικείμενο μάζας m=2,0 kg κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_0=1,0 m/s όταν πάνω στο αντικείμενο επιδρά η δύναμη που εικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Να υπολογίσετε το μέτρο και τη φορά της ταχύτητας υ_1 του αντικειμένου αφού πάψει να επιδρά πάνω σε αυτό η δύναμη

B) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα και στην περίπτωση που η δύναμη που επιδρά πάνω στο αντικείμενο μεταβάλλεται όπως δείχνει το Σχήμα 3.2



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

ΛΥΣΗ

Και στις δυο περιπτώσεις, σε όλο το χρονικό διάστημα που επιδρά η δύναμη πάνω στο αντικείμενο δεν ισχύει η διατήρηση της ορμής. Ισχύει το θεώρημα Ώθησης – Ορμής:

Η ώθηση που ασκείται πάνω στο αντικείμενο είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής:

$$J(\Delta t) = \Delta p \quad \Rightarrow \quad J(\Delta t) = p_1 - p_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} F\,dt = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad F\int_{t_1}^{t_0} dt = m\upsilon_1 - m\upsilon_2 \quad \Rightarrow$$

$$F(t_1 - t_0) = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_1 = F\,\Delta t + m\upsilon_0 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \frac{F\,\Delta t + m\upsilon_0}{m} \qquad (3.1)$$

όπου $p_1=m\upsilon_1$ και $p_0=m\upsilon_0$ είναι η τελική και η αρχική ορμή του αντικειμένου, αντίστοιχα.

A) Στην περίπτωση αυτή η δύναμη είναι θετική, οπότε η Σχέση (3.1) γίνεται:

$$\upsilon_1 = \frac{F\,\Delta t + m\upsilon_0}{m} = \frac{(2{,}0N)\times(0{,}50s) + (2{,}0kg)\times 1{,}0m/s)}{2{,}0kg} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 1{,}5\ m/s$$

Το αντικείμενο συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_1 = 1,5 m/s

B) Στην περίπτωση αυτή η δύναμη είναι αρνητική, οπότε η Σχέση (3.1) γίνεται:

$$\upsilon_1 = \frac{F\,\Delta t + m\upsilon_0}{m} = \frac{(-2{,}0N)\times(0{,}50s) + (2{,}0kg)\times 1{,}0m/s)}{2{,}0kg} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 0{,}50\ m/s$$

Το αντικείμενο συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ_1=0,50 m/s.

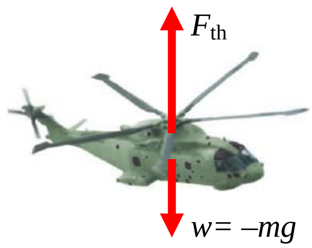
ΑΣΚΗΣΗ 4

Τη χρονική στιγμή t_0=0, ένα ελικόπτερο που έχει μάζα M=9300 kg αρχίζει να απογειώνεται κατακόρυφα. Ο πιλότος δίνει ισχύ στη μηχανή του ελικοπτέρου έτσι ώστε πάνω σε αυτό να ασκείται κατακόρυφη δύναμη F_{th} η οποία αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την σχέση F_{th}=α+βt^2, όπου α=1,0x10^5 N και β=2,0x10^3 N/s^2.

A) Να υπολογίσετε την ώθηση που οφείλεται σε όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω στο ελικόπτερο.

B) Να εφαρμόσετε το θεώρημα Ώθησης – Ορμής για να υπολογίσετε την ταχύτητα ανόδου του ελικοπτέρου τη χρονική στιγμή t_1=3,0 s.

ΛΥΣΗ



Η συνολική δύναμη F_{net} που ασκείται πάνω στο ελικόπτερο είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $F_{th} = \alpha + b\,t^2$ (kN) και η δύναμη $w = -Mg$ του βάρους του ελικοπτέρου.

$$F_{net} = \left(a + b\,t^2\right) - M\,g$$

A) Ορισμός της Ώθησης:

$$J = \int_{t=0}^{t=3s} F_{net}\,dt = \int_{t=0}^{t=3s} \left(\left(a + b\,t^2\right) - M\,g\right)dt = a\int_{t=0}^{t=3s} dt + b\int_{t=0}^{t=3s} t^2\,dt - M\,g\int_{t=0}^{t=3s} dt \quad \Rightarrow$$

$$J = a\,t\Big|_{t=0}^{t=3s} + \left.\frac{b\,t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=3s} - M\,g\Big|_{t=0}^{t=3s} = \left(3a + 9b - 3M\,g\right)Ns \quad \Rightarrow$$

$$J = 3\times(1{,}0\times10^5) + 9\times(2{,}0\times10^3) - 3\times9300\times9{,}80 \quad \Rightarrow \quad J = 44600\,Ns$$

B) Υπολογισμός της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1=3 s.

Θεώρημα Ώθησης – Ορμής στο χρονικό διάστημα (0, 3,0s):

(Ώθηση στο χρονικό διάστημα Δt=3,0s) = (Μεταβολή ορμής στο χρονικό διάστημα Δt=3,0s)

Μεταβολή ορμής: Δp=p(τελική) – p(αρχική) = M υ – 0

$$J = \Delta p \quad \Rightarrow \quad J = M\,\upsilon \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{J}{M} = \frac{44600\,Ns}{9300kg} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 4{,}79\,m/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Το ταχύπλοο σκάφος της παρακάτω εικόνας μαζί με τους επιβάτες του έχει μάζα m=420 kg. Τη χρονική στιγμή t_0=0 σβήνει η μηχανή του ενώ αυτό είχε ταχύτητα υ_0= –14,0 m/s. Η οπισθέλκουσα δύναμη (δύναμη εσωτερικής τριβής) που ασκεί το θαλασσινό νερό πάνω στο σκάφος εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $D(t)$ = α – β t, όπου α=830 N και β=41,5 N/s.

Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δτ = $t_f - t_0 = t_f$ που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του σκάφους γίνει ίση με υ_1= –5,0m/s.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ως θετική φορά την φορά προς τα δεξιά.

Πάνω στο σκάφος ασκείται μόνο η οπισθέλκουσα δύναμη $D(t)$= α – β t (η αντίσταση του αέρα ως πολύ μικρότερη δύναμη παραλείπεται) η οποία, ως εξωτερική δύναμη που είναι αντίθετη της ταχύτητας υ του σκάφους θα ελαττώνει την ταχύτητα έτσι ώστε το σκάφος να ακινητοποιηθεί σε χρονικό διάστημα Δτ. Στο χρονικό αυτό διάστημα, η ώθηση πάνω στο σκάφος θα είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής του σκάφους.

(Ώθηση σκάφους στο χρονικό διάστημα Δτ) = (τελική ορμή σκάφους)–(αρχική ορμή σκάφους):

$$J(\Delta\tau) = p_{\text{τελική}} - p_{\text{αρχική}} \quad \Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t_f} F(t)\,dt = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t_f} (\alpha - \beta t)\,dt = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{t=0}^{t_f} \alpha\,dt - \int_{t=0}^{t_f} \beta t\,dt = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) \quad \Rightarrow \quad \alpha t \Big|_{t=0}^{t=t_f} - \frac{\beta t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=t_f} = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) \quad \Rightarrow$$

$$\alpha t_f - \frac{\beta t_f^2}{2} = m(\upsilon_1 - \upsilon_2) \quad \Rightarrow \quad \beta t_f^2 - 2\alpha t_f + 2m(\upsilon_1 - \upsilon_0) = 0 \qquad (5.1)$$

Η Σχέση (5.1) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση που ρίζες:

$$t_f = \frac{a \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\beta m(\upsilon_1 - \upsilon_0)}}{\beta} = \frac{830N \pm \sqrt{(830N)^2 - 2\times(66{,}4N/s)\times(420kg)\times(-5{,}0-(-14{,}0))m/s}}{66{,}4N/s}$$

$$t_f = 5{,}99s \qquad \kappa\alpha\iota \qquad t_f = 19{,}0s$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Η δύναμη οπισθέλκουσα δύναμη D(t) είναι δύναμη εσωτερικής τριβής, είναι πάντα αντίθετη της φορά κίνησης του αντικειμένου πάνω στο οποίο ασκείται (στην προκειμένη περίπτωση το σκάφος) και υπάρχει όσο κινείται το αντικείμενο. Δεδομένου ότι το σκάφος κινείται προς τα αριστερά, η ταχύτητά του θα είναι αρνητική και ως εκ τούτου η οπισθέλκουσα δύναμη πρέπει να είναι θετική.

Από τους δυο χρόνους που υπολογίσαμε, **ο χρόνος t_f = 5,99 s** αντιστοιχεί σε οπισθέλκουσα δύναμη:

$$D(t) = a - \beta t \quad \Rightarrow \quad D(5{,}99s) = 830N - (66{,}4N/s)\times(5{,}99s) = +432\,N > 0$$

η οποία είναι θετική. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα **t_f = 5,99 s** που απαιτείται για να αποκτήσει το σκάφος ταχύτητα υ= –5,0 m/s κρίνεται αποδεκτό.

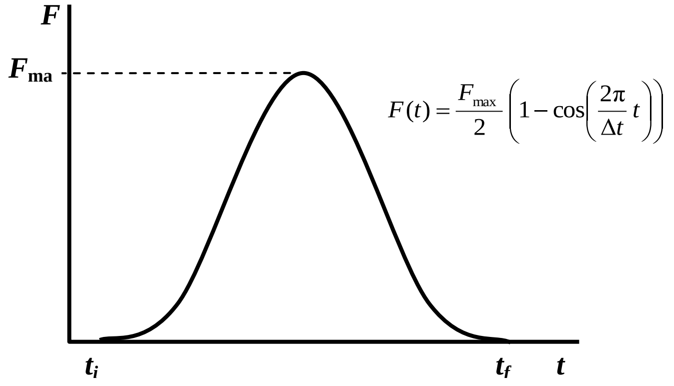
Αντίθετα, **ο δεύτερος χρόνος t_f =19,0 s** αντιστοιχεί σε οπισθέλκουσα:

$$D(t) = a - \beta t \quad \Rightarrow \quad D(19{,}0s) = 830N - (66{,}4N/s)\times(19{,}0s) = -432\,N < 0$$

η οποία είναι αρνητική, δηλαδή έχει τη φορά της ταχύτητας, και η οποία δεν είναι συμβατή με τον ορισμός της οπισθέλκουσας δύναμης που τη θέλει πάντοτε να είναι αντίθετη με τη φορά της ταχύτητας. Κατά συνέπεια, το χρονικό διάστημα **t_f =19,0 s** δεν είναι αποδεκτό και ως εκ τούτου απορρίπτεται.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα φορτίο μάζας m=1,0x10^3 kg ρυμουλκείται με γερανό για να τοποθετηθεί στην ταράτσα μιας οικοδομής. Για κάποιο λόγο το σκοινί σπάει όταν το φορτίο βρίσκεται σε ύψος y_0 =55 m από το έδαφος. Το φορτίο προσκρούει στο έδαφος και ακινητοποιείται σε χρονικό διάστημα Δt=5,0 ms**.** Στο χρονικό αυτό διάστημα, η δύναμη $F(t)$ που ασκεί το έδαφος πάνω στο φορτίο δίνεται από τη σχέση: $F(t)=\dfrac{F_{\max}}{2}\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi}{\Delta t}t\right)\right)$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δύναμη $\boldsymbol{F_{max}}$ καθώς και τη μέση δύναμη $\boldsymbol{F_{avg}}$ που ασκεί το φορτίο πάνω στο έδαφος.



