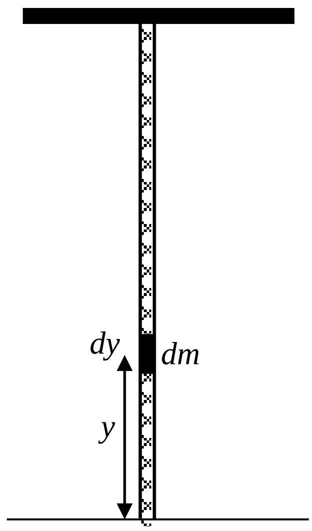
ΕΡΓΟ – ΔΥΝΑΜΗ – ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα ομογενές και εύκαμπτο σκοινί, το οποίο έχει μήκος L=12,0 m και μάζα m = 2,50 kg, κρέμεται με το ένα άκρο στηριγμένο στην οροφή μιας αίθουσας και το άλλο άκρο να ακουμπά στο δάπεδο. Το πάνω άκρο του σκοινιού ελευθερώνεται και το σκοινί πέφτει στο έδαφος. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σκοινιού, στην περίπτωση που το σκοινί καταλήξει σε ευθύγραμμη επικάθιση στο πάτωμα.

ΛΥΣΗ



Διαιρούμε το σκοινί σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dy. Αν ρ και S είναι η πυκνότητα και το εμβαδό της διατομής του σκοινιού, τότε κάθε στοιχειώδες τμήμα dy θα έχει μάζα:

$$dm = \rho\, dV = \rho S\, dy \qquad (1)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σκοινιού κατά την πτώση του στο πάτωμα (είναι το επίπεδο αναφοράς) θα είναι ίση με το συνολικό έργο W που θα παραχθεί από την πτώση στο πάτωμα όλων των στοιχειωδών τμημάτων dm. Συγκεκριμένα, το στοιχειώδες τμήμα dy το οποίο απέχει απόσταση y από το επίπεδο αναφοράς, θα παράγει έργο:

$$dW = (dm)gy \quad \Rightarrow \quad dW = \rho S g y dy \qquad (2)$$

Το συνολικό έργο που θα παραχθεί θα είναι ίσο με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών έργων dW:

$$W = \int_{y=0}^{y=L} \rho S g y dy = \rho S g \int_0^L y dy = \frac{\rho S g}{2} y^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2}\rho S g L^2 \qquad (3)$$

Αλλά, $\rho S L = m$, η μάζα του σκοινιού. Οπότε:

$$W = \frac{1}{2} m g L$$

Θεώρημα Έργου – Δυναμικής Ενέργειας: $W = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta U = -\frac{1}{2} m g L$

ΑΣΚΗΣΗ 2

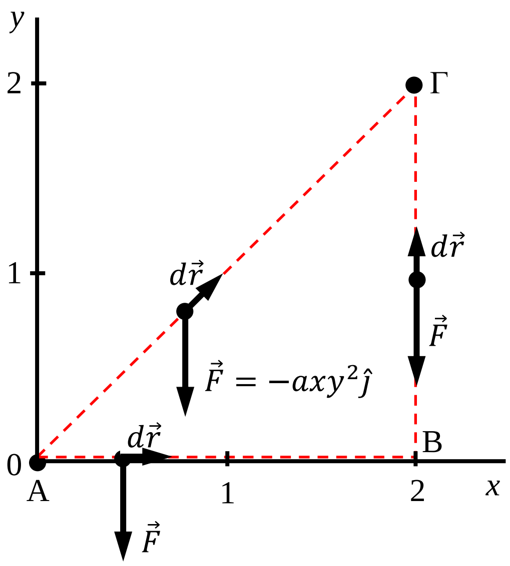
Σε ένα αντικείμενο ασκούνται πολλές δυνάμεις. Μια από αυτές τις δυνάμεις κατευθύνεται προς την κατεύθυνση $-y$ και έχει μέτρο $F = \alpha x y^2$, όπου α = 3,00 N/m^3. Να θεωρήσετε ότι το αντικείμενο μετατοπίζεται από το σημείο (0 m, 0 m) στο σημείο (x, y) = (2,00m, 2,00m).

(α) Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από τη δύναμη F αν η παραπάνω μετατόπιση γίνει κατά μήκος της ευθείας $y = x$ που συνδέει τα δυο σημεία.

