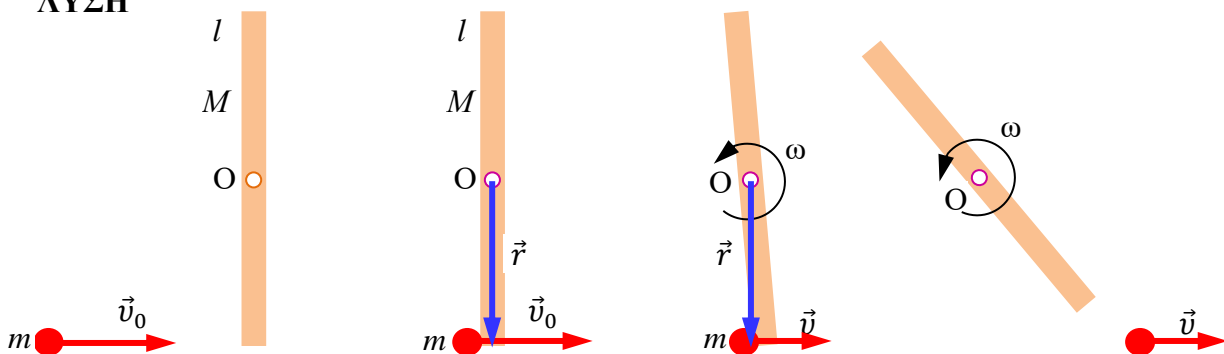


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ – ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Πάνω στην οριζόντια επιφάνεια μιας ατρίβους επιφάνειας υπάρχει ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους l η οποία δύναται να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από κέντρο της. Ένας δίσκος μάζας m (και ακτίνας $r \ll l$) κινείται με ταχύτητα v_0 και κατευθύνεται προς το ένα άκρο της ράβδου, έτσι ώστε ο δίσκος να προσκρούσει κάθετα πάνω στη ράβδο. Αν κρούση είναι τελείως ελαστική, τότε να βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου καθώς και την ταχύτητα v του δίσκου μετά την κρούση συναρτήσει του μήκους l της ράβδου, της αρχικής ταχύτητας v_0 του δίσκου και του λόγου $\alpha = M/m$. Να διερευνήσετε τα αποτελέσματα ως προς την τιμή της παραμέτρου α .

ΛΥΣΗ



Παίρνουμε το κέντρο O της ράβδου ως το σημείο αναφοράς. Επειδή θεωρήσαμε την ακτίνα του δίσκου πολλές φορές μικρότερη από το μήκος της ράβδου, τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν την κρούση του δίσκου με το άκρο της ράβδου, καθώς και τη χρονική στιγμή ακριβώς μετά την κρούση, το διάνυσμα θέσης \vec{r} της μάζας m είναι κάθετο με τα διανύσματα \vec{v}_0 και \vec{v} της ταχύτητας της μάζας πριν και μετά την κρούση, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό της στροφορμής ως προς το κέντρο της ράβδου:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \Rightarrow L = r m v = \frac{l}{2} m v \quad (1)$$

	Αρχική κατάσταση	Τελική Κατάσταση
Στροφορμή δίσκου ως προς κέντρο ράβδου:	$L_{\delta 0} = \frac{l}{2} m v_0$	$L_{\delta} = \frac{l}{2} m v$
Στροφορμή ράβδου ως προς κέντρο της:	$L_{\rho 0} = 0$	$L_{\rho} = I \omega$
Ολική στροφορμή συστήματος:	$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\delta 0} + L_{\rho 0}$	$L_{\tau\epsilon\lambda} = L_{\delta} + L_{\rho}$
	$L_{\alpha\rho\chi} = \frac{l}{2} m v_0$	$L_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{l}{2} m v + I \omega$
Κινητική ενέργεια δίσκου:	$K_{\delta 0} = \frac{1}{2} m v_0^2$	$K_{\delta} = \frac{1}{2} m v^2$
Περιστροφική ενέργεια ράβδου:	$K_{\rho 0} = 0$	$K_{\rho} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Μηχανική ενέργεια συστήματος:	$E_{\alpha\rho\chi} = K_{\delta 0} + K_{\rho 0}$	$K_{\tau\epsilon\lambda} = K_{\delta} + K_{\rho}$
	$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m v_0^2$	$E_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\text{Διατήρηση της στροφορμής: } L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{l}{2}mv_0 = \frac{l}{2}mv + I\omega \quad (2)$$