ΛΥΣΗ

Η μάζα m φθάνει στο έδαφος με ταχύτητας υ η οποία υπολογίζεται από τις εξισώσεις κίνησης της ελεύθερης πτώσης. Συγκεκριμένα: $\upsilon=-\sqrt{2gy_0}$ (6.1)

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι η μάζα m κινείται προς τα κάτω, δηλαδή έχει αρνητική ταχύτητα. Η μάζα προσκρούει στο έδαφος και σε χρονικό διάστημα Δt=5,0 *ms* ακινητοποιείται (η ταχύτητά της γίνεται ίση με το μηδέν). Στο χρονικό αυτό διάστημα η ορμή της μάζα m μεταβάλλεται από την τιμή $p_i=m\upsilon=-m\sqrt{2gy_0}$ στην τιμή p_f=0. Οπότε η μεταβολή της ορμής θα είναι ίση με: $\Delta p=p_f-p_i=m\sqrt{2gy_0}$ (6.2)

Η μεταβολή αυτή της ορμής οφείλεται στην ώθηση δύναμης J που δρα πάνω στη μάζα:

$$J=\int_0^{\Delta t}F(t)\,dt \qquad (6.3)$$

Θεώρημα Ορμής – Ώθησης Δύναμης:

$$J=\Delta p \;\Rightarrow\; \int_0^{\Delta t}F(t)\,dt=m\sqrt{2gy_0} \;\Rightarrow\; \int_0^{\Delta t}\frac{F_{\max}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right)\right)dt=m\sqrt{2gy_0} \;\Rightarrow$$

$$\int_0^{\Delta t}\frac{F_{\max}}{2}dt-\int_0^{\Delta t}\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right)dt=m\sqrt{2gy_0} \qquad (6.4)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{\Delta t}\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right)dt=0$ οπότε, από την Εξίσωση (6.4) παίρνουμε:

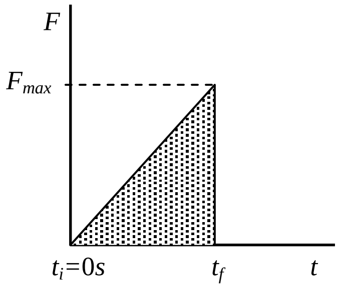
$$\frac{F_{\max}}{2}\Delta t=m\sqrt{2gy_0} \;\Rightarrow\; F_{\max}=\frac{2m\sqrt{2gy_0}}{\Delta t}=\frac{2(1{,}0\times10^3\,\text{kg})\sqrt{2(9{,}80\,\text{m/s}^2)(55\,\text{m})}}{5{,}0\times10^{-3}\,\text{s}}=1{,}3\times10^7\,\text{N}$$

Η μέση δύναμη υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{avg} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} F(t)\,dt$ (6.5)

Αν προσέξετε την Εξίσωση (6.4) θα δείτε ότι έχετε ήδη υπολογίσει το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης (6.5). Συγκεκριμένα: $F_{avg} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} F(t)\,dt = \frac{1}{\Delta t}\frac{F_{\max}}{2}\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_{avg} = \frac{F_{\max}}{2} = \frac{1{,}3\times 10^7 N}{2} = 6{,}5\times 10^6 N$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Είστε ο επιβλέπων μηχανικός σε ένα οικοδομικό έργο και θέλετε να ανυψώσετε με γερανό ένα φορτίο που έχει μάζα m=1,0x10^3 kg σε ύψος y_0=55 m πάνω από την τσιμεντένια βάση της οικοδομής. Έχοντας όμως υπόψη την προηγούμενη άσκηση, διαπιστώνετε ότι η δύναμη F_{max} είναι υπερβολικά μεγάλη και μπορεί να προκαλέσει ανεπανόρθωτα προβλήματα με τον κραδασμό που θα δημιουργήσει. Ως καλός μηχανικός που αντιλαμβάνεται την έννοια της ώθησης δύναμης, σκεφτήκατε να βάλετε ένα σωρό από άμμο πάνω στην τσιμεντένια βάση της οικοδομής έτσι ώστε, στην περίπτωση που συμβεί το ατύχημα η μάζα να πέσει πάνω στο σωρό άμμου. Εκτιμώντας ότι η δύναμη που θα επιβραδύνει τη μάζα m, όσο αυτή θα βυθίζεται μέσα στο σωρό άμμου, αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, σύμφωνα με τη γραφική παράσταση που ακολουθεί:



και επιπλέον ότι, η τσιμεντένια βάση αντέχει σε φορτίο μέχρι F_{max}=1,0x10^6 N, να υπολογίσετε το ελάχιστο ύψος που πρέπει να έχει η σωρός άμμου ώστε η πτώση της μάζα m να μη προκαλέσει ανεπανόρθωτα προβλήματα στη στατική αντοχή της οικοδομής. Οπωσδήποτε πρέπει να αξιολογήσετε το αποτέλεσμά σας.

ΛΥΣΗ

Η μάζα m φθάνει στο έδαφος με ταχύτητας υ η οποία υπολογίζεται από τις εξισώσεις κίνησης της ελεύθερης πτώσης. Συγκεκριμένα: $\upsilon_i = -\sqrt{2gy_0} = -\sqrt{2(9{,}80 m/s^2)(55 m)} = -33 m/s$ (7.1)

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι η μάζα m κινείται προς τα κάτω, δηλαδή έχει αρνητική ταχύτητα. Η μάζα προσκρούει στη σωρό άμμου τη χρονική στιγμή t_i=0 s και σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i = t_f$ ακινητοποιείται (η ταχύτητά της γίνεται ίση με το μηδέν). Στο χρονικό αυτό διάστημα η ορμή της μάζα m μεταβάλλεται από την τιμή $p_i = m\upsilon_i = -m\sqrt{2gy_0}$ στην τιμή p_f=0. Οπότε η μεταβολή της ορμής θα είναι ίση με: $\Delta p = p_f - p_i = m\sqrt{2gy_0}$ (7.2)

Η μεταβολή αυτή της ορμής οφείλεται στην ώθηση δύναμης J που δρα πάνω στη μάζα:

$J = \int_0^{\Delta t} F(t)\,dt$ (7.3)

Το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης (7.3) αντιπροσωπεύει το μέγεθος της περιοχής που περικλείεται από το γράφημα F=F(t) και τον άξονα t, δηλαδή το γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος της άσκησης το οποίο ισοδυναμεί με το εμβαδό ενός τριγώνου που έχει βάση το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f$ και ύψος τη μέγιστη δύναμη F_{max}. Οπότε:

$$J = \int_0^{\Delta t} F(t)\,dt = \frac{1}{2} F_{\max}\,\Delta t = \frac{1}{2}(1{,}0\times 10^6 N)\,t_f \quad \Rightarrow \quad J = (5{,}0\times 10^5 N)\,t_f \qquad (7.4)$$

Θεώρημα Ορμής – Ώθησης Δύναμης:

$$J = \Delta p \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\Delta t} F(t)\,dt = m\sqrt{2gy_0} \quad \Rightarrow \quad (5{,}0\times 10^5 N)\,t_f = (1{,}0^3 kg)\sqrt{2(9{,}80 m/s^2)(55m)} \quad \Rightarrow$$

$$t_f = \frac{(1{,}0^3 kg)\sqrt{2(9{,}80 m/s^2)(55m)}}{(5{,}0\times 10^5 N)} \quad \Rightarrow \quad t_f = 0{,}066\,s \qquad (7.5)$$

Ο χρόνος $t_f = 0{,}066\ s$ αντιπροσωπεύει το χρονικό διάστημα που κινείται η μάζα μέσα στην άμμο μέχρι αυτή να ακινητοποιηθεί. Στο χρονικό αυτό διάστημα, πάνω στη μάζα ασκείται μια μεταβλητή θετική δύναμη F η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παραπάνω γράφημα της άσκησης. Από το γράφημα αυτό προκύπτει ότι η δύναμη F αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Συγκεκριμένα: $F=k\,t$ όπου $k=F_{max}/t_f$ είναι η κλίση της γραμμικής συνάρτησης $F=F(t)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει και η επιτάχυνση της μάζας m: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{k\,t}{m} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{F_{\max}}{m\,t_f}\,t \qquad (7.6)$

Από την επιτάχυνση αυτή προσδιορίζουμε τις εξισώσεις κίνησης της μάζα m μέσα στην άμμο:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F_{\max}}{m\,t_f}\,t \quad \Rightarrow \quad d\upsilon = \frac{F_{\max}}{m\,t_f}\,t\,dt \quad \Rightarrow \quad \int d\upsilon = \frac{F_{\max}}{m\,t_f}\int t\,dt + C \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{F_{\max}}{2m\,t_f}\,t^2 + C \qquad (7.7)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_i=0\ s$ η ταχύτητα της μάζα είναι σίγουρα μικρότερη από την ταχύτητα $\upsilon_i = -33$ m/s που υπολογίσαμε στην Εξίσωση (7.1). Οπότε, αν στην Εξίσωση (7.7) θέσουμε $t=0\ s$ υπολογίζουμε τη σταθερά: $C=\upsilon_i = -33$ m/s. Οπότε η Εξίσωση (7) γίνεται:

$$\upsilon = \frac{F_{\max}}{2m\,t_f}\,t^2 - (33m/s) = \frac{1{,}0\times 10^6 N}{2(1{,}0\times 10^3 kg)(0{,}066s)}\,t^2 - (33m/s) \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = (7600 m/s^3)\,t^2 - (33m/s) \qquad (7.8)$$

Από την Εξίσωση (7.8) προσδιορίζουμε και την εξίσωση θέσης $y=y(t)$ της μάζα m μέσα στο σωρό άμμου:

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad dy = \upsilon\,dt \quad \Rightarrow \quad dy = \big((7600m/s^3)\,t^2 - (33m/s)\big)dt \quad \Rightarrow$$

$$y = \int \big((7600m/s^3)\,t^2 - (33m/s)\big)dt + C_1 = \int (7600m/s^3)\,t^2 dt - \int (33m/s)\,dt + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{3}(7600m/s^3)\,t^3 - (33m/s)\,t + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = (2500m/s^3)\,t^3 - (33m/s)\,t + C_1 \quad (7.9)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_i=0\ s$ η μάζα m έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με το σωρό άμμου. Τη χρονική αυτή στιγμή βρίσκεται σε ύψος $y=C_1=h$ από την επιφάνεια της τσιμεντένιας βάσης, όπου h είναι ίσο με το υποτιθέμενο ύψος της σωρού άμμου. Οπότε, η Εξίσωση (7.9) γράφεται και ως εξής.:

$$y = (2500m/s^3)\,t^3 - (33m/s)\,t + h \qquad (7.10)$$

Τη χρονική στιγμή t_f = – 0,066 s η μάζα m οριακά και σε ακραίες συνθήκες θα έχει διανύσει το διάστημα h με αποτέλεσμα τη χρονική αυτή στιγμή η εξαρτημένη μεταβλητή y=0 m. Οπότε η Εξίσωση (7.10) μας δίνει:

$$0=(2500m/s^3)t_f^3-(33m/s)t_f+h \quad \Rightarrow \quad h=(33m/s)t_f-(2500m/s^3) \quad \Rightarrow$$

$$h=(33m/s)(0{,}066s)-(2500m/s^3)(0{,}066s)^3 \quad \Rightarrow \quad h=1{,}5m$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται λογικό και θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι είναι ορθό (άλλο λογικό και άλλο ορθό ή αληθές). Στην άσκηση υπολογίσαμε την ταχύτητα της μάζας τη στιγμή της πρόσκρουσής της με την επιφάνεια της τσιμεντένιας βάσης δηλαδή 55 m από το σημείο που βρισκόταν η μάζα. Στην πραγματικότητα θα έπρεπε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της μάζα την στιγμή που αυτή ερχόταν σε επαφή με τη σωρό άμμου, δηλαδή σε σημείο 1,5 m πιο ψηλά από την επιφάνεια της τσιμεντένια βάσης. Στο σημείο αυτό, η μάζα m θα είχε διανύσει διάστημα y=53,5 m και θα είχε ταχύτητα:

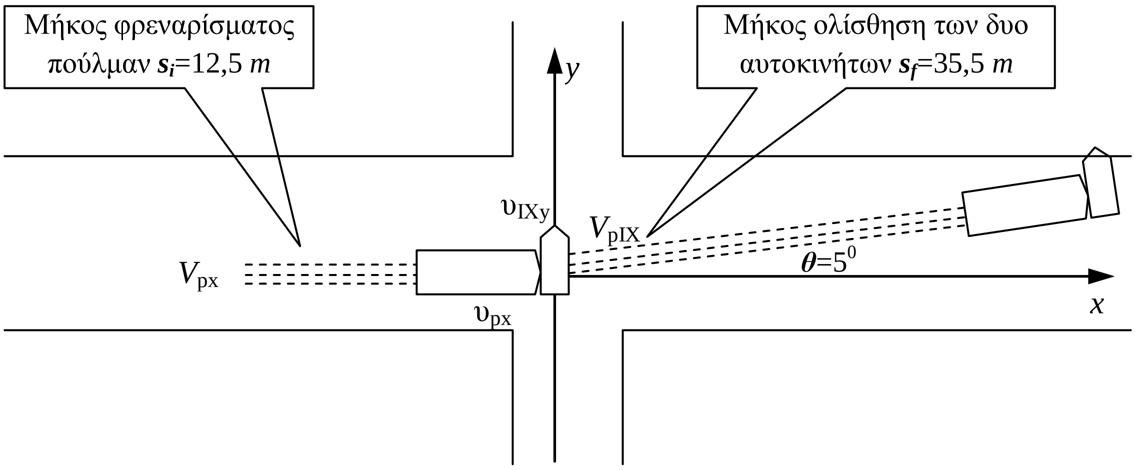
$$\upsilon_i'=-\sqrt{2gy}=-\sqrt{2(9{,}80m/s^2)(53{,}5m)}=-32{,}4m/s$$

Αν δεν υπήρχε η άμμος, η ταχύτητα στην επιφάνεια της τσιμεντένιας βάσης θα ήταν υ_i= –33 m/s. Η ταχύτητα αυτή υπολογίστηκε με ακρίβεια $\delta\upsilon_i$=±1 *m/s*. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα στην περιοχή πρόσκρουσης θα μπορούσε να ήταν μεταξύ των τιμών –32 *m/s* και –34 m/s. Η τιμή –32,4 *m/s* είναι μέσα στα όρια του σφάλματος $\delta\upsilon_i$=±1 *m/s* και συνεπώς το αποτέλεσμα κρίνεται αποδεκτό.

Για καλύτερη ασφάλεια, το ύψος της σωρού άμμου θα μπορούσε να είναι και μεγαλύτερο.

ΑΣΚΗΣΗ 8

(Πραγματικό γεγονός). Οδηγός Ι.Χ. που κινείτο σε κεντρικό επαρχιακό δρόμο παραβίασε το STOP σε κάθετη διασταύρωση με Εθνική Οδό. Το Ι.Χ. εισήλθε κινούμενο στην Εθνική Οδό με αποτέλεσμα πάνω σε αυτό να πέσει ένα πούλμαν και ο οδηγός να τραυματισθεί θανάσιμα. Είναι βέβαιο ότι υπεύθυνος για το τροχαίο αυτό δυστύχημα ήταν ο οδηγός του Ι.Χ. Παρόλα αυτά, ο δικηγόρος της οικογενείας του θύματος έχοντας ως δεδομένο ότι η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα των αυτοκινήτων επί της Εθνικής Οδού στη συγκεκριμένη διασταύρωση είναι V_{max}=60 *km/h*, πρότεινε να αναθέσουν σε μηχανικό πραγματογνώμονα να ζητήσει από την Τροχαία πληροφορίες για το δυστύχημα και με βάση τα δεδομένα που θα πάρει να προσπαθήσει να υπολογίσει την ταχύτητα που είχε το πούλμαν πριν την σύγκρουση. Το σκεπτικό του δικηγόρου ήταν απλό. Αν το πούλμαν δεν έτρεχε με πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα από την V_{max}=60 *km/h*, τότε υπήρχε περίπτωση να μην είχε τραυματισθεί θανάσιμα ο οδηγός του Ι.Χ. Κατά συνέπεια η παράβαση αυτή ήταν υπεύθυνη για το θάνατο του οδηγού του Ι.Χ. ο οποίος θα μπορούσε να είχε αποφευχθεί αν το πούλμαν έτρεχε με μικρότερη ή ίση ταχύτητα από την V_{max}. Με άλλα λόγια, η οικογένεια του θύματος θα μπορούσε να ζητήσει οικονομική αποζημίωση από τον οδηγό του πούλμαν με το σκεπτικό ότι για το θάνατο του οδηγού του Ι.Χ. είχε ευθύνη και αυτός. Τα δεδομένα που πήρε ο μηχανικός πραγματογνώμονας από την Τροχαία αποτυπώνονται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Τα επί πλέον στοιχεία που χρησιμοποίησε ο μηχανικός πραγματογνώμονας ήταν ο συντελεστής κινητικής τριβής ολίσθησης μ_k=0,72 μεταξύ των τροχών των αυτοκινήτων και του οδοστρώματος, ή μάζα M=8270 kg του πούλμαν και η μάζα m=1170 kg του Ι.Χ. αυτοκινήτου.

Το ζητούμενο στο πρόβλημα αυτό είναι: Δικαιούται η οικογένεια του θύματος να διεκδικήσει την αποζημίωση από τον οδηγό του πούλμαν;

ΛΥΣΗ

Ανακεφαλαίωση δεδομένων και ορισμός άλλων παραμέτρων:
Διεύθυνση κίνησης του πούλμαν: x-άξονας
Διεύθυνση κίνησης ΙΧ αυτοκινήτου: y-άξονας
Ταχύτητα πορείας πούλμαν (ζητούμενη ταχύτητα): V_{px}
Ταχύτητα πούλμαν τη στιγμή της σύγκρουσης: υ_{px}
Ταχύτητα ΙΧ τη στιγμή της σύγκρουσης: υ_{IXy}
Ταχύτητα πούλμαν-ΙΧ αμέσως μετά τη σύγκρουση: V'_{pIX}
Μήκος φρεναρίσματος πούλμαν: s_i=12,5 m
Μήκος ολίσθησης πούλμαν-ΙΧ μετά τη σύγκρουση: s_f=35,5 m
Βάρος πούλμαν: $w_p=Mg$
Βάρος ΙΧ: $w_{IX}=mg$

Τη στιγμή που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του πούλμαν το ΙΧ πατάει φρένο και η ταχύτητά του μειώνεται από την τιμή V_{px} στην τιμή υ_{px} σε ένα διάστημα s_i=12,5 m εξαιτίας της επιβράδυνσης α που οφείλεται στην τριβή ολίσθησης f_{ki} των τροχών του πούλμαν με το οδόστρωμα:

$f_{ki} = \mu_k w_p = \mu_k Mg$

Β΄ Νόμος Νεύτωνα: $f_{ki}=M\alpha_i \rightarrow \mu_k Mg=M\alpha_i \rightarrow a_i=\mu_k g$ (8.1)

Εξίσωση κινηματικής $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2-2as}$ (θα δίνεται): $\upsilon_{px}=\sqrt{V_{px}^2-2\mu_k g s_i}$ (8.2)

Πριν τη σύγκρουση, Ορμή πούλμαν (στη διεύθυνση x): $p_{px}=M\upsilon_{px}=M\sqrt{V_{px}^2-2\mu_k g s_i}$ (8.3)

Ορμή ΙΧ (στη διεύθυνση y): $p_{IXy}=m\upsilon_{IXy}$ (8.4)

Μετά τη σύγκρουση, Ορμή συστήματος πούλμαν-ΙΧ: $p_{pIX}=(M+m)\,V'_{pIX}$ (8.5)

Μετά τη σύγκρουση το σύστημα πούλμαν-ΙΧ ολισθαίνει πάνω στο οδόστρωμα και εξαιτίας της τριβής f_{kf} μεταξύ των τροχών και του οδοστρώματος το συσσωμάτωμα πούλμαν-ΙΧ ακινητοποιείται (υ=0) σε διάστημα s_f=35,5 m

$f_{kf} = \mu_k (w_p+w_{IX})=\mu_k (M+m)g$

Β΄ Νόμος Νεύτωνα: $f_{kf}=(M+m)a_f$ $\rightarrow$ $\mu_k (M+m)g=(M+m)a_i$ $\rightarrow$ $a_f=\mu_k g$ (8.6)

Εξίσωση κινηματικής (δίνεται): $0=\sqrt{V'^2_{pIX}-2\mu_k g s_f} \quad \Rightarrow \quad 0=V'^2_{pIX}-2\mu_k g s_f \quad \Rightarrow$

$V'_{pIX}=\sqrt{2\mu_k g s_f}=\sqrt{2(0{,}72)(9{,}80m/s^2)(35{,}5m)} \quad \Rightarrow \quad V'_{pIX}=22{,}4m/s$ (8.7)

Από την Εξίσωση (8.5) υπολογίζουμε την ορμή του συσσωματώματος πούλμαν-ΙΧ μετά τη σύγκρουση:

$p_{pIX}=(M+m)\,V'_{pIX}$ $\rightarrow$ $p_{pIX}=(8270\text{kg}+1170\text{kg})(22{,}4\text{m/s})$ $\rightarrow$ $p_{pIX}=211000\ kg\ m/s$ (8.8)

Συνιστώσα ορμής p_{pIX} στη διεύθυνση x: $(p_{pIX})_x= p_{pIX}\cos(\theta)=(211000kgm/s)\cos(5^0)$ $\rightarrow$

$(p_{pIX})_x=210000\ kg\ m/s$ (8.9)

Συνιστώσα ορμής p_{pIX} στη διεύθυνση y: $(p_{pIX})_y= p_{pIX}\sin(\theta)=(211000kgm/s)\sin(5^0)$ $\rightarrow$

$(p_{pIX})_y=18400\ kg\ m/s$ (8.10)

Νόμος Διατήρησης Ορμής στη Διεύθυνση x : $p_{px}=(p_{pIX})_x$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Πριν τη σύγκρουση: } p_{px}=M\sqrt{V^2_{px}-2\mu_k g s_i}\\ \text{Μετά τη σύγκρουση: } (p_{pIX})_x=210000\ kg\ m/s\end{array}\right\}$$

$$M\sqrt{V^2_{px}-2\mu_k g s_i}=210000kgm/s \quad \Rightarrow \quad V^2_{px}-2\mu_k g s_i=\left(\frac{210000kgm/s}{M}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$V_{px}=\sqrt{2\mu_k g s_i+\left(\frac{210000kgm/s}{M}\right)^2}=\sqrt{2(0{,}72)(9{,}80m/s^2)(12{,}5m)+\left(\frac{210000kgm/s}{8270kg}\right)^2}$$

V_{px}=28,7 m/s ή ισοδύναμα **V_{px}=103 km/h**

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Το πούλμαν έτρεχε με ταχύτητα πολύ μεγαλύτερη από το όριο V_{max}=60 km/h

Το δυστύχημα συνέβη το καλοκαίρι του 1989 και το δικαστήριο καταλόγισε στον οδηγό του πούλμαν χρηματική αποζημίωση στην οικογένεια του θύματος ύψους 10.000.000 δρχ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Από το νόμο διατήρησης της Ορμής στη διεύθυνση y υπολογίζουμε και την ταχύτητα του Ι.Χ.