(β) Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από τη δύναμη F αν η μετατόπιση από το πρώτο σημείο στο δεύτερο σημείο πραγματοποιηθεί ως εξής: Αρχικά το αντικείμενο κινείται από το σημείο (0 m, 0 m) στο σημείο (x, y) = (2,00 m, 0 m) και στη συνέχεια κινείται από το σημείο (2,00 m, 0 m) στο σημείο (x, y) = (2,00 m, 2,00 m).

(γ) Να συγκρίνετε το έργο της δύναμης F κατά μήκος των δυο διαδρομών. Μπορείτε να συμπεράνετε αν η δύναμη F είναι συντηρητική ή μη συντηρητική;

ΛΥΣΗ



(α) **Το έργο κατά μήκος της διαδρομής ΑΓ**

Διαιρούμε τη διαδρομή ΑΓ σε στοιχειώδη τμήματα *dr*. Κατά μήκος μιας τέτοιας στοιχειώδους μετατόπισης, η δύναμη F παράγει στοιχειώδες έργο:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

Το συνολικό έργο $W_{ΑΓ}$ που παράγεται ή καταναλίσκεται κατά τη μετακίνηση από τη θέση Α (αντιστοιχεί στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}_1$) στη θέση Γ θα είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της Εξίσωσης 1:

$$W_{ΑΓ} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2\hat{\jmath}) \cdot (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) \qquad (2)$$

Δίνεται όμως ότι σε κάθε σημείο της διαδρομής ΑΓ ισχύει η σχέση $y = x$. Θέτουμε στην Εξίσωση 2 όπου $x = y$, οπότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται μόνο ως προς μεταβλητή y με αρχή την y = 0 m και τέλος y = 2,00 m:

$$W_{ΑΓ} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2 dy) = -a \int_{y=0}^{y=2,00} y^3\, dy = -\frac{a}{4}\, y^4 \Big|_{y=0}^{y=2,00} = -\frac{3,00\,\frac{N}{m^3}}{4}(2,00\,m)^4 \quad \Rightarrow$$

$W_{ΑΓ} = -\,12,0$ J

(β) Το έργο κατά μήκος της διαδρομής ΑΒΓ

Κατά τη μετακίνηση από το Α στο Β το y είναι σταθερό και ίσο με y = 0. Κατά τη μετακίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ το *x* παραμένει σταθερό και ίσο με *x* =2,00m

$$W_{ABG} = W_{AB} + W_{BG} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2\hat{\jmath}) \cdot dx\hat{\imath} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2\hat{\jmath}) \cdot dy\hat{\jmath} \qquad \Rightarrow$$

$$W_{ABG} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2 dx)\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2 dy)\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} \quad \Rightarrow \quad W_{ABG} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-axy^2 dy)$$

Στην τελευταία εξίσωση, θέτουμε x = 2,00 m, βγάζουμε έξω από το ολοκλήρωμα τη σταθερά α και το x =2,00, οπότε τα όρια της ολοκλήρωσης μετασχηματίζονται από y = 0 μέχρι y = 2,00 m:

$$W_{ABG} = -2a \int_{y=0,00}^{y=2,00} y^2 dy = -2a \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{2,00} = -2\frac{3,00\ N/m^3}{3} 8,00\ m^3 \quad \Rightarrow$$

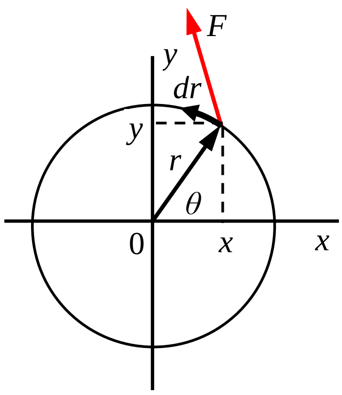
$W_{ABG} = –16,0$ J

(γ) Επειδή το έργο που καταναλίσκεται σε δυο διαφορετικές διαδρομές, οι οποίες έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος, είναι διαφορετικό, το πεδίο της συγκεκριμένης δύναμης είναι μη συντηρητικό ή στροβιλό.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα σώμα κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας *r* = 3,00 m υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (2x - y)\hat{\imath} + (x + y)\hat{\jmath}$. Ο κύκλος βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο και το κέντρο του κύκλου είναι στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Να υπολογίσετε το έργο που παράγει η συγκεκριμένη δύναμης όταν το σώμα διανύσει την περιφέρεια του κύκλου.