$$\text{Αρχή διατήρησης ενέργειας: } E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3)$$

$$\text{όπου } I = \frac{1}{12}Ml^2 \quad (4)$$

είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

Οι Εξισώσεις 2 και 3 σε συνδυασμό με την Εξίσωση 4, και με δεδομένο ότι $(M/m) = \alpha$, γράφονται:

$$\frac{l}{2}mv_0 = \frac{l}{2}mv + \frac{1}{12}aml^2\omega \Rightarrow v_0 = v + \frac{1}{6}al\omega \Rightarrow v_0 - v = \frac{1}{6}al\omega \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12}aml^2\omega^2 \Rightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{1}{12}al^2\omega^2 \Rightarrow v_0^2 - v^2 = \frac{1}{12}al^2\omega^2 \quad (5)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις Εξισώσεις 5 και 4, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{v_0^2 - v^2}{v_0 - v} = \frac{\frac{1}{12}al^2\omega^2}{\frac{1}{6}al\omega} \Rightarrow \frac{(v_0 - v)(v_0 + v)}{v_0 - v} = \frac{1}{2}l\omega \Rightarrow v_0 + v = \frac{1}{2}l\omega \quad (6)$$

Η ταχύτητα v του δίσκου και η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου, μετά την κρούση, βρίσκονται από τη λύση του συστήματος των Εξισώσεων 4 και 6. Συγκεκριμένα, προσθέτοντας κατά μέλη τις Εξισώσεις 4 και 6 παίρνουμε:

$$2v_0 = \frac{1}{6}al\omega + \frac{1}{2}l\omega = \left(\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}\right)l\omega = \left(\frac{\alpha + 3}{6}\right)l\omega \Rightarrow \omega = \frac{12v_0}{(\alpha + 3)l} \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε την γωνιακή ταχύτητα ω , που βρήκαμε, στην Εξίσωση 6 για να βρούμε:

$$v_0 + v = \frac{1}{2}l \frac{12v_0}{(\alpha + 3)l} = \frac{6v_0}{\alpha + 3} \Rightarrow v = \frac{6v_0}{\alpha + 3} - v_0 = \frac{6v_0 - (\alpha + 3)v_0}{\alpha + 3} \Rightarrow$$

$$v = \frac{3v_0 - \alpha v_0}{\alpha + 3} \Rightarrow v = \frac{3 - \alpha}{3 + \alpha}v_0 \quad (8)$$

Διερεύνηση των αποτελεσμάτων ως προς την παράμετρο $\alpha = M/m$

Πρώτη περίπτωση, $\alpha < 3$:

Μετά την κρούση, ο δίσκος συνεχίζει να κινείται χωρίς να αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησής του.

Δεύτερη περίπτωση, $\alpha = 1$ (δίσκος και ράβδος έχουν την ίδια μάζα):

Στην περίπτωση αυτή, οι Εξισώσεις 7 και 8 δίνουν:

$$\omega = \frac{12v_0}{(1 + 3)l} \Rightarrow \omega = \frac{3v_0}{l}$$

$$v = \frac{3-1}{3+1}v_0 \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

Τρίτη περίπτωση, $a = 3$ (η ράβδος έχει τριπλάσια μάζα από το δίσκο):

$$\omega = \frac{12v_0}{(3+3)l} \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{2l}$$

$$v = \frac{3-3}{3+a}v_0 \Rightarrow v = 0$$

Ο δίσκος ακινητοποιείται.

Τέταρτη περίπτωση, $a > 3$:

Από την Εξίσωση 8 προκύπτει ότι $v < 0$. Στην περίπτωση αυτή, μετά την κρούση, ο δίσκος ανακλάται από τη ράβδο και συνεχίζει να κινείται με κατεύθυνση που είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας v_0 .

