# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Η γωνία που διαγράφει ένας περιστρεφόμενος τροχός συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $\theta(\mathrm{t}) = \gamma t + \beta t^3$, όπου $\gamma$ = 2,50 rad/s και $\beta$ = 0,0400 rad/s$^3$.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα και τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού συναρτήσει του χρόνου.

(β) Πόση είναι η αρχική τιμή της γωνιακής ταχύτητας;

(γ) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t = 10,0 s καθώς και τη μέση γωνιακή ταχύτητα $\omega_{avg}$ στο χρονικό διάστημα από t = 0 s έως t = 10,0 s.

## ΛΥΣΗ

(α) Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(\gamma t + \beta t^3)}{dt} = \dfrac{d(\gamma t)}{dt} + \dfrac{d(\beta t^3)}{dt} = \gamma \dfrac{dt}{dt} + \beta \dfrac{dt^3}{dt} \quad \Rightarrow$

$$\omega = \gamma + 3\beta t^2 \qquad (1)$$

$$\omega = \left(2{,}50 \frac{rad}{s}\right) + 3\left(0{,}0400 \frac{rad}{s^3}\right) t^2 \ \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \left(2{,}50 \frac{rad}{s}\right) + \left(0{,}120 \frac{rad}{s^3}\right) t^2 \qquad (2)$$

(β) Η αρχική τιμή της γωνιακής ταχύτητας προκύπτει από την Εξίσωση 2 αν σε αυτή θέσουμε t = 0 s. Οπότε:

$$\omega_0 = 2{,}50 \frac{rad}{s}$$

$(\gamma)$ Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha_\omega = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d(\gamma + 3\beta t^2)}{dt} = \dfrac{d\gamma}{dt} + 3\beta \dfrac{dt^2}{dt} \quad \Rightarrow$

$$\alpha_\omega = 0 + 6\beta t \quad \Rightarrow \quad \alpha_\omega = 6\beta t \qquad (3)$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση 2, τη χρονική στιγμή t = 10,0 s, η στιγμιαία τιμή της γωνιακής ταχύτητας του τροχού θα είναι ίση με:

$$\omega(10{,}0s) = \left(2{,}50 \frac{rad}{s}\right) + \left(0{,}120 \frac{rad}{s^3}\right)(10{,}0)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega(10{,}0s) = 14{,}5 \frac{rad}{s}$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση 3, τη χρονική στιγμή t = 10,0 s, η στιγμιαία τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού θα είναι ίση με:

$$\alpha_\omega(10{,}0s) = 6\left(0{,}040 \frac{rad}{s^3}\right)(10{,}0\ s) \quad \Rightarrow \quad \alpha_\omega(10{,}0s) = 2{,}40 \frac{rad}{s^2}$$

Εξ ορισμού, η μέση τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$, η οποία συμβολίζεται με $f_{avg}$ ή <f> ή $\bar{f}$, σε ένα διάστημα $\Delta x = x_2 - x_1$ του πεδίου τιμών της δίνεται από την σχέση:

$$f_{\mathrm{avg}} = \langle f \rangle = \bar{f} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \qquad (4)$$

Η μέση τιμή της γωνιακής ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt = 10,0 s θα προκύψει αν στην Εξίσωση 4 η συνάρτηση $f(x)$ αντικατασταθεί με τη συνάρτηση ω(t), (βλέπε Εξίσωση 3). Συγκεκριμένα:

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} (\gamma + 3\beta t^2)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \gamma dt + \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} 3\beta t^2 dt \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\gamma}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} dt + \frac{3\beta}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{\gamma}{\Delta t}\, t\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \frac{3\beta}{\Delta t}\frac{1}{3}\, t^3\Bigg|_{t_2}^{t_1} = \frac{\gamma}{\Delta t}(t_2 - t_1) + \frac{\beta}{\Delta t}(t_2 - t_1)^3$$

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\gamma}{\Delta t}\Delta t + \frac{\beta}{\Delta t}(\Delta t)^3 \quad \Rightarrow \qquad \omega_{\text{avg}} = \gamma + \beta(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{avg}} = \left(2{,}50\frac{rad}{s}\right) + \left(0{,}0400\frac{rad}{s^2}\right)(10{,}0\ s)^2 \quad \Rightarrow \qquad f_{\text{avg}} = 6{,}50\ rad/s$$