Πριν τη σύγκρουση: $p_{IXy}=m\upsilon_{IXy}$

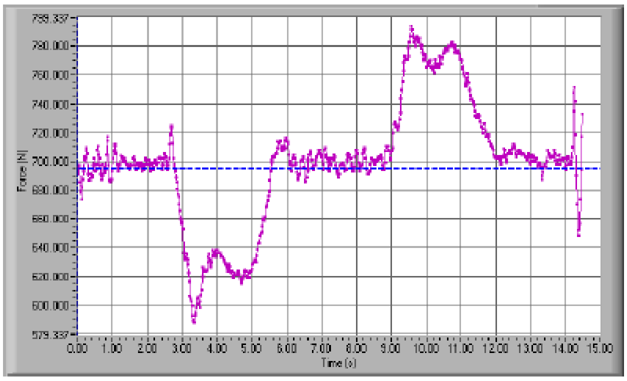
Μετά τη σύγκρουση: $(p_{pIX})_y$=18400 $kg\ m/s$

$p_{IXy}=(p_{pIX})_y$ $\rightarrow$ $m\upsilon_{IXy}$=18400 kgm/s $\rightarrow$ $\upsilon_{IXy}=\dfrac{18400kgm/s}{m}=\dfrac{18400kgm/s}{1170kg}=15{,}7m/s$

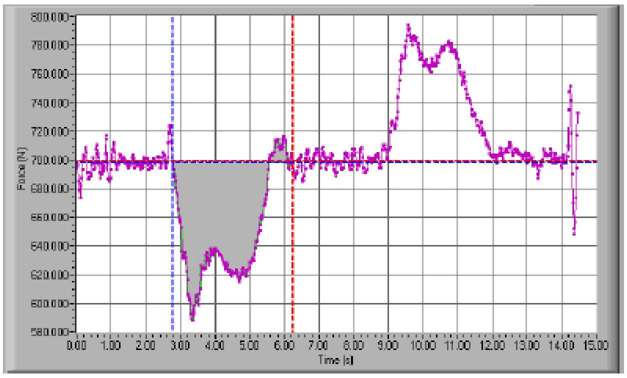
ή ισοδύναμα: **υ_{IXy}=56,5 m/s**

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ένας επιβάτης ασανσέρ με μάζα m=71.4 kg στέκεται πάνω στο δίσκο ενός ηλεκτρονικού ζυγού. Ο ζυγός μετρά τη δύναμη F που ασκούν τα πόδια του επιβάτη πάνω στο δίσκο του ζυγού. Το Σχήμα 4.1α δείχνει ένα γράφημα του μέτρου της δύναμης που μετρά ο ζυγός συναρτήσει του χρόνου για τον επιβάτη του ασανσέρ. Μέχρι και τη χρονική στιγμή t=2.75s το ασανσέρ ήταν ακίνητο.



Σχήμα 9.1α

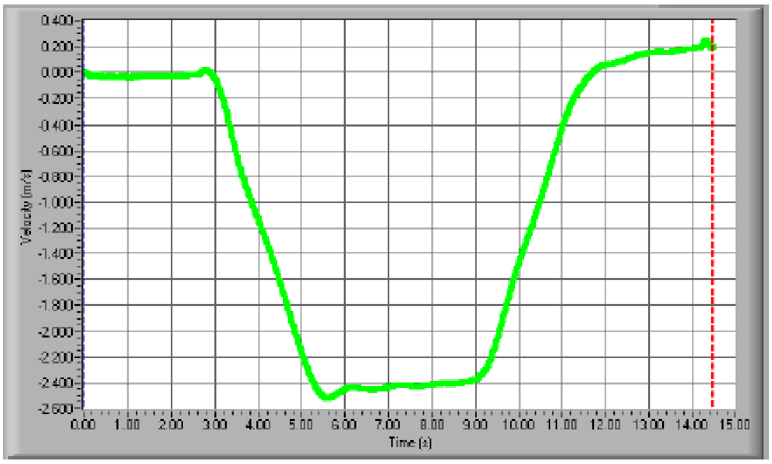


Σχήμα 9.1β

Στο Σχήμα 4.1β έχει γραμμοσκιαστεί η επιφάνεια της γραφικής παράστασης F(t) στο χρονικό διάστημα [t_1=2.75 s, t_2=6.35 s]. Η ώθηση για αυτό το χρονικό διάστημα είναι:

$$\vec{J}(t_1,t_2)=\int_{t_1=2.75s}^{t_2=6.35s}\vec{F}_{\text{total}}(t)\,dt=-174\hat{j}\ N\,s$$

Το Σχήμα 4.2 δείχνει ένα γράφημα της κατακόρυφης ταχύτητας του κέντρο μάζας του επιβάτη του ασανσέρ συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 9.2

A) Τι δηλώνει το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω εξίσωση υπολογισμού της ώθησης; Η επιλογή της θετικής κατεύθυνσης είναι προς τα πάνω ή προς τα κάτω; Βασιζόμενοι στο γράφημα του Σχήματος 4.1β, να περιγράψετε την κίνηση του ασανσέρ κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [t_1=2.75 s, t_2=6.35 s]. Ιδιαίτερα, αναγνωρίστε κάθε ευδιάκριτο τμήμα της ίδιας γραφικής παράστασης. Για κάθε ευδιάκριτο τμήμα της γραφικής παράστασης $F(t)$ περιγράψτε αν το ασανσέρ κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

B) Εξηγείστε γιατί η γραμμοσκιασμένη περιοχή στη γραφική παράσταση F(t) του Σχήματος 4.1β έχει ληφθεί σε σχέση με την ευθεία που τέμνει τον άξονα της δύναμης F στα 700 N και όχι σε σχέση με την ευθεία που τέμνει το άξονα F στη τιμή 0 N.

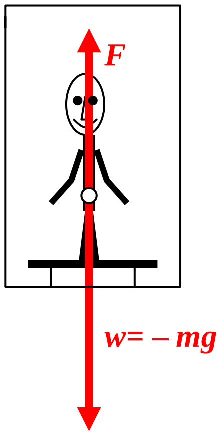
Γ) Να εξηγήσετε πως μπορείτε να κάνετε χρήση των δεδομένων του Σχήματος 4.1α για να υπολογίσετε την μεταβολή της κατακόρυφης ταχύτητας του κέντρου μάζας του επιβάτη του ασανσέρ; Συγκεκριμένα, ποια είναι η κατακόρυφη ταχύτητα του επιβάτη του ασανσέρ τη χρονική στιγμή t_2=6,35 s; Να συγκρίνετε τη ταχύτητα που θα βρείτε με την αντίστοιχη ταχύτητα που προκύπτει από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 4.2

Δ) Να υπολογίσετε τη ώθηση για το χρονικό διάστημα [t_1=2,75 s, t_f =12,0 s]

ΛΥΣΗ

A) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που θετική φορά του συστήματος συντεταγμένων είναι προς τα πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δείχνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον επιβάτη του ασανσέρ στο χρονικό διάστημα (2.75s, 5.50s). Το w είναι το βάρος του επιβάτη και το F είναι η δύναμη που μετρά ο ζυγός, είναι δηλαδή το φαινόμενο βάρος του επιβάτη. Η ώθηση J είναι το αίτιο που μεταβάλει την ορμή ή ισοδύναμα την ταχύτητα του επιβάτη. Εξ ορισμού, η ώθηση J οφείλεται στην συνολική δύναμη F_{total} που ασκεί ο δίσκος του ζυγού πάνω στον επιβάτη. Από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι η συνολική δύναμη είναι ίση με:



$$\vec{F}_{\text{total}} = F\,\hat{j} - mg\,\hat{j} = (F - mg)\,\hat{j} \qquad (9.1)$$

Το Σχήμα 4.1β όμως δείχνει ότι το φαινόμενο βάρος F είναι μικρότερο από το πραγματικό βάρος w=mg του επιβάτη. Συνεπώς, από τη Σχέση (1) προκύπτει ότι η συνολική δύναμη F_{total} η οποία προκαλεί την ώθηση J στο χρονικό διάστημα (2.75s, 5.50s) θα είναι αρνητική, άρα και η ώθηση στο ίδιο χρονικό διάστημα θα είναι αρνητική. Στο εναπομένον χρονικό διάστημα (5.50s, 6.35s), η ώθηση είναι θετική αλλά μικρότερη από την ώθηση στο χρονικό διάστημα (2.75s, 5.50s). Οπότε, η ώθηση στο χρονικό διάστημα (2.75s, 6.35) θα είναι αρνητική

$$\vec{J}(t_1,t_2) = \int_{t_1=2.75s}^{t_2=6.35s} \vec{F}_{\text{total}}(t)\,dt < 0$$

Από το Σχήμα 4.2 προκύπτει ότι το ασανσέρ έχει αρνητική ταχύτητα, δηλαδή κινείται προς τα κάτω.

Αρχικά, στο χρονικό διάστημα (2.75s, 5.50s) το μέτρο της ταχύτητα αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουν την ίδια φορά, οπότε η επιτάχυνσης είναι αρνητική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με το γεγονός ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στον επιβάτη είναι αρνητική (F_{total}<0).

Στο χρονικό διάστημα (5.50s, 6.35s) εξακολουθεί να είναι αρνητική με τη διαφορά ότι η ολική δύναμη (F_{total}<0) είναι θετική. Από το Σχήμα 9.1β προκύπτει ότι η δύναμη αυτή είναι σχετικά μικρή και έχει μικρή χρονική διάρκεια. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη αυτή θα προκαλέσει μια μικρής διάρκειας μικρή επιβράδυνση με αποτέλεσμα ο ανελκυστήρας να μειώσει ελαφρώς το μέτρο της ταχύτητάς του.

Στο χρονικό διάστημα (6.35s, 9.00s) το φαινόμενο βάρος F του επιβάτη είναι ίσο με το πραγματικό βάρος του επιβάτης, οπότε από τη Σχέση (9.1) προκύπτει ότι η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω σε αυτόν θα είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, επιβάτης και ασανσέρ θα κινούνται περίπου με σταθερή αρνητική ταχύτητα. (αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 9.2).