ΑΣΚΗΣΗ 2

(Πραγματικό γεγονός) Σε μια διασταύρωση δυο δρόμων ο ένας από τους δρόμους αυτούς έχει STOP. Ένα αυτοκίνητο ΙΧ κινείται στο δρόμο με το STOP, και καθώς αυτό περνούσε τη διασταύρωση, μια μηχανή που κινούταν στον άλλο δρόμο της διασταύρωσης προσέκρουσε κάθετα στο μπροστινό τροχό του αυτοκινήτου. Στο σημείο της σύγκρουσης κατέφθασε η τροχαία για να καταγράψει το γεγονός και να συντάξει σχετική έκθεση. Από την έκθεση αυτή προκύπτουν τα εξής στοιχεία:

- Δεν βρέθηκαν σημάδια ολίσθησης πάνω στην άσφαλο, τόσο της μηχανής όσο και του αυτοκινήτου.
- Το αυτοκίνητο είχε στραφεί σε γωνία $\varphi = 60^\circ$ ως προς την αρχική κατεύθυνση του δρόμου που κινούνταν.

Οι δυο οδηγοί κατέθεσαν στον τροχονόμο τα εξής:

Οδηγός ΙΧ: Σταμάτησα στο STOP, έλεγξα τη διασταύρωση και προσπάθησα να περάσω τη διασταύρωση με την ελάχιστη ταχύτητα. Η μηχανή κινούνταν με μεγάλη ταχύτητα, δεν πρόλαβα να αντιδράσω με αποτέλεσμα να γίνει η σύγκρουση.

Οδηγός Μηχανής: Πήγαινα με ταχύτητα 40 km/h όταν ξαφνικά μπροστά μου βρέθηκε το ΙΧ αυτοκίνητο το οποίο παραβίασε το STOP χωρίς να σταματήσει. Δεν πρόλαβα να πατήσω φρένο με αποτέλεσμα να γίνει η σύγκρουση.

Αν ο οδηγός του ΙΧ έχει δίκιο τότε ο οδηγός της μηχανής είναι συνυπαίτιος για το ατύχημα με ότι αυτό συνεπάγεται για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Αν ο οδηγός της μηχανής έχει δίκιο τότε ο οδηγός του ΙΧ είναι αποκλειστικά υπεύθυνος για το ατύχημα. Εσείς, ως πραγματογνώμονας μηχανικός, κληθήκατε να διαλευκάνετε τις συνθήκες του ατυχήματος. Για το σκοπό αυτό ζητήσατε και πήρατε τις εξής πληροφορίες:

Μάζα αυτοκινήτου μαζί με τον οδηγό: $M = 1280$ kg με το 60% του βάρους του αυτοκινήτου να ασκείται στους μπροστινούς τροχούς. Απόσταση τροχών (εμπρός με πίσω): $L = 2,00$ m.

Μάζα μηχανής μαζί με το οδηγό: $m = 200$ kg.

Συντελεστής κινητικής τριβής: $\mu_k = 0,72$

Με βάση τα στοιχεία που έχετε στη διάθεσή σας, ποια θα είναι η γνωμάτευση σας;

ΛΥΣΗ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΓΚΡΟΥΣΗΣ:

1. Δεν υπήρξαν φρεναρίσματα
2. Δεν υπήρξε παράλληλη μετατόπιση του ΙΧ αυτοκινήτου
3. Ο οδηγός της δίκυκλης μηχανής παρέμεινε πάνω στη μηχανή
4. Η μηχανή και το ΙΧ αυτοκίνητο ήταν σε επαφή καθ' όλη τη διάρκεια της σύγκρουσης
5. Η διεύθυνση κίνησης της μηχανής ήταν κάθετη στη διεύθυνση κίνησης του ΙΧ αυτοκινήτου
6. Η μηχανή προσέκρουσε στο δεξιό εμπρός τροχό του ΙΧ αυτοκινήτου
7. Μετά τη σύγκρουση το ΙΧ αυτοκίνητο περιστράφηκε κατά γωνία: $\phi = \pi/3 = 60^\circ$

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΚΥΚΛΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ ΚΑΙ ΙΧ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ

8. Μάζα μηχανής μαζί με αναβάτη: $m = 190 \text{ kg}$
9. Μάζα ΙΧ αυτοκινήτου με οδηγό: $M = 1100 \text{ kg}$
10. Απόσταση εμπρός τροχών με πίσω τροχούς: $l_1 = 2,3 \text{ m}$
11. Απόσταση των δυο πίσω τροχούς: $l_2 = 1,4 \text{ m}$
12. Η μάζα του ΙΧ αυτοκινήτου κατανέμεται σε μάζα $M_1 = 0,6M$ στους εμπρός τροχούς και σε μάζα $M_2 = 0,4M$ στους πίσω τροχούς.
13. Το ΙΧ αυτοκίνητο θεωρείται ως μια ράβδο μήκους l_1 και μάζας M