ΛΥΣΗ



Η δύναμη F δεν είναι σταθερή. Τόσο τη μέτρο της όσο και η κατεύθυνσή της αλλάζουν από σημείο σε σημείο πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.

Σε μια στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{r}$ πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, η δύναμη $\vec{F}$ παράγει στοιχειώδες έργο:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow$$

$$dW = [(2x - y)\hat{\imath} + (x + y)\hat{\jmath}] \cdot (dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) \quad \Rightarrow$$

$$dW = (2x - y)dx + (x + y)dy \qquad (1)$$

Για να υπολογίσουμε το έργο που παράγει ή καταναλίσκει η δύναμη *F* θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 1 κατά μήκος όλης της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς. Όμως, η εξίσωση αυτή έχει δυο μεταβλητές. Την *x* και την *y* μεταβλητή. Για να γίνει η ολοκλήρωση θα πρέπει να πρώτα να μετατρέψουμε την Εξίσωση 1 σε εξίσωση μιας μεταβλητής. Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε τις μεταβλητές *x* και *y* συναρτήσει τη γωνίας θ που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του σώματος (δηλαδή η ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς) με τον άξονα *x*. Συγκεκριμένα, από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$x = rcos\theta \quad και \quad dx = -rsin\theta\, d\theta$$

$$y = rsin\theta \quad και \quad dy = rcos\theta\, d\theta$$

Οπότε η Εξίσωση 1 γίνεται:

$$dW = (2rcos\theta - rsin\theta)(-rsin\theta)d\theta + (rcos\theta + rsin\theta)rcos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow$$

$$dW = -2r^2cos\theta sin\theta\, d\theta + r^2sin^2\theta\, d\theta + r^2cos^2\theta\, d\theta + r^2sin\theta cos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow$$

$$dW = -r^2cos\theta sin\theta\, d\theta + r^2 d\theta \quad \Rightarrow$$

$$dW = r^2cos\theta\, d(cos\theta) + r^2 d\theta \qquad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο έργο ολοκληρώνουμε την Εξίσωση 2 από τη γωνία $\theta_1 = 0$ rad έως τη γωνία $\theta_2 = 2\pi$ rad:

$$W = \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=2\pi} [r^2 cos\theta\, d(cos\theta) + r^2 d\theta] = \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=2\pi} r^2 cos\theta\, d(cos\theta) + \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=2\pi} r^2 d\theta \quad \Rightarrow$$

$$W = r^2 \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=2\pi} cos\theta\, d(cos\theta) + r^2 \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=2\pi} d\theta = r^2 \frac{1}{2} cos^2\theta \Big|_0^{2\pi} + r^2\theta \Big|_0^{2\pi} \quad \Rightarrow$$

$$W = r^2 \frac{1}{2} (cos^2 2\pi - cos^2 0) + r^2(2\pi - 0) = 0 + (3{,}00\ m)^2 6{,}28 \quad \Rightarrow$$

$$W = 56{,}5 \text{ J}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα αντικείμενο που κινείται στο επίπεδο xy υφίσταται μια συντηρητική δύναμη που περιγράφεται από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x,y,z) = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα της δύναμης F.

ΛΥΣΗ

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] = -a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) - a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = -a\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{a}{x^2}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] = -a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 - a\left(-\frac{1}{y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{a}{y^2}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] = -a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x}\right) - a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right) = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad F_z = 0$$

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} = \frac{a}{x^2}\hat{\imath} + \frac{a}{y^2}\hat{\jmath}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα αντικείμενο που κινείται στο επίπεδο xy υφίσταται μια συντηρητική δύναμη που περιγράφεται από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x,y,z) = a(x^2 + y^2) + \beta xy$. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα της δύναμης F.