Στο χρονικό διάστημα (9.00s, 13.00s), το φαινόμενο βάρος του επιβάτη είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό, οπότε από τη Σχέση (9.1) η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στον επιβάτη θα είναι θετική. Επειδή η συνολική δύναμη είναι αντίθετη της αρνητικής ταχύτητας, το ασανσέρ θα επιβραδύνεται μέχρι τη χρονική στιγμή t=13.00s οπότε και θα ακινητοποιηθεί.

Τα δεδομένα του προβλήματος δε θα ήταν αποδεκτά αν παίρναμε την προς τα κάτω φορά ως θετική φορά. Πράγματι, από το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο (Σχήμα 9.2) θα προέκυπτε ότι το ασανσέρ θα κινείτο προς τα πάνω (σε αρνητική κατεύθυνση) με επιταχυνόμενη ταχύτητα. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι το φαινόμενο βάρος του επιβάτη θα ήταν μεγαλύτερο από το πραγματικό του βάρος, γεγονός που δεν είναι συμβατό με το γράφημα του Σχήματος 9.1

Β) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή του γραφήματος του Σχήματος 9.1 δείχνει την εξάρτηση του φαινόμενου βάρους του επιβάτη (δηλαδή τη δύναμη που ασκεί ο ζυγός πάνω στον επιβάτη) σε σχέση πάντα με το πραγματικό βάρος του επιβάτη ($w=mg\approx700$ N) και σε συνάρτηση της κίνησης του ασανσέρ και όχι τη συνολική δύναμη F_{total} που ασκείται πάνω στον επιβάτη. Το φαινόμενο βάρος μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο ή ίσο με το πραγματικό βάρος του επιβάτη. Αντίθετα, η συνολική δύναμη F_{total} μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη ή ίση με το μηδέν.

Γ) Η αρχική ορμή του επιβάτη τη χρονική στιγμή t_1=2.75s ήταν μηδέν (p_1=0) επειδή το ασανσέρ ήταν ακίνητο. Τη χρονική στιγμή t_2=6.35s η ορμή του επιβάτη θα είναι $p_2=m\upsilon_2$. Από το θεώρημα Ώθησης – Ορμής προκύπτει ότι η ώθηση πάνω στον επιβάτη στο χρονικό διάστημα (2.75s, 6.35s) είναι ίση με τη μεταβολή Δp της ορμής του επιβάτη:

$$J(2.75s, 6.35s) = \Delta p = m\upsilon_2 - 0$$

Αλλά από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι: $\vec{J}(t_1, t_2) = \int_{t_1=2.75s}^{t_2=6.35s} \vec{F}_{\text{total}}(t)\,dt = -174\hat{j}\ N\,s$

Οπότε: $m\upsilon_2 = -174\,Ns \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = -2.44\,m/s$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με αυτό που προκύπτει από το γράφημα του Σχήματος 4.2.

Δ) Εφόσον το ασανσέρ αρχικά ήταν ακίνητο και τη χρονική στιγμή t=12.00s ακινητοποιείται και πάλι, η μεταβολή της ορμής του επιβάτη του θα είναι ίση με μηδέ. Οπότε, από το θεώρημα Ώθησης – Ορμής η συνολική ώθηση στο χρονικό διάστημα (2.75s, 12.00s) θα είναι ίση με μηδέν. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε την συνολική ώθηση πάνω στον επιβάτη κάνοντας χρήση του γραφήματος του Σχήματος 9.1. Στο χρονικό διάστημα (2.75s, 6.35s) η ώθηση είναι αρνητική και ίση με -174 Ns. Στο χρονικό διάστημα (8.70s, 12.00s) η ώθηση είναι θετική και περίπου κατά μέτρο ίση με 174 Ns. Στο χρονικό διάστημα (6.35s, 8.70s) η ώθηση πάνω στον επιβάτη είναι ίση με μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Σε ένα αυτοματοποιημένο νταμάρι που παράγει χαλίκι, η καταπακτή από την οποία εξέρχεται το χαλίκι για να γεμίσει η καρότσα ενός φορτηγού έχει πλάτος ίσο με το πλάτος της καρότσας του φορτηγού και μήκος d=50,0 cm. Μετρήσεις έδειξαν ότι, όταν η καταπακτή είναι ανοιχτή το χαλίκι εξέρχεται με ρυθμός R=225 kg/s. Η καταπακτή ανοίγει και κλείνει αυτόματα όταν το εμπρός και το πίσω μέρος της καρότσας, αντίστοιχα βρεθούν κάτω από αυτήν.

Πλησιάζοντας τα φορτηγά την εγκατάσταση που σπάει το μάρμαρο και παράγει το χαλίκι, οι οδηγοί ελευθερώνουν το συμπλέκτη και σβήνουν τη μηχανή του. Τα φορτηγά που έχουν μάζα $M=6{,}80\text{x}10^3$ kg και καρότσα με μήκος L=8,00 m εισέρχονται στην εγκατάσταση παραγωγής χαλικιού χωρίς τριβές και με ταχύτητα $\upsilon_0=0{,}500$ m/s. Να υπολογίσετε:

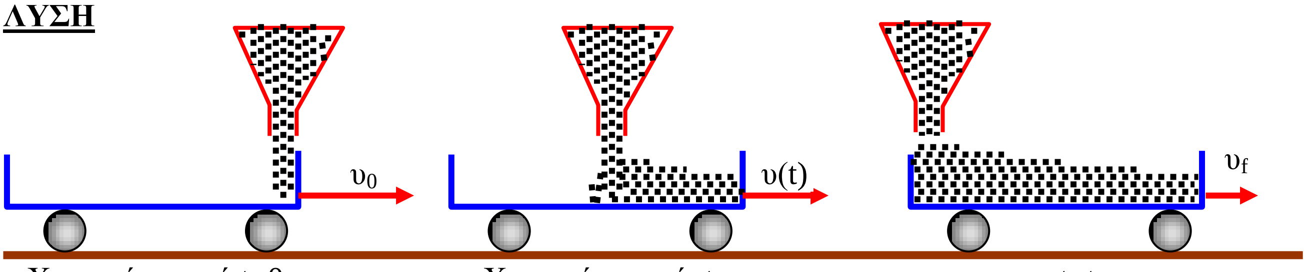
Α) Το χρονικό διάστημα t_f που διαρκεί η φόρτωση της καρότσας του φορτηγού.

Β) Την ταχύτητα με την οποία θα εξέλθει το φορτηγό από την εγκατάσταση φόρτωσης.

Γ) Τη μάζα του χαλικιού που θα φορτωθεί στην καρότσα του φορτηγού στο χρονικό διάστημα t_f.

Δ) Την ελάχιστη αρχική ταχύτητα υ_{min} την οποία πρέπει να έχει το φορτηγό ώστε αυτό να εξέρχεται από την εγκατάσταση φόρτωσης με το μέγιστο φορτίο $m_{max}=8{,}00\text{x}10^3$ kg.

ΛΥΣΗ



Το φορτηγό κινείται χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Αυτό σημαίνει ότι σε όλο το χρονικό διάστημα (0, t_f) η ορμή του φορτηγού μαζί με το φορτίο που έχει κάθε φορά διατηρείται σταθερή (αρχή διατήρηση της ορμής).

Αρχική ορμή φορτηγού τη χρονική στιγμή t=0: $p_0 = M\,\upsilon_0$ (10.1)

Ορμή φορτηγού με φορτίο τη χρονική στιγμή t: $p_t = \big(M + m(t)\big)\upsilon(t)$ (10.2)

Επειδή το χαλίκι ρέει με ρυθμό R=225 kg/s, η μάζα συναρτήσει του χρόνου είναι ίση με:

$m(t) = Rt$ (10.3)

Από τις Σχέσεις (5.1), (5.2) και (5.3) και την αρχή διατήρησης της ορμής παίρνουμε:

$$p_0 = p_t \quad \Rightarrow \quad M\,\upsilon_0 = \big(M + m(t)\big)\upsilon(t) \quad \Rightarrow \quad M\,\upsilon_0 = \big(M + Rt\big)\upsilon(t) \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = \frac{M\,\upsilon_0}{M + Rt} \qquad (10.4)$$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι στο χρονικό διάστημα που είναι ανοιχτή η καταπακτή εξόδου του χαλικιού η καρότσα του φορτηγού θα έχει μετακινηθεί κατά διάστημα L' =L – 2d ή

L' =[(8,00m – 2x(0,500m)]=7,00m (10.5)

Α) Από τον ορισμό της ταχύτητας και της Σχέσης (5.4) έχουμε:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{M\upsilon_0}{M+Rt} \Rightarrow dx = M\upsilon_0 \frac{dt}{M+Rt}=\frac{M\upsilon_0}{R}\frac{d(M+Rt)}{M+Rt} \Rightarrow \int_{x=0}^{x=L'} dx=\frac{M\upsilon_0}{R}\int_{t=0}^{t=t_f}\frac{d(M+Rt)}{M+Rt}$$

$$\Rightarrow x\Big|_0^{L'}=\frac{M\upsilon_0}{R}\ln\left(M+Rt\right)\Big|_0^{t_f} \Rightarrow L'=\frac{M\upsilon_0}{R}\left(\ln(M+Rt_f)-\ln(M+R0)\right) \Rightarrow$$

$$L'=\frac{M\upsilon_0}{R}\ln\left(\frac{M+Rt_f}{M}\right) \Rightarrow \frac{RL'}{M\upsilon_0}=\ln\left(\frac{M+Rt_f}{M}\right) \Rightarrow \frac{M+Rt_f}{M}=e^{\frac{RL'}{M\upsilon_0}} \Rightarrow$$

$$1+\frac{Rt_f}{M}=e^{\frac{RL'}{M\upsilon_0}} \Rightarrow \frac{Rt_f}{M}=e^{\frac{RL'}{M\upsilon_0}}-1 \Rightarrow t_f=\frac{M}{R}\left(e^{\frac{RL'}{M\upsilon_0}}-1\right) \qquad (10.6)$$

$$t_f=\frac{(6{,}80\times 10^3 kg)}{225kg/s}\left(e^{\frac{(225kg/s)\times(7{,}00m)}{(6{,}80\times10^3 kg)\times(0{,}500m/s)}}-1\right) \Rightarrow t_f=17{,}8s$$

Β) Για να βρούμε την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το φορτηγό από την εγκατάσταση φόρτωσης χαλικιού θέτουμε στην Σχέση (5.4) $t=t_f$ = 17,8 s:

$$\upsilon_f=\frac{M\upsilon_0}{M+Rt_f}=\frac{(6{,}80\times10^3 kg)\times(0{,}500m/s)}{(6{,}80\times10^3 kg)+(225kg/s)\times(17{,}8s)} \Rightarrow \upsilon_f=0{,}315m/s$$

Γ) Το χαλίκι που θα φορτωθεί στη καρότσα του φορτηγού στο χρονικό διάστημα t_f=17,8 s θα είναι ίσο με:

$$m(t_f)=Rt_f=(225kg/s)\times(17{,}8s) \Rightarrow m(t_f)=4010kg$$

Δ) Από τη Σχέση (5.6) έχουμε:

$$\frac{Rt_f}{M}=\left(e^{\frac{RL'}{M\upsilon_0}}-1\right) \Rightarrow \frac{m_{\max}}{M}=e^{\frac{RL'}{M\upsilon_{\min}}}-1 \Rightarrow \frac{m_{\max}}{M}+1=e^{\frac{RL'}{M\upsilon_{\min}}} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{m_{\max}}{M}+1\right)=\frac{RL'}{M\upsilon_{\min}} \Rightarrow \upsilon_{\min}=\frac{RL'}{M\ln\left(\frac{m_{\max}}{M}+1\right)}=\frac{(225kg/s)\times(7{,}00m)}{(6{,}80\times10^3 kg)\times\ln\left(\frac{8{,}00\times10^3 kg}{6{,}80\times10^3 kg}+1\right)} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\min}=0{,}298\ m/s$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!

