ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

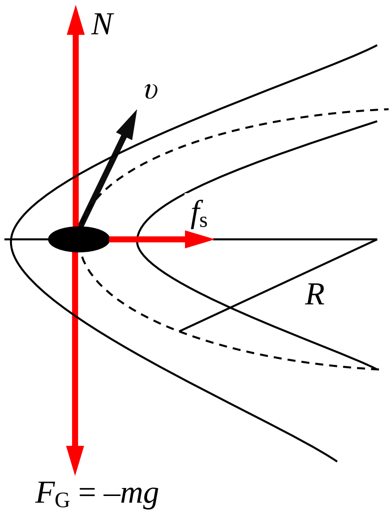
Μια οριζόντια στροφή μιας εθνικής οδού έχει ακτίνα R = 95 m. Ένα αυτοκίνητο παίρνει τη στροφή αυτή με ταχύτητα $\upsilon = 26{,}0$ m/s.

(α) Πόση πρέπει να είναι η τιμή του συντελεστή μ_s της στατικής τριβής ολίσθησης ώστε το αυτοκίνητο να μην ολισθήσει προς τα έξω;

(β) Πόση πρέπει να είναι η κλίση του οδοστρώματος ώστε το αυτοκίνητο να μη φύγει από την πορεία του ακόμα και στην περίπτωση που ο δρόμος είναι τελείως ολισθηρός; (π.χ. υπάρχουν λάδια στο οδόστρωμα).

ΛΥΣΗ

(α) **Το οδόστρωμα στη στροφή είναι οριζόντιο:**



Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο αυτοκίνητο είναι:

Το βάρος του αυτοκινήτου: $F_G = -mg$

Η κάθετη δύναμη επαφής N που ασκεί το οδόστρωμα πάνω στο αυτοκίνητο. Επειδή το οδόστρωμα είναι οριζόντιο, η δύναμη N είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση προς τα πάνω (αντίθετη του βάρους του αυτοκινήτου). Και επειδή στην κατακόρυφη διεύθυνση πρέπει $\Sigma F_y = 0$, παίρνουμε:

$$N + F_G = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \qquad (1)$$

Η στατική τριβή ολίσθησης f_s είναι η δύναμη που συγκρατεί το αυτοκίνητος πάνω στο οδόστρωμα. Η f_s ως η μόνη δύναμη που είναι παράλληλη με το οδόστρωμα πρέπει να έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και να λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη F_r:

$$f_s = F_r = \frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (2)$$

Για την ταχύτητα του αυτοκινήτου $\upsilon = 26{,}0$ m/s η μέγιστη στατική τριβή ολίσθησης $f_{s,\max}$, για να μην ολισθήσει το αυτοκίνητο δίνεται από τη σχέση:

$$f_{s,\max} = \mu_s N \quad \Rightarrow \quad f_{s,\max} = \mu_s mg \qquad (3)$$

Από τις Εξισώσεις 2 και 3 παίρνουμε:

$$\mu_s mg = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{\upsilon^2}{gR} = \frac{(26{,}0\ m/s)^2}{(9{,}80\ m/s^2)(95\ m)} \quad \Rightarrow \quad \mu_s = 0{,}73$$

(β) **Το οδόστρωμα στη στροφή έχει κλίση σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο:**

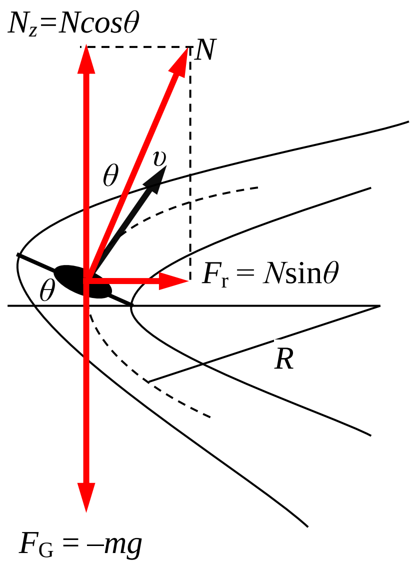
Στην περίπτωση αυτή, οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο αυτοκίνητο είναι:

Το βάρος του αυτοκινήτου: $F_G = -mg$.