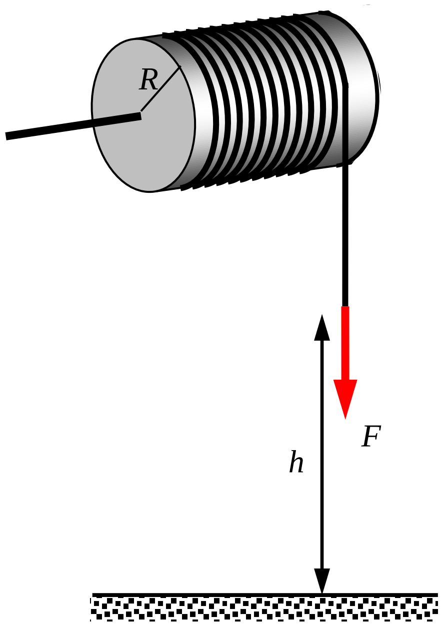
**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Ένα αβαρές και εύκαμπτο σκοινί είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από ένα συμπαγή κύλινδρο ο οποίος έχει μάζα $M$ = 4,00 kg και ακτίνα $R$ = 0,250 m. O κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του χωρίς τριβές.

(α) Το ελεύθερο άκρο του σκοινιού έλκεται με σταθερή δύναμη $F$ = 125 N κατά ένα διάστημα $h$ = 5,00 m. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου όταν το άκρο του σκοινιού στο τέλος του διαστήματος $h$.

(β) Στο ελεύθερο άκρο του σκοινιού αναρτάται ένα σώμα το οποίο έχει βάρος $F_G$ = 125 N. Το σύστημα κύλινδρος – σώμα αφήνεται ελεύθερο να πέσει στο πάτωμα από ένα ύψος $h$ = 5,00 m. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος καθώς και τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που το σώμα προσκρούει στο πάτωμα.

**ΛΥΣΗ**




(α) Στην κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου του σκοινιού κατά διάστημα $h$, η δύναμη $F$ παράγει έργο το οποίο είναι ίσο με:

$W = Fh$ (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου περιστροφικής κινητικής ενέργειας, το έργο αυτό μετατρέπετε σε περιστροφική κινητική ενέργεια $K_\omega$, η οποία είναι ίση με:

$K_\omega = \frac{1}{2} I\omega^2$ (2)

όπου ω και $I$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, αντίστοιχα.

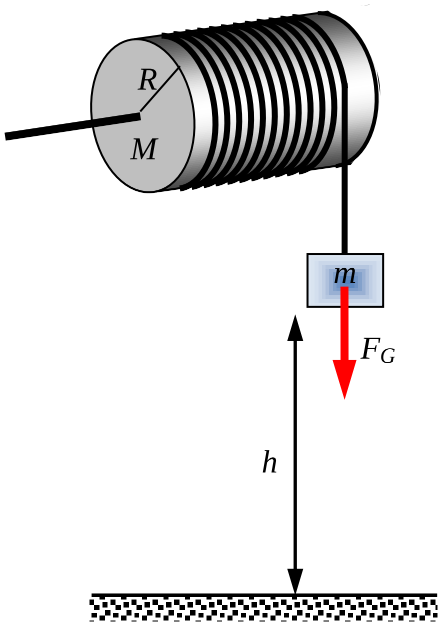
$I = \frac{1}{2}MR^2$ (3)

Οπότε, από τις Εξισώσεις 1 και 2 και 3 έχουμε:

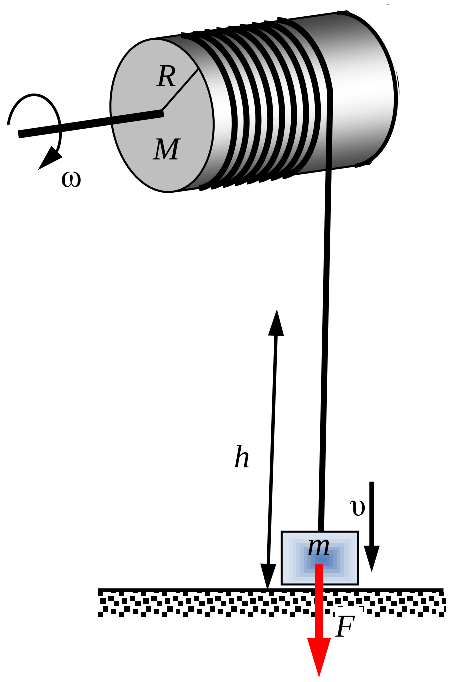
$$W = K_\omega \quad \Rightarrow \quad Fh = \frac{1}{2}\, I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2Fh}{I}} = \sqrt{\frac{2Fh}{\frac{1}{2}MR^2}} = \sqrt{\frac{4Fh}{MR^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4(125\,N)(5{,}00\,m)}{(4{,}00\,kg)(0{,}250\,m^2)}} = 1{,}00 \times 10^2 \;\; rad/s$$