Από το γεγονός ότι η ταχύτητα του φορτηγού δεν είναι σταθερή όσο χρόνο διαρκεί η φόρτωση, το φορτίο πάνω στην καρότσα δεν θα έχει το ίδιο ύψος (βλέπε σχήμα άσκησης). Εξηγείστε το λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτή η κατάσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 11

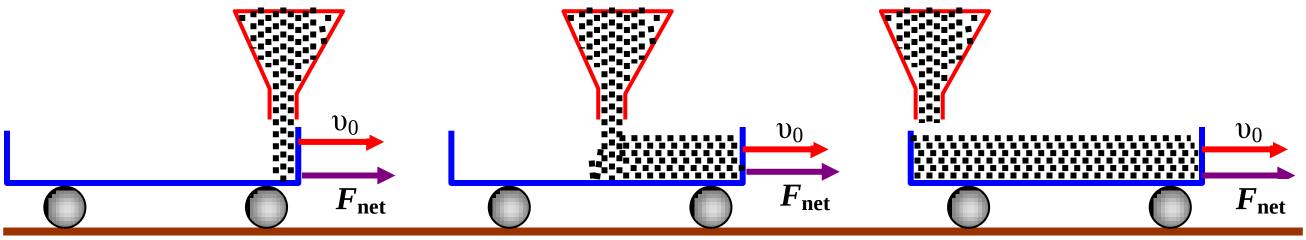
Για να διατηρείται το ίδιο ύψος φορτίου σε κάθε σημείο τη καρότσας προτείνονται δυο εναλλακτικέ λύσεις. Η πρώτη λύση είναι να μειώνεται κατάλληλα η παροχή χαλικιού κατά τη διάρκεια της κίνησης και φόρτωσης του φορτηγού. Η δεύτερη λύση είναι να είναι σε λειτουργία η μηχανή του φορτηγού και ο οδηγός να διατηρεί την ταχύτητα του φορτηγού σταθερή και ίση με υ_0.

Ο μηχανικός του εργοταξίου επιλέγει τη δεύτερη λύση ως πιο συμφέρουσα δεδομένου ότι αυτή είναι άμεσα εφαρμόσιμη. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, να υπολογίσετε τη συνολική σταθερή δύναμη F_{net} (= κινητήρια δύναμη μηχανής φορτηγού μείον τριβές) που πρέπει να ασκείται πάνω στο φορτηγό ώστε αυτό να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0=0,300m/s καθώς και τη συνολική μάζα $m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}$ του χαλικιού που θα φορτωθεί στην καρότσα του φορτηγού.

Προδιαγραφές φορτηγού: Μάζα φορτηγού $M=6{,}80\text{x}10^3$ kg, μήκος καρότσας: L=8,00m

Προδιαγραφές παροχής χαλικιού: Πλάτος καταπακτής ίσο με πλάτος καρότσας, μήκος καταπακτής d=50,0 cm. Τα χαλίκια εξέρχονται με ρυθμό R=225 kg/s.

ΛΥΣΗ



Χρονική στιγμή t=0   Χρονική στιγμή t $t=t_f$

Α) Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής αφού πάνω στο φορτηγό ασκείται εξωτερική συνισταμένη δύναμη F_{net}. Ισχύει όμως το θεώρημα Ώθησης – Ορμής σύμφωνα με το οποίο:

(Ώθηση που ασκείται πάνω στο φορτηγό) = (μεταβολή της ορμής του φορτηγού) ή ισοδύναμα:

$$J = \Delta p \quad \Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t=t_f} F_{\text{net}}\, dt = p_f - p_0 \qquad (11.1)$$

Όπου $p_0 = M\,\upsilon_0$ είναι η αρχική ορμή του φορτηγό (όταν αυτό δεν έχει καθόλου φορτίο)

$p_f = (M + m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota})\,\upsilon_f = (M + m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota})\,\upsilon_0$ είναι η τελική ορμή του φορτηγού τη χρονική στιγμή t_f όταν έχει ήδη φορτωθεί το χαλίκι, οπότε η συνολική μάζα του φορτηγού θα είναι $M+m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}$. Επί πλέον θέσαμε $\upsilon_f = \upsilon_0$ δεδομένου ότι η δύναμη F υπάρχει για να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του φορτηγού. Οπότε, με δεδομένο ότι η δύναμη F είναι σταθερή, η Σχέση (11.1) γίνεται:

$$F_{\text{net}} \int_{t=0}^{t=t_f} dt = (M + m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota})\,\upsilon_0 - M\,\upsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{net}}\, t_f = (M + m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota})\,\upsilon_0 - M\,\upsilon_0$$

$$F_{\text{net}} = \frac{(\mathrm{M} + m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota})\upsilon_0 - M\,\upsilon_0}{t_f} = \frac{m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}\,\upsilon_0}{t_f} \qquad (11.2)$$

Υπολογισμός του χρόνου φόρτωσης t_f και της συνολικής μάζας $m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}$ του φορτίου.

Το χαλίκι αρχίζει να ρέει τη στιγμή που το εμπρός μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή εξόδου του χαλικιού. Η ροή του χαλικιού σταματά όταν το πίσω μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή. Από το σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι η συνολική μετακίνηση της καρότσας θα είναι L'=L – 2d, όπου d=50,0cm.

L' = 8,00m – 2x(0,500m) = 7,00 m

Επειδή το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 = 0,300 m/s ο συνολικό χρόνος κίνησης του φορτηγού θα είναι:

$$\upsilon_0 = \frac{L'}{t_f} \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{L'}{\upsilon_0} = \frac{7{,}00m}{0{,}300m/s} \quad \Rightarrow \quad t_f = 23{,}3s$$

Με δεδομένο το ρυθμό R=225 kg/s με τον οποίο εξέρχεται το χαλίκι από την καταπακτή, στο χρονικό διάστημα t_f = 23,3 s η συνολική μάζα χαλικιού που θα φορτωθεί στη καρότσα του φορτηγού θα είναι:

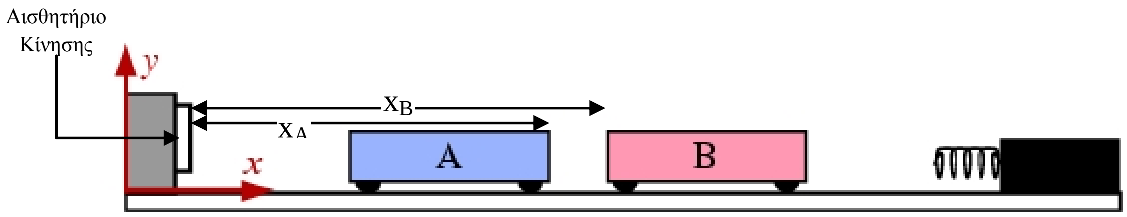
$$m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota} = R\,t_f = (225kg/s)\times(23{,}3s) \quad \Rightarrow \quad m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota} = 5240\,kg$$

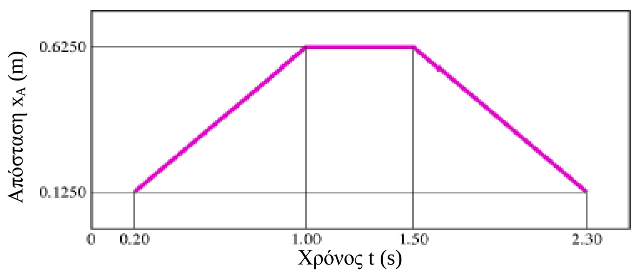
Αντικαθιστούμε στη Σχέση (11.2) το χρόνο φόρτωσης t_f του φορτηγού και τη συνολική μάζα $m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}$ που βρήκαμε και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη που πρέπει να ασκείται στο φορτηγό για να διατηρεί την ταχύτητά του σταθερή:

$$F_{\text{net}} = \frac{m_{\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\kappa\iota}\,\upsilon_0}{t_f} = \frac{(5240kg)\times(0{,}300m/s)}{23{,}3s} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{net}} = 67{,}5\,N$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Πάνω σε μια ευθύγραμμη και οριζόντια αεροτροχιά υπάρχουν δυο ακριβώς όμοια αμαξίδια Α και Β. Το αισθητήριο κίνησης που βρίσκεται στο αριστερό μέρος της αεροτροχιάς μετρά την απόσταση x_A της δεξιάς άκρης του αμαξιδίου Α καθώς και την απόσταση x_B της αριστερής άκρης του αμαξιδίου Β από το αισθητήριο. Στο δεξιό μέρος της αεροτροχιάς υπάρχει ένα οριζόντιο ελατήριο.





Το αισθητήριο κίνησης καταγράφει και αποδίδει γραφικά την παραπάνω γραφική παράσταση $x_A = x_A(t)$.

Α. Να ερμηνεύσετε την παραπάνω γραφική παράσταση $x_A = x_A(t)$. Συγκεκριμένα, να περιγράψετε τη κίνηση του αμαξίδιου Α στα χρονικά διαστήματα (0.20s, 1.00s) και (1.50s, 2.30s) και να αναφέρετε τις συνέβη στις χρονικές στιγμές t_1=1.00s και t_2=1.50s.

Β. Να περιγράψετε την κίνηση του αμαξίδιου Β στο χρονικό διάστημα (0.20s, 2.30s) και να αποδώσετε γραφικά την απόσταση x_B της αριστερής άκρης του αμαξιδίου Β από το αισθητήριο κίνησης συναρτήσει του χρόνου.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Α. Τη χρονική στιγμή t=0.20s η δεξιά άκρη του αμαξίδιου βρίσκεται σε απόσταση x_A=0,125 από το αισθητήριο κίνησης.

Στο χρονικό διάστημα Δt_1=(0,20s, 1,00s) το αμαξίδιο απομακρύνεται από το αισθητήριο κίνησης με σταθερή ταχύτητα υ_{1A}. Από τη γραφική παράσταση $x_A = x_A(t)$ έχουμε:

$$\upsilon_{1A} = \frac{\Delta x_{1A}}{\Delta t_1} = \frac{0.6250m - 0.1250m}{1.00s - 0.20s} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{1A} = 0.625 m/s$$

Τη χρονική στιγμή t_1=1.00s συγκρούεται ελαστικά με το ακίνητο αμαξίδιο Β. Σύμφωνα με τη θεωρία των ελαστικών κρούσεων, επειδή τα αμαξίδια Α και Β είναι όμοια, η κινητική ενέργεια του αμαξίδιου Α μεταφέρεται στο αμαξίδιο Β με αποτέλεσμα το αμαξίδιο Α να ακινητοποιηθεί και το αμαξίδιο Β να αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά πλησιάζοντας το οριζόντιο ελατήριο με ταχύτητα υ_{1B}=0.625 m/s.