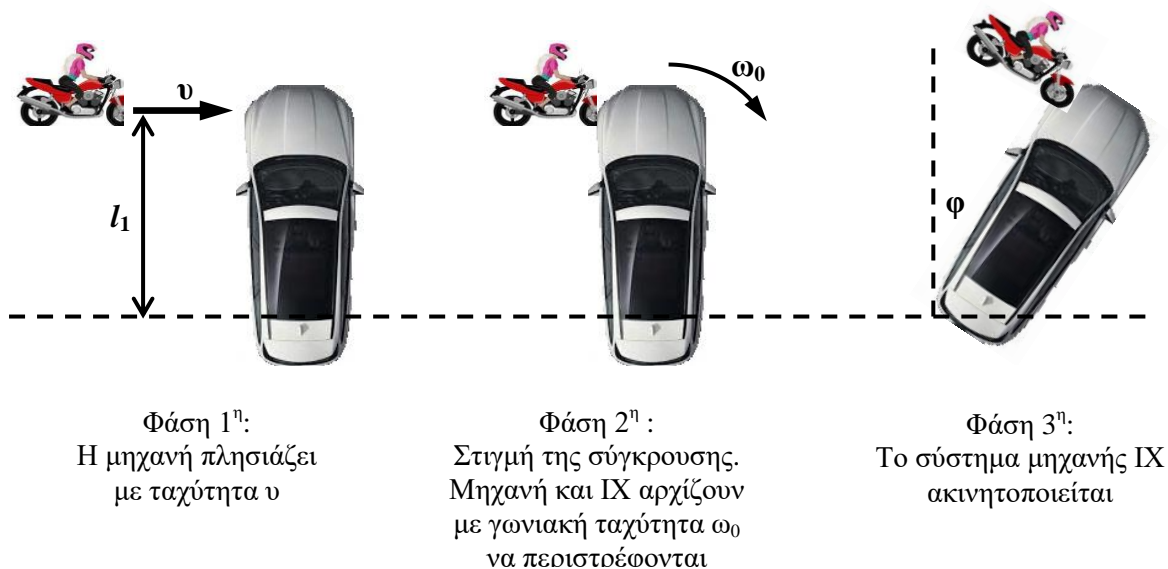
ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΤΟΥ

14. Συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ τροχών και ασφάλτου: $\mu_k = 0,72$
Πηγή: <https://physics.info/friction/>

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!

Τα δεδομένα 1, 2, 3 είναι ευνοϊκά για τον αναβάτη της δίκυκλης μηχανής.

ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΟΥΣΗΣ



$$\text{Αρχική στροφορμή συστήματος δίκυκλης μηχανής – ΙΧ αυτοκινήτου: } L_i = mvl_1 \quad (1)$$

Τελική στροφορμή μηχανής – ΙΧ αυτοκινήτου (ακριβώς μετά τη σύγκρουση):

$$L_f = I\omega_0 \quad (2)$$

I = ροπή αδράνειας αυτοκινήτου και μηχανής ως προς τους πίσω τροχούς:

$$I = \frac{Ml_1^2}{3} + ml_1^2 = \left(\frac{M}{3} + m\right)l_1^2 \quad (3)$$

Διατήρηση

$$L_i = L_f \Rightarrow mvl_1 = I\omega_0 \Rightarrow (\text{βλέπε και Εξίσωση (3)})$$

στροφορμής:

$$mvl_1 = I\omega_0 = \left(\frac{M}{3} + m\right)l_1^2\omega_0 \Rightarrow v = \frac{\left(\frac{M}{3} + m\right)l_1^2\omega_0}{ml_1} \Rightarrow$$

$$v = \frac{\left(\frac{M}{3} + m\right)l_1\omega_0}{m} \quad (4)$$

Ενώ το ΙΧ αυτοκίνητο και η μηχανή στρέφονται ως προς τους πίσω τροχούς, οι εμπρός τροχοί δέχονται δύναμη τριβής f_1 :

$$f_1 = \mu_k M_1 g = 0,6\mu_k M g$$

η οποία ασκεί ροπή ως προς τους πίσω τροχούς τ_1 :

$$\tau_1 = f_1 l_1 = 0,6\mu_k M g l_1$$

Περίπτωση που οι δυο πίσω τροχοί του ΙΧ μπλοκάρουν με το φρενάρισμα:

Ταυτόχρονα στους δυο πίσω τροχούς ασκείται ζεύγος δυνάμεων τριβής f_2 :

$$f_2 = \mu_k M_2 g = 0,4\mu_k M g$$

το οποίο προκαλεί ροπή τ_2 :

$$\tau_2 = f_2 l_2 = 0,4\mu_k M g l_2$$

Η συνολική ροπή που αντιστέκεται στην περιστροφή του αυτοκινήτου είναι:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0,6\mu_k M g l_1 + 0,4\mu_k M g l_2 \Rightarrow \tau = (0,6l_1 + 0,4l_2)\mu_k M g \quad (4)$$

Η ροπή τ προκαλεί γωνιακή επιβράδυνση α_ω :

$$\tau = I\alpha_\omega \Rightarrow (0,6l_1 + 0,4l_2)\mu_k M g = \left(\frac{M}{3} + m\right)l_1^2\alpha_\omega \Rightarrow$$

$$\alpha_\omega = \frac{(0,6l_1 + 0,4l_2)\mu_k M g}{\left(\frac{M}{3} + m\right)l_1^2} \Rightarrow \alpha_\omega = 5,1 \text{ rad/s}^2$$

Από την κινηματική της στροφικής κίνησης άκαμπτου σώματος:

$$\omega_0 = \sqrt{2\alpha_\omega\varphi} = \sqrt{2 \times (5,1 \text{ rad/s}^2) \times (\pi/3) \text{ rad}} \Rightarrow \omega_0 = 3,3 \text{ rad/s}$$

Οπότε από την Εξίσωση (4) έχουμε:

$$v = \frac{\left(\frac{M}{3} + m\right) l_1 \omega_0}{m} = \frac{\left(\frac{1100}{3} \text{ kg} + 190 \text{ kg}\right) (2,3 \text{ m})(3,3 \text{ rad/s})}{190 \text{ kg}} \Rightarrow v = 22 \text{ m/s}$$

Ταχύτητα μηχανής πριν τη σύγκρουση: $v \approx 79 \text{ km/h}$

Περίπτωση που οι δυο πίσω τροχοί του ΙΧ δεν μπλοκάρουν με το φρενάρισμα

(π.χ. ο οδηγός του ΙΧ δεν πάτησε φρένο):

Η συνολική ροπή που αντιστέκεται στην περιστροφή του αυτοκινήτου είναι:

$$\tau = \tau_1 = 0,6\mu_k M g l_1 \quad (4)$$

Η ροπή τ προκαλεί γωνιακή επιβράδυνση α_ω :

$$\tau = I \alpha_\omega \Rightarrow 0,6\mu_k M g l_1 = \left(\frac{M}{3} + m\right) l_1^2 \alpha_\omega \Rightarrow$$

$$\alpha_\omega = \frac{0,6\mu_k M g l_1}{\left(\frac{M}{3} + m\right) l_1^2} \Rightarrow \alpha_\omega = 3,64 \text{ rad/s}^2$$

Από την κινηματική της στροφικής κίνησης άκαμπτου σώματος:

$$\omega_0 = \sqrt{2\alpha_\omega \varphi} = \sqrt{2 \times (3,6 \text{ rad/s}^2) \times (\pi/3) \text{ rad}} \Rightarrow \omega_0 = 2,76 \text{ rad/s}$$

Οπότε από την Εξίσωση (4) έχουμε:

$$v = \frac{\left(\frac{M}{3} + m\right) l_1 \omega_0}{m} = \frac{\left(\frac{1100}{3} \text{ kg} + 190 \text{ kg}\right) (2,3 \text{ m})(2,76 \text{ rad/s})}{190 \text{ kg}} \Rightarrow v = 18,6 \text{ m/s}$$

Ταχύτητα μηχανής πριν τη σύγκρουση: $v \approx 67 \text{ km/h}$