Η κάθετη δύναμη επαφής N που ασκεί το οδόστρωμα πάνω στο αυτοκίνητο. Επειδή το οδόστρωμα δεν είναι οριζόντιο, σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, η δύναμη

N δεν είναι κατακόρυφη αλλά σχηματίζει γωνία θ με αυτήν. Η γωνία θ είναι το ζητούμενο στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Επειδή το οδόστρωμα είναι ολισθηρό, η στατική τριβή ολίσθησης είναι μηδέν.



Αναλύουμε την κάθετη δύναμη Ν στην κατακόρυφη συνιστώσα $N_z = N\cos\theta$ και στην οριζόντια ακτινική συνιστώσα $N_r = F_r = N\sin\theta$.

Συνθήκη ισορροπίας στο κατακόρυφο άξονα:

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N\cos\theta = mg$ ή

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad (4)$$

Η οριζόντια ακτινική συνιστώσα της δύναμης N λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη:

$$N_r = N\sin\theta = F_r = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (5)$$

Αντικαθιστούμε τη δύναμη N που υπάρχει στην Εξίσωση 5 με το αποτέλεσμα της Εξίσωσης 4 για να πάρουμε:

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\upsilon^2}{gR} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\upsilon^2}{gR} = \frac{(26{,}0\,m/s)^2}{(9{,}80\,m/s^2(95\,m)} \quad \Rightarrow$$

$$\tan\theta = 0{,}73 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36^o$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η ακτίνα ενός κατακόρυφου τροχού (μύλου) σε ένα Λούνα Παρκ είναι R = 15,0 m.

(α) Αν ο τροχός εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρονικό διάστημα Δτ = 12,0 s, να υπολογίσετε το φαινόμενο βάρος ενός επιβάτη που έχει μάζα m = 85,0 kg στο ανώτατο και στο κατώτατο σημείο της διαδρομής του τροχού.

(β) Πόσο πρέπει να είναι το χρονικό διάστημα μιας πλήρους περιστροφής του τροχού ώστε το φαινόμενο βάρος του επιβάτη στο ανώτατο σημείο της διαδρομής του τροχού να είναι ίσο με μηδέν; Στην ειδική αυτή περίπτωση, πόσο θα είναι το φαινόμενο βάρος του επιβάτη στο κατώτατο σημείο της διαδρομής του τροχού;

ΛΥΣΗ

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε τον y-άξονα να είναι κατακόρυφος με θετική φορά προς τα πάνω.

(α) Στο ανώτατο και στο κατώτατο σημείο του μύλου οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω τον επιβάτη είναι:

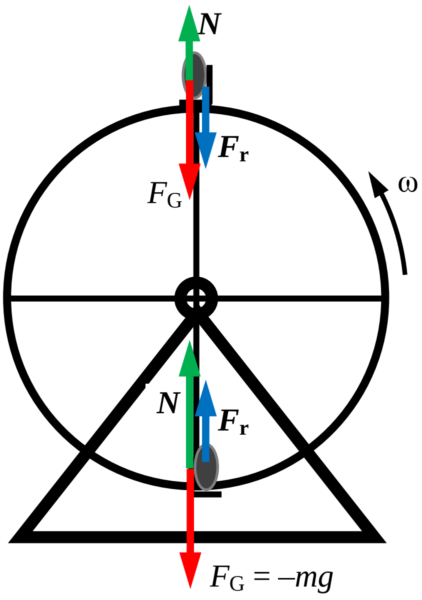
Το βάρος του, το οποίο έχει φορά προς τα κάτω: $F_G = -mg$.