(β) Αρχική Κατάσταση




Τελική Κατάσταση




Η μάζα $m$ του σώματος που αναρτάται στο άκρο του σκοινιού είναι τέτοια ώστε:

$$F_G = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F_G}{g} = \frac{125N}{9{,}80m/s^2} = 12{,}7\;kg \qquad (1)$$

| | **Αρχική κατάσταση** | **Τελική Κατάσταση** |
|---|---|---|
| Δυναμική ενέργεια σώματος: | $U_1 = mgh = F_G h$ | $U_2 = 0$ |
| Κινητική ενέργεια σώματος: | $K_1 = 0$ | $K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ |
| Περιστροφική ενέργεια κυλίνδρου: | $K_{\omega 1} = 0$ | $K_{\omega 2} = \frac{1}{2}I\omega^2$ |
| Μηχανική ενέργεια συστήματος: | $E_1 = U_{\,1} + K_1 + K_{\omega 1}$ | $E_2 = U_{\,1} + K_1 + K_{\omega 1}$ |
| | $E_1 = F_G h$ | $E_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ |

Αρχή διατήρησης ενέργειας: $E_1 = E_2 \quad \Rightarrow$

$$F_G h = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (4)$$

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου δίνεται από την Εξίσωση 3. Επειδή το σκοινί είναι μη εκτατό, όλα τα σημεία που βρίσκονται κατά μήκος του σκοινιού έχουν την ίδια ταχύτητα υ.

Ακόμη κατά σημεία του σκοινιού που είναι τυλιγμένα στον κύλινδρο έχουν την ίδια ταχύτητα υ. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\upsilon = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\upsilon}{R} \qquad (5)$$

Η Εξίσωση 4, σε συνδυασμό με τις Εξισώσεις 3 και 5, δίνει:

$$F_G h = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{4} M\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$F_G h = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{4} M\upsilon^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2F_G h}{\left(m + \frac{M}{2}\right)}} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(125\,N)(5{,}00\,m)h}{\left(12{,}8\,kg + \frac{4{,}00\,kg}{2}\right)}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 9{,}19\,m/s$$

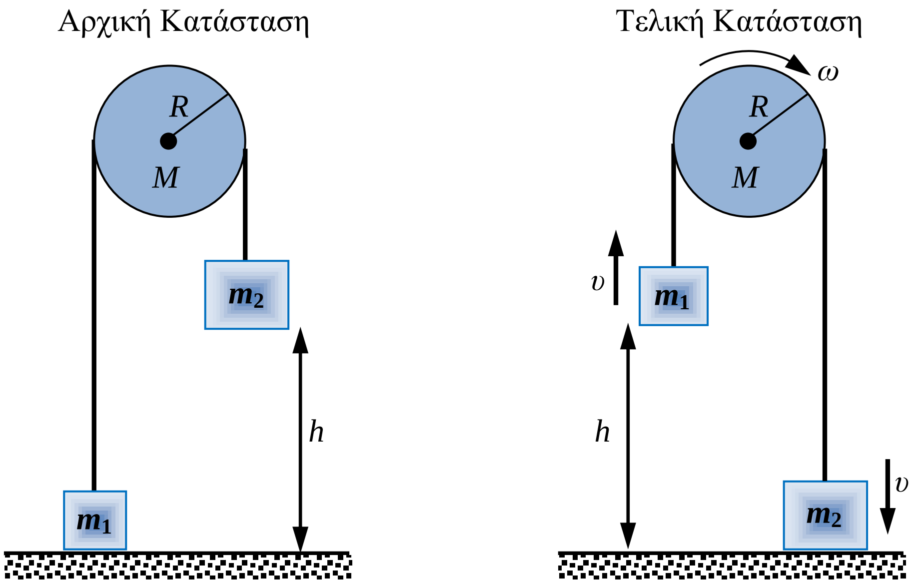
Από την Εξίσωση 5 υπολογίζουμε και τη γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου κυλίνδρου:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{9{,}19\,m/s}{0{,}250\,kg} \quad \Rightarrow \quad \omega = 36{,}8\,rad/s$$

## ΑΣΚΗΣΗ 3

Δυο σώματα με μάζες $m_1$ = 8,5 kg και $m_2$ = 15,5 kg συνδέονται με αβαρές σκοινί το οποίο διέρχεται από τροχαλία μάζας $M$ = 2,50 kg και ακτίνας R = 20,0 cm έτσι ώστε η μάζα $m_1$ να είναι σε επαφή με οριζόντιο έδαφος και η μάζα $m_2$ να βρίσκεται σε ύψος h = 2,50 m πάνω από το έδαφος. Η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρο από οριζόντιο άξονα. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία το σώμα με μάζα $m_2$ θα προσκρούσει στο έδαφος.