Στο χρονικό διάστημα Δt_2=(1.00s, 1.50s) το αμαξίδιο παραμένει ακίνητο σε απόσταση x_A=0.6250m από το αισθητήριο κίνησης ενώ το αμαξίδιο Β αρχικά κινείται προς το ελατήριο το οποίο συμπιέζει μετατρέποντας την κινητική του ενέργεια σε ελαστική δυναμική ενέργεια. Στη συνέχεια, το ελατήριο εκτονώνεται μετατρέποντας την αποθηκευμένη ελαστική δυναμική ενέργεια σε κινητική ενέργεια εκτοξεύοντας προς τα αριστερά το αμαξίδιο Β με ταχύτητα υ_{2B}= –0.635m/s

Τη χρονική στιγμή t_2=1.50s, το αμαξίδιο Β, το οποίο ήδη κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα υ_{2B}= –0.635m/s, συγκρούεται ελαστικά με το ακίνητο αμαξίδιο Α. Σύμφωνα με τη θεωρία των ελαστικών κρούσεων, επειδή τα αμαξίδια Α και Β είναι όμοια, η κινητική ενέργεια του αμαξίδιου Β μεταφέρεται στο αμαξίδιο Α με αποτέλεσμα το αμαξίδιο Β να ακινητοποιηθεί και το αμαξίδιο Α να αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά πλησιάζοντας το αισθητήριο κίνησης με ταχύτητα υ_{2A}= –0.625 m/s. Πράγματι, στο χρονικό διάστημα Δt_2=(1.50s, 2.30s) η ταχύτητα του αμαξίδιου Α θα είναι ίση με:

$$\upsilon_{2A} = \frac{\Delta x_{1A}}{\Delta t_2} = \frac{0.1250m - 0.6250m}{2.30s - 1.50s} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{2A} = -0.625 m/s$$

Β. Στο χρονικό διάστημα Δt_1=(0.20s, 1.00s) το αμαξίδιο Β είναι ακίνητο και βρίσκεται σε απόσταση x_{1B}=0.6250m από το αισθητήριο κίνησης.

Τη χρονική στιγμή t_1=1.00s πέφτει πάνω του το αμαξίδιο Α με ταχύτητα υ_{1A}=0.625 m/s και όπως ήδη αναφέραμε πιο πάνω, το αμαξίδιο Β αποκτά ταχύτητα υ_{1B}=0.625 m/s.

Στο χρονικό διάστημα Δt_2=(1.00s, 1.50s) αμαξίδιο Β αρχικά κινείται προς το ελατήριο με ταχύτητα υ_{1B}=0.625 m/s και στη συνέχεια ανακλάται από το ελατήριο προς τα αριστερά με ταχύτητα υ_{2B}= –0.625 m/s.

Τη χρονική στιγμή t_2=1.50 s το αριστερό άκρο του αμαξίδιου Β συγκρούεται ελαστικά με το ακίνητο αμαξίδιο Α με αποτέλεσμα αυτό να ακινητοποιείται και το αμαξίδιο Α να αποκτά ταχύτητας υ_{2A}= –0.625 m/s.

Στο χρονικό διάστημα Δt_3=(1.50s, 2.30s) το αμαξίδιο Β θα είναι ακίνητο και η αριστρή άκρη του θα βρίσκεται σε απόσταση x_{2B}=0.625 m.

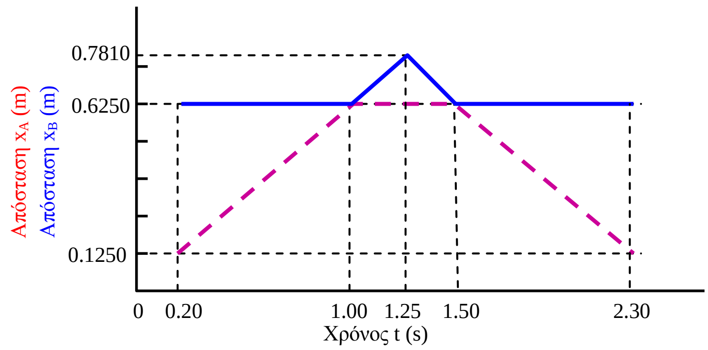
Η κίνηση του αμαξίδιου Β στο χρονικό διάστημα Δt_2=(1.50s, 2.30s)

Επειδή μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα όπου Δt_2=0.50s το αμαξίδιο Α κινήθηκε προς τα δεξιά και στη συνέχεια προς τα αριστερά με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα υ=0.625 m/s, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φθάσει το δεξιό άκρο του αμαξίδιου Β στο ελατήριο θα είναι ίσο με $(\Delta t_2/2)$=0.25s. Κατά συνέπεια, το αμαξίδιο Β θα μετατοπισθεί προς τα δεξιά κατά διάστημα:

$$\Delta s = \upsilon_{1B}\frac{\Delta t_2}{2} = (0.625 m/s)\times\frac{0.50s}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = 0.156 m$$

Μετά την ανάκλαση του από το ελατήριο, το αμαξίδιο Β θα μετατοπισθεί προς τα αριστερά κατά το ίδιο διάστημα Δs=0.156 m μέχρι η αριστερή του άκρη συγκρουσθεί με τη δεξιά άκρη του αμαξίδιου Α.

Αποτυπώνοντας την παραπάνω περιγραφή της κίνησης του αμαξίδιου Β παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση $x_B=x_B(t)$ (γράφημα με χρώμα μπλε) η οποία αντιστοιχεί στη μετατόπιση του αριστερού άκρου του αμαξίδιου Β:



ΑΣΚΗΣΗ 13

Ένα διαστημόπλοιο μάζας 2,0x10^6 kg πετάει με ταχύτητα 5,0x10^6 m/s όταν ο αντιδραστήρας του ξαφνικά παθαίνει βλάβη με αποτέλεσμα το διαστημόπλοιο να εκραγεί και να διασπαστεί σε τρία θραύσματα. Ένα εκ των θραυσμάτων με μάζα 5,0x10^5 kgεκτινάσσεται προς τα πίσω με ταχύτητα 2,0x10^6 m/s. Ένα δεύτερο θραύσμα με μάζα 8,0x10^5 kg κινείται προς τα εμπρός με ταχύτητα 1,0x10^6 m/s. Ποια είναι η κατεύθυνση και η ταχύτητα του τρίτου θραύσματος;

ΛΥΣΗ

Μάζα διαστημοπλοίου: M=2,0x10^6 kg
Ταχύτητα διαστημοπλοίου: V_x=5,0x10^6 m/s (θεωρούμε κίνηση προς στη θετική x-διεύθυνση)
Μάζα πρώτου θραύσματος: m_1=5,0x10^5 kg=0,50x10^6 kg
Ταχύτητα πρώτου θραύσματος: $\upsilon_{1\chi}$= – 2,0x10^6 m/s (το θραύσμα αυτό κινείται προς την αρνητική x-διεύθυνση)
Μάζα δεύτερου θραύσματος: m_2=8,0x10^5 kg=0,80x10^6 kg
Ταχύτητα δεύτερου θραύσματος: $\upsilon_{2\chi}$= 1,0x10^6 m/s (το θραύσμα αυτό κινείται προς την θετική x-διεύθυνση)
Πριν τη διάσπασή του, η αρχική ορμή του διαστημόπλοιου ήταν:

$(p_x)_i = M\,V_x = (2{,}0x10^6 kg)x(5{,}0x10^6 m/s) = 1{,}0x10^{13}$ kgm/s (1)

Το διάνυσμα της ορμής αυτής είναι παράλληλο προς τη θετική x-διεύθυνση.

Επειδή η έκρηξη του διαστημόπλοιου έγινε εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων και όχι εξωτερικών δυνάμεων, το διάνυσμα της αρχικής ορμής $(\vec{p}_x)_i$ θα είναι ίσο με το διάνυσμα της τελικής ορμής $\vec{p}_f$ των τριών θραυσμάτων μετά την έκρηξη, δηλαδή και η τελική ορμή του συστήματος των τριών θραυσμάτων θα είναι παράλληλη προς τη θετικής x-διεύθυνση:

$$(\vec{p}_x)_i = \vec{p}_f = (\vec{p}_x)_f \quad \Rightarrow \quad (p_x)_i = (p_x)_f$$

Επειδή τα δυο από τα τρία θραύσματα του διαστημόπλοιου κινούνται παράλληλα με τη x-διεύθυνση τότε και το τρίτο θραύσμα θα κινείται παράλληλα με τη x-διεύθυνση. (Αν θεωρούσαμε ότι το τρίτο θραύσμα κινείτο προς διαφορετική κατεύθυνση τότε η συνισταμένη τελική ορμή του συστήματος δεν θα ήταν παράλληλη με τη x-διεύθυνση)

$$(p_x)_i = (p_x)_f \quad \Rightarrow \quad MV_x = m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} + m_3\upsilon_{3x} \quad (2)$$

Όπου $m_3 = M - m_1 - m_2 = 2{,}0x10^6 kg - 0{,}5x10^6 kg - 0{,}8x10^6 kg = 0{,}7x10^6 kg$

υ_{3x} είναι η άγνωστη ταχύτητα. Οπότε από την Εξίσωση (2) θα έχουμε:

$$\upsilon_{3x} = \frac{MV_x - m_1\upsilon_{1x} - m_2\upsilon_{2x}}{m_3} =$$

$$= \frac{(2\times10^6 kg)(5{,}0\times10^6 m/s) - (0{,}50\times10^6 kg)(-2{,}0\times10^6 m/s) - (0{,}80\times10^6 kg)(1{,}0\times10^6 m/s)}{0{,}7\times10^6 kg}$$

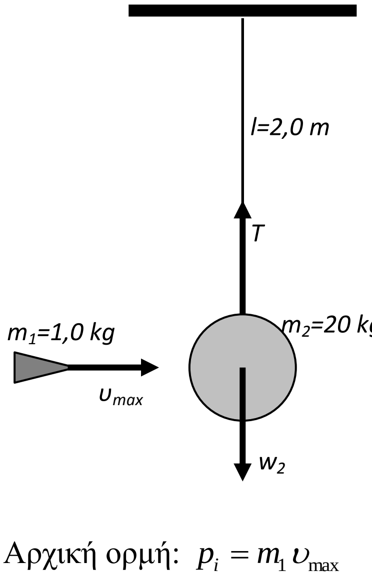
$\upsilon_{3x} = +1{,}46x10^7\ m/s$

Το θραύσμα αυτό κινείται προς τη θετική x-διεύθυνση.

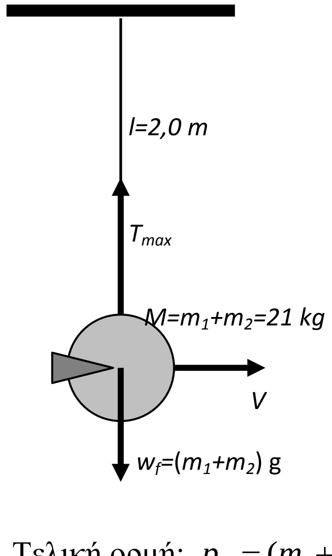
ΑΣΚΗΣΗ 14

Μια ξύλινη μπάλα μάζας 20 kg είναι κρεμασμένη από ένα σύρμα μήκους 2,0 m. Η μέγιστη τάση που μπορεί να αντέξει το σύρμα χωρίς να σπάσει είναι 400 N. Ένα βλήμα μάζας 1,0 kg που κινείται οριζόντια προσκρούει και σφηνώνεται στην ξύλινη μπάλα. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που θα μπορούσε να έχει αυτό το βλήμα χωρίς να σπάσει το σύρμα.