ΛΥΣΗ

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x^2 + y^2) + \beta xy] = -a\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \beta\frac{\partial}{\partial x}(xy) =$$

$$= -a\left(\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial x}\right) - \beta y \frac{\partial x}{\partial x} = -a(2x + 0) - \beta y \quad \Rightarrow \quad F_x = -2ax - \beta y$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}[a(x^2 + y^2) + \beta xy] = -a\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) - \beta \frac{\partial}{\partial x}(xy) =$$

$$= -a\left(\frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) - \beta x \frac{\partial y}{\partial y} = -a(0 + 2y) - \beta x \quad \Rightarrow \quad F_y = -2ay - \beta y$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}[a(x^2 + y^2) + \beta xy] = -a\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) - \beta \frac{\partial}{\partial x}(xy) =$$

$$= -a\left(\frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) - \beta \frac{\partial xy}{\partial y} = -a(0 + 0) - \beta 0 \quad \Rightarrow \quad F_z = 0$$

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} = (-2ax - \beta y)\hat{\imath} + (-2ay - \beta y)\hat{\jmath}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Διαπιστώνετε ότι ένα ελατήριο δεν ακολουθεί το νόμο του Hook αλλά το νόμο που δίνεται από τη σχέση: $F(x) = -ax - \beta x^2$ όπου α = 70,0 N/m και β = 12,0 N/m^2.

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας U(x) για το ελατήριο αυτό στην περίπτωση που U = 0 όταν x = 0.

(β) Ένα αντικείμενο με μάζα m = 2,00 kg προσαρμόζεται στο άκρο του ελατηρίου, έλκεται κατά διάστημα x_0 = 1,00 m προς τα δεξιά πάνω σε οριζόντια ατριβή επιφάνεια και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του αντικειμένου όταν αυτό βρίσκεται σε απόσταση x = 0,50 m δεξιά από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου.

ΛΥΣΗ

(α) Εξ ορισμού:

$$U(x) = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x (-ax - \beta x^2)dx = \int_0^x (ax + \beta x^2)dx =$$

$$= a\int_0^x xdx + \beta \int_0^x x^2dx = a\frac{1}{2}x^2\Big|_0^x + \beta\frac{1}{3}x^3\Big|_0^x \quad \Rightarrow \quad U(x)$$

$$= \frac{ax^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3} \quad \Rightarrow$$

$$U(x) = \frac{\left(70{,}0\frac{N}{m}\right)x^2}{2} + \frac{\left(12{,}0\frac{N}{m^2}\right)x^3}{3} \quad \Rightarrow$$

$$U(x) = (35{,}0\ \mathrm{N/m})x^2 + (4{,}0\ \mathrm{N/m^2})x^3$$

(β) Στη θέση x_0 = 1,00 m το σύστημα ελατήριο-μάζα έχει μόνο δυναμική ενέργεια $U(x_0)$ η οποία είναι αποθηκευμένη στο τεντωμένο ελατήριο και η οποία είναι ίση με:

$U(x_0) = (35{,}0 \text{N/m})(1{,}00\text{ m})^2 + (4{,}0\text{ N/m}^2)(1{,}00\text{ m})^3 \quad \Rightarrow$

$U(x_0) = 39{,}0\text{ Nm} \qquad (1)$

Στη θέση x = 1,00 m το σύστημα ελατήριο-μάζα έχει δυναμική ενέργεια $U(x)$ η οποία είναι αποθηκευμένη στο μερικώς τεντωμένο ελατήριο και η οποία είναι ίση με:

$U(x) = (35{,}0\text{ N/m})(0{,}50\text{ m})^2 + (4{,}0\text{ N/m}^2)(0{,}50\text{ m})^3 \quad \Rightarrow$

$U(x) = 9{,}25\text{ Nm} \qquad (2)$

Επίσης, στη θέση x = 1,00 m η μάζα που είναι προσαρμοσμένη στην άκρη του ελατηρίου έχει και κινητική ενέργειας

$$K(x) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad (3)$$

όπου υ είναι η ζητούμενη ταχύτητα της μάζας m = 2,00 kg. Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας:

(*Αρχική Μηχανική Ενέργεια*) = (*Τελική Μηχανική Ενέργεια*) $\Rightarrow$

$$U(x_0) = U(x) + K(x) \quad \Rightarrow \quad 39{,}0\text{ Nm} = 9{,}25\text{ Nm} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$39{,}0\text{ Nm} - 9{,}25\text{ Nm} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}(2{,}00\text{ kg})\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad 29{,}75\text{ Nm} = (1{,}00\text{ kg})\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{29{,}75\text{ Nm}}{1{,}00\text{ kg}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{29{,}75}\, m/s \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 5{,}45\, m/s$$