## ΛΥΣΗ



| | Αρχική κατάσταση | Τελική Κατάσταση |
|---|---|---|
| Δυναμική ενέργεια μάζας $m_1$: | $U_1 = 0$ | $U_1' = m_1 gh$ |
| Κινητική ενέργεια μάζας $m_1$: | $K_1 = 0$ | $K_1' = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2$ |
| Δυναμική ενέργεια μάζας $m_2$: | $U_2 = m_2 gh$ | $U_2' = 0$ |
| Κινητική ενέργεια μάζας $m_2$: | $K_2 = 0$ | $K_2' = \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2$ |
| Περιστροφική ενέργεια τροχαλίας: | $K_\omega = 0$ | $K_\omega' = \frac{1}{2} I \omega^2$ |

Μηχανική ενέργεια συστήματος: $E = U_{\ 1} + K_1 + U_2 + K_{2+} K_{\omega 1}$

$$E' = U_1' + K_1' + U_2' + K_2' + K_\omega'$$

$$E = m_2 gh$$

$$E' = m_1 gh + \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Αρχή διατήρησης ενέργειας: $E = E' \quad \Rightarrow$

$$m_2 gh = m_1 gh + \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (1)$$

Η τροχαλία είναι ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R, οπότε η ροπή αδράνειας αυτής είναι:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \qquad (2)$$

Επειδή το σκοινί είναι μη εκτατό, όλα τα σημεία που βρίσκονται κατά μήκος του σκοινιού έχουν την ίδια ταχύτητα υ. Ακόμη κατά σημεία του σκοινιού που διέρχονται από την τροχαλία έχουν την ίδια ταχύτητα υ. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\upsilon = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\upsilon}{R} \qquad (3)$$

Η Εξίσωση 1,σε συνδυασμό με τις Εξισώσεις 2 και 3, δίνει:

$$m_2 gh - m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\upsilon}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M \upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$(m_2 - m_1) gh = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M\right) \upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = \frac{2(m_2 - m_1) gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1) gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}} = \sqrt{\frac{2(15{,}5kg - 8{,}5kg)}{15{,}5kg + 8{,}5kg + \frac{2{,}50kg}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 0{,}554\ m/s$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Πάνω σε ένα στερεό σώμα εφαρμόζεται η δύναμη: $\vec{F} = (4{,}00\ N)\hat{\imath} - (5{,}00\ N)\hat{\jmath}$. Αν το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης $F$ ως προς συγκεκριμένο σημείο αναφοράς είναι: $\vec{r} = (-0{,}300\ m)\hat{\imath} + (0{,}500\ m)\hat{\jmath}$, να υπολογίσετε το διάνυσμα της ροπής της δύναμης F ως προς το συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.

**ΛΥΣΗ**

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = [(-0{,}300\ \mathrm{m})\hat{\imath} + (0{,}500\ \mathrm{m})\hat{\jmath}] \times [(4{,}00\ \mathrm{N})\hat{\imath} - (5{,}00\ \mathrm{N})\hat{\jmath}] =$$
$$= (-0{,}300\ \mathrm{m})\hat{\imath} \times (4{,}00\ \mathrm{N})\hat{\imath} - (-0{,}300\ \mathrm{m})\hat{\imath} \times (5{,}00\ \mathrm{N})\hat{\jmath} +$$
$$+(0{,}500\ \mathrm{m})\hat{\jmath} \times (4{,}00\ \mathrm{N})\hat{\imath} - (0{,}500\ \mathrm{m})\hat{\jmath} \times (5{,}00\ \mathrm{N})\hat{\jmath} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = (-0{,}300\ \mathrm{m})(4{,}00\ \mathrm{N})(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) - (0{,}300\ \mathrm{m})(5{,}00\ \mathrm{N})(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) +$$
$$+(0{,}500\ \mathrm{m})(4{,}00\ \mathrm{N})(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) - (0{,}500\ \mathrm{m})(5{,}00\ \mathrm{N})(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath})$$