ΠΡΙΝ



ΜΕΤΑ



Αρχική ορμή: $p_i = m_1\upsilon_{max}$

Τελική ορμή: $p_f = (m_1 + m_2)V$

Το σύστημα αποτελείται από τη ξύλινη μπάλα μάζας m_2 και το βλήμα μάζας m_1. Αρχικά η ξύλινης σφαίρα είναι σε ισορροπία οπότε η τάση του νήματος T θα είναι ίση με το βάρος w_2 της ξύλινης σφαίρας, (T=w_2). Θεωρούμε ότι η ταχύτητα του βλήματος είναι η μέγιστη δυνατή ώστε κατά την κρούση να μη σπάσει το νήμα,

Η κρούση είναι τελείως πλαστική. Το βλήμα ενσωματώνεται μέσα στην ξύλινη σφαίρα και το σύστημα (ξύλινη σφαίρα – βλήμα) αποκτά ταχύτητα V. Τη χρονική στιγμή που λαμβάνει χώρα η κρούση, η ορμή του συστήματος (ξύλινη σφαίρα – βλήμα), πριν και μετά την κρούση, διατηρείται σταθερή σε μέτρο, διεύθυνση και φορά. Οπότε:

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad m_1 \upsilon_1 = (M+m)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Τη χρονική στιγμή ακριβώς μετά την κρούση, το σύστημα (ξύλινη σφαίρα – βλήμα – νήμα) θα εκτελέσει κυκλική κίνηση με αρχική ταχύτητα V και ακτίνα $l=2{,}0\ m$, οπότε η ξύλινη σφαίρα θα έχει αρχική κεντρομόλο επιτάχυνση α_r ίση με:

$$a_r = \frac{V^2}{l} \quad \Rightarrow \quad a_r = \frac{m_1^2 \upsilon_1^2}{(m_1+m_2)^2\, l}$$

Η κεντρομόλος αυτή επιτάχυνση είναι αποτέλεσμα της κεντρομόλου δύναμης F_r η οποία είναι ίση με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο σύστημα (ξύλινη σφαίρα – βλήμα).

$$F_r = (m_1+m_2)\,a_r = (m_1+m_2)\frac{m_1^2 \upsilon_{max}^2}{(m_1+m_2)^2\, l} \qquad \Rightarrow \quad F_r = \frac{m_1^2 \upsilon_{max}^2}{(m_1+m_2)\,l}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σύστημα (ξύλινη σφαίρα – βλήμα), ακριβώς μετά την πλαστική κρούση είναι το βάρος w_f=(m_1+m_2)g του συστήματος και η τάση T_{max} του νήματος. Θεωρήσαμε την τάση του νήματος ίση με T_{max} για να υπολογίσουμε την υ_{max}. Οπότε:

$$F_r = T_{\max} - w_f \quad \Rightarrow \quad T_{\max} = F_r + w_f \quad \Rightarrow \quad T_{\max} = \frac{m_1^2 \upsilon_{\max}^2}{(m_1+m_2)\,l} + (m_1+m_2)\,g \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{\left(T_{\max} - (m_1+m_2)\,g\right)(m_1+m_2)\,l}{m_1^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(400kg - (1{,}0kg + 20kg)\times(9{,}80m/s^2)\right)\times(1{,}0kg+20kg)\times 2{,}0m}{(1{,}0kg)^2}} \qquad \Rightarrow$$

υ_{max}=90,3 m/s

ΑΣΚΗΣΗ 15

Ένα ασκεπές βαγόνι μάζας M = 1,00x10^4 kg κινείται αργά χωρίς τριβές πάνω σε μια επίπεδη σιδηροτροχιά. Ξαφνικά αρχίζει να βρέχει καταρρακτωδώς με τη βροχή να πέφτει κατακόρυφα. Αρχικά το βαγόνι είναι άδειο και κινείται με ταχύτητα υ = 2,00 m/s. Να υπολογίσετε την ταχύτητα V του βαγονιού τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βαγόνι θα έχει μαζέψει ποσότητα νερού μάζας m = 3,50x10^3 kg.

ΛΥΣΗ

Αρχική ορμή συστήματος: $p_i = M\upsilon$

Τελική ορμή συστήματος: $p_f = (M+m)V$

Αρχή διατήρηση της ορμής (στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις): $p_i = p_f$ $\Rightarrow$

$$(M+m)V = M\upsilon \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M}{M+m}\upsilon = \frac{1{,}00^4\text{kg}}{1{,}00^4\text{kg} + 3{,}50^3\text{kg}} \times 2{,}00 m/s$$
$$= 1{,}48\ m/s$$

V = 1,48 m/s

ΑΣΚΗΣΗ 16

Μια μπάλα του τένις η οποία έχει μάζα m = 0,0560 kg κινείται με σταθερή ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0 = \left(22{,}0\frac{m}{s}\right)\hat{\imath} - \left(4{,}00\frac{m}{s}\right)\hat{\jmath}$, πριν αυτή κτυπηθεί από τη ρακέτα. Η ρακέτα ασκεί δύναμη ίση με $\vec{F} = -(415N)\hat{\imath} + (125N)\hat{\jmath}$ η οποία υποθέτουμε ότι παραμένει σταθερή για χρονικό διάστημα Δτ = 4,15x10^{-3} s κατά το οποίο η ρακέτα και η μπάλα είναι σε επαφή. Να υπολογίσετε (α) τις συνιστώσες x και y της ώθησης δύναμης πάνω στη μπάλα του τένις και (β) τις συνιστώσες x και y της τελικής ταχύτητας υ της μπάλας του τένις.

ΛΥΣΗ

Ώθηση: $\vec{J} = \int_0^{\Delta\tau} \vec{F}dt = \vec{F}\int_0^{\Delta\tau} dt = \vec{F}\Delta\tau = [(-415\text{ N})\hat{\imath} + (125\text{ N})\hat{\jmath}] \times (4{,}15 \times 10^{-3}\text{s})$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = (-415\text{ N}) \times (4{,}15 \times 10^{-3}\text{s})\hat{\imath} + (125\ N) \times 4{,}15 \times 10^{-3}\text{s})\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = (-1{,}72\text{ Ns})\hat{\imath} + (0{,}519\text{ Ns})\hat{\jmath} \qquad (1)$

(α) J_x = –1,72 Ns και J_y = 0,519 Nm

(β) Θεώρημα Ώθησης – Ορμής: $\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0 = m(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0) \quad \Rightarrow$

$$\frac{\vec{J}}{m} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \frac{\vec{J}}{m} + \vec{\upsilon}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{(-1{,}72\ \mathrm{Ns})\hat{\imath} + (0{,}519\ \mathrm{Ns})\hat{\jmath}}{0{,}0560\ \mathrm{kg}} + (22{,}0\ \mathrm{m/s})\hat{\imath} - (4{,}00\ \mathrm{m/s})\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \left(\frac{-1{,}72}{0{,}0560}\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{kg}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{0{,}519}{0{,}0560}\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{kg}}\right)\hat{\jmath} + (22{,}0\ m/s)\hat{\imath} - (4{,}00\ m/s)\hat{\jmath} \qquad (2)$$

Ανάλυση μονάδων: $\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{s}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$(2) \Rightarrow \vec{\upsilon} = (-30{,}7\ m/s)\hat{\imath} + (9{,}27\ m/s)\hat{\jmath} + (22{,}0\ m/s)\hat{\imath} - (4{,}00\ m/s)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \left(-30{,}7\frac{m}{s} + 22{,}0\frac{m}{s}\right)\hat{\imath} + \left(9{,}27\frac{m}{s} - 4{,}00\frac{m}{s}\right)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \left(-8{,}70\frac{m}{s}\right)\hat{\imath} + \left(5{,}27\frac{m}{s}\right)\hat{\jmath}$$

$$\upsilon_x = -8{,}70\frac{m}{s} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_y = 5{,}27\frac{m}{s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Πάνω σε ένα αντικείμενο που έχει μάζα m = 2,00 kg ασκείται δύναμη η οποία εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $\vec{F} = (at^2)\hat{\imath} - (\beta - \gamma t)\hat{\jmath}$ όπου α = 15,0 N/s^2, β = 12,0 N και γ = 20,0 N/s. Η δύναμη αυτή ασκείται επί του αντικειμένου για χρονικό διάστημα Δτ = 0,500 s. Αν το αντικείμενο ήταν αρχικά ακίνητο ($\upsilon_i = 0$ και $p_i = 0$), να υπολογίσετε το διάνυσμα της ταχύτητας υ_f μετά το πέρας του χρονικού διαστήματος των 0,500 s.

ΛΥΣΗ

Θεώρημα Ώθησης – Ορμής:

$$\int_0^{\Delta\tau} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{p}_f - \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\Delta\tau} \vec{F}dt = m\vec{\upsilon}_f \qquad (1)$$

$$\int_0^{\Delta\tau} \vec{F}dt = \int_0^{\Delta\tau} [(at^2)\hat{\imath} - (\beta - \gamma t)\hat{\jmath}]dt = \left[\int_0^{\Delta\tau} \alpha t^2 dt\right]\hat{\imath} - \left[\int_0^{\Delta\tau} (\beta - \gamma t)dt\right]\hat{\jmath} =$$

$$= a\left[\int_0^{\Delta\tau} t^2 dt\right]\hat{\imath} - \beta\left[\int_0^{\Delta\tau} dt\right]\hat{\jmath} + \gamma\left[\int_0^{\Delta\tau} tdt\right]\hat{\jmath} = \alpha\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\Delta\tau}\hat{\imath} - \beta t\Big|_0^{\Delta\tau}\hat{\jmath} + \gamma\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\Delta\tau}\hat{\jmath} =$$

$$= a\frac{(\Delta\tau)^3}{3}\hat{\imath} - \beta(\Delta\tau)\hat{\jmath} + \gamma\frac{(\Delta\tau)^2}{2}\hat{\jmath} = \alpha\frac{(\Delta\tau)^3}{3}\hat{\imath} - \left(\beta(\Delta\tau) - \gamma\frac{(\Delta\tau)^2}{2}\right)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\Delta\tau} \vec{F}dt = (15{,}0\ N/s^2)\frac{(0{,}500\ s)^3}{3}\hat{\imath} - \left((12{,}0\ N)(0{,}500\ s) - (20{,}0\ N/s)\frac{(0{,}500\ s)^2}{2}\right)\hat{\jmath}$$

$$\int_{0}^{\Delta\tau} \vec{F} dt = (0{,}625\ Ns)\hat{\imath} - (3{,}50\ Ns)\hat{\jmath} \qquad (2)$$

Οι Εξισώσεις (1) και (2) έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, επομένως ίσα θα είναι και τα δεύτερα μέλη:

$$m\vec{v}_f = (0{,}625\ Ns)\hat{\imath} - (3{,}50\ Ns)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = \frac{(0{,}625\ Ns)\hat{\imath} - (3{,}50\ Ns)\hat{\jmath}}{m} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}_f = \frac{(0{,}625\ Ns)\hat{\imath}}{2{,}00\ kg} - \frac{(3{,}50\ Ns)\hat{\jmath}}{2{,}00\ kg} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_f = (0{,}312\ m/s)\hat{\imath} - (1{,}75\ m/s)\hat{\jmath}$$