Η κάθετη δύναμη επαφής N την οποία ασκεί το κάθισμα πάνω στον επιβάτη. Αν ο επιβάτης καθότανε πάνω σε ζυγό, τότε ο ζυγός αυτός θα μετρούσε τη δύναμη N. Και στις δυο περιπτώσεις (επάνω και κάτω σημείο τροχού), η συνισταμένη των δυνάμεων

F_G και N θα είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη F_r που ασκείται πάνω στον επιβάτη καθώς ο μύλος περιστρέφεται:

$$\vec{N} + \vec{F}_G = \vec{F}_r \qquad (1)$$

όπου $F_r = m\omega^2 R = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}R \qquad (2)$



Στην Εξίσωση 2 οι ποσότητες ω και T είναι η γωνιακή ταχύτητα και η περίοδος περιστροφής του μύλου, αντίστοιχα. Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι στο ανώτατο σημείου του μύλου η κεντρομόλος δύναμη F_r έχει φορά προς τα κάτω, δηλαδή είναι αρνητική, ενώ στο κατώτατο σημείο του μύλου η φορά της κεντρομόλου δύναμης είναι προς τα πάνω, δηλαδή είναι θετική. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις έχουμε:

Στο ανώτατο σημείο του μύλου:

Στη θέση αυτή η Εξίσωση 1 γράφεται:

$$N - F_G = -F_r \quad \Rightarrow \quad N = F_G - F_r \quad \Rightarrow \quad N = mg - m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \Rightarrow$$

$$N = m\left(g - \frac{4\pi^2}{T^2}R\right) \qquad (3)$$

$$N = (85{,}0\,kg)\left((9{,}80\frac{m}{s} - \frac{4(3{,}14)^2}{(12{,}0\,s)^2}(15{,}0\,m)\right) \quad \Rightarrow \quad N = 484\,N$$

Στο κατώτατο σημείο του μύλου:

Στη θέση αυτή η Εξίσωση 1 γράφεται:

$$N - F_G = F_r \quad \Rightarrow \quad N = F_G + F_r \quad \Rightarrow \quad N = mg + m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \Rightarrow$$

$$N = m\left(g + \frac{4\pi^2}{T^2}R\right) \qquad (4)$$

$$N = (85{,}0\,kg)\left((9{,}80\frac{m}{s} + \frac{4(3{,}14)^2}{(12{,}0\,s)^2}(15{,}0\,m)\right) \quad \Rightarrow \quad N = 1180\,N$$

Το πραγματικό βάρος του επιβάτη είναι $F_G = mg$ =(85,0 kg)(9,80 m/s^2) = 833 N

(β) Από την Εξίσωση 3 προκύπτει ότι όσο μικραίνει η περίοδος (δηλαδή, όσο μεγαλώνει η γωνιακή ταχύτητα) του μύλου τόσο μικραίνει το φαινομενικό βάρος N του επιβάτη του μύλου. Κατά συνέπεια, θα υπάρχει μια κρίσιμη περίοδος T_c για την οποία το φαινομενικό βάρος του επιβάτη του μύλου θα είναι ίσο με μηδέν (N = 0). Στην περίπτωση αυτή, η Εξίσωση 3 γίνεται:

$$0 = m\left(g - \frac{4\pi^2}{T_c^2}R\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T_c^2}R = g \quad \Rightarrow \quad T_c^2 = \frac{4\pi^2 R}{g} \quad \Rightarrow \quad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \Rightarrow$$

$$T_c = 2\pi\sqrt{\frac{15{,}0\ \mathrm{m}}{9{,}80\ \mathrm{m/s^2}}} \quad \Rightarrow \quad T_c = 7{,}77\ \mathrm{s}$$

Όταν ο μύλος περιστρέφεται με περίοδο T_c = 7,77 s, τότε σύμφωνα με την Εξίσωση 4, το φαινομενικό βάρος του επιβάτη θα είναι:

$$N_c = m\left(g + \frac{4\pi^2}{T_c^2}R\right) = (85{,}0\ kg)\left(\left(9{,}80\frac{m}{s^2}\right) + \frac{4(3{,}14)^2}{(7{,}77\ s)^2}(15{,}0\ m)\right) \quad \Rightarrow$$

$$N_c = 1670\ N$$