**Εξωτερικά γινόμενα μεταξύ των μοναδιαίων $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ και $\hat{k}$**:

$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \vec{0}$

$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \vec{0}$

$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$

Οπότε το διάνυσμα της ροπής της δύναμης F ως προς το συγκεκριμένο σημείο θα είναι ίσο με:

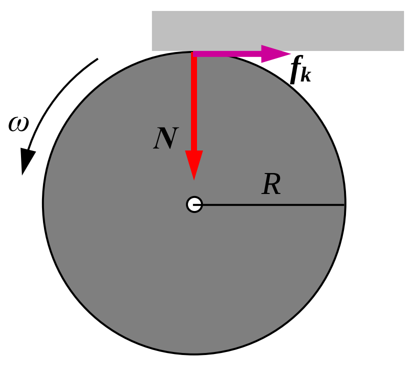
$$\vec{\tau} = (-1{,}20\ \mathrm{Nm})\vec{0} - (-1{,}50\ \mathrm{Nm})\hat{k} + (2{,}00\ \mathrm{Nm})(-\hat{k}) - (2{,}50\ \mathrm{Nm})\vec{0} = 3{,}50\ \hat{k}$$

$$\vec{\tau} = (3{,}50\ \mathrm{Nm})\ \hat{k}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Ένας τροχός ακονίσματος ειδικών προδιαγραφών έχει ακτίνα $R$ = 0,300 m και μάζα $m$ = 25,0 kg. Ο τροχός αυτό περιστρέφεται με συχνότητα $f$ = 900 rev/min και τροχίζει ένα αντικείμενο το οποίο ασκεί στην περιφέρειά του κάθετη δύναμη $N$ = 160 N. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ τροχού και αντικειμένου είναι $\mu_k$ = 0,22. Τη χρονική στιγμή $t$ = 0 s γίνεται διακοπή του ηλεκτρικού ρεύματος. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που απαιτείται μέχρι ο τροχό να ακινητοποιηθεί.

**ΛΥΣΗ**




Η δύναμη επαφής $N$ μεταξύ τροχού και αντικειμένου προκαλεί την τριβή $f_k$ η οποία αντιστέκεται στην περιστροφή του τροχού. Δεδομένου ότι ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ τροχού και αντικειμένου είναι $\mu_k$, η τριβή $f_k$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_k = \mu_k N \qquad (1)$$

Η τριβή αυτή είναι εφαπτομενική στην περιφέρεια του τροχού και προκαλεί ροπή τ ως προς τον άξονα του τροχού η οποία τείνει να στρέψει τον τροχό σε φορά αντίθετη με τη φορά περιστροφής του. Το Σχήμα της άσκησης, ο τροχός περιστρέφεται με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού (ccw) που σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι θετική. Στην περίπτωση αυτή, η ροπή τ που προκαλείται από την τριβή θα είναι αρνητική:

$$\tau = -f_k R = -\mu_k N R \qquad (2)$$

Από το νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή στερεού σώματος, και ειδικότερα για την περιστροφή ενός σώματος στο οποίο ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας του σώματος, όπως στην περίπτωση του τροχού, η ροπή τ, η ροπή αδράνειας $I$ και η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\omega$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\tau = I\alpha_\omega \quad \Rightarrow \quad \tau = I\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau\, dt = I\, d\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \tau\, dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\, d\omega \quad \Rightarrow$$

$$\tau \int_{t_1}^{t_2} dt = I \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \quad \Rightarrow \quad \tau\,(t_2 - t_1) = I(\omega_2 - \omega_1) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{I(\omega_2 - \omega_1)}{\tau} \qquad (3)$$

όπου $I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (4)$

$$\kappa\alpha\iota \quad \omega_1 = 2\pi f = 6{,}28\left(900\,\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{min}}\,\frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 94{,}2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \qquad (5)$$

Το $\Delta t$ είναι το ζητούμενο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ο τροχός ($\omega_2 = 0$). Από τις Εξισώσεις 2, 3, 4 και 5 καθώς και από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\Delta t = \frac{I(\omega_2 - \omega_1)}{\tau} = \frac{\frac{1}{2}MR^2(0 - \omega_1)}{-\mu_k N R} = \frac{MR\omega_1}{\mu_k N} = \frac{(25{,}0\mathrm{kg})(0{,}300\mathrm{m})(94{,}2\mathrm{rad/s})}{2(0{,}22)(160\ \mathrm{N})} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = 10{,}0\ s$$