ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΚΥΜΑΤΑ (Εισαγωγή)

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Η μετατόπιση κύματος που κινείται προς αρνητική *y*-κατεύθυνση είναι $D(x,t)=(5{,}2cm)\sin(5{,}5y+72t)$, όπου το *y* είναι σε *m* και το *t* σε *s*. Να υπολογίσετε (α) τη συχνότητα, (β) το μήκος κύματος και (γ) τη ταχύτητα αυτού του κύματος.

ΛΥΣΗ

$D(y,t)=(5{,}2cm)\sin(5{,}5y+72t)$

$D(y,t)=A\sin(ky+\omega t)$

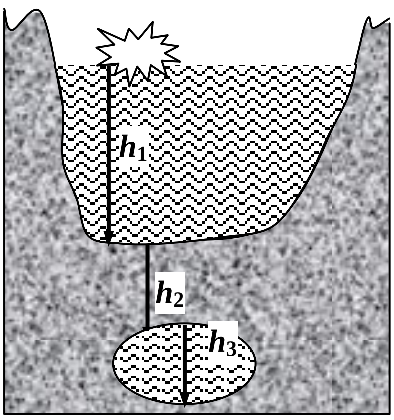
Από τη σύγκριση των δυο σχέσεων προκύπτει ότι: $k=5{,}5\ m^{-1}$ και $\omega=72\ rad/s$

α. Συχνότητα κύματος *f*: $\omega=2\pi f=72\ rad/s \quad \Rightarrow \quad f=\dfrac{72\,rad/s}{2\pi}=11{,}4\,s^{-1}=11{,}4\,Hz$

β. Μήκος κύματος λ: $\quad k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=5{,}5\,m^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\dfrac{2\pi}{5{,}5\,m^{-1}}=1{,}14\,m$

γ. Ταχύτητα κύματος: $\quad \upsilon=\lambda f=(1{,}14\,m)\times(11{,}4\,s^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \upsilon=13{,}0\,m/s$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

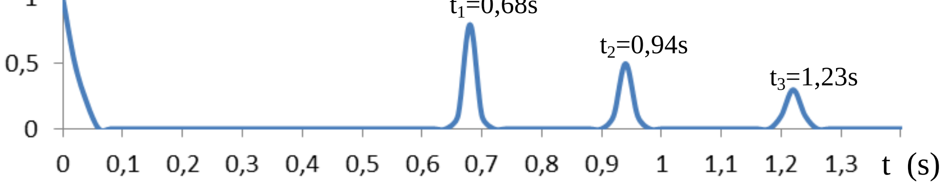


Ειδικοί προσπαθούν να εντοπίσουν κοιτάσματα πετρελαίου. Χρησιμοποιούν εκρηκτικά για την παραγωγή δυνατών ήχων, στη συνέχεια συλλαμβάνουν την ηχώ από τα υπόγεια κοιτάσματα πετρελαίου. Οι γεωλόγοι πιστεύουν ότι υπάρχει πετρέλαιο κάτω από τον πυθμένα μιας λίμνης η οποία έχει βάθος h_1 = 500 m. Είναι γνωστό ότι η λίμνη βρίσκεται σε λεκάνη από γρανίτη. Τη χρονική στιγμή t = 0 s, οι γεωλόγοι πραγματοποιούν μια ελεγχόμενη έκρηξη στην επιφάνεια της λίμνης και τα ειδικά μικρόφωνα που έχουν τοποθετήσει στην επιφάνεια της λίμνης καταγράφουν τρία σήματα με χρονικές καθυστερήσεις t_1 = 0,68 s, t_2 = 0,94 s και t_3 = 1,23 s (βλέπε το παρακάτω διάγραμμα), τα οποία εκτιμούν ότι προέρχονται από την ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων της έκρηξης στον πυθμένα της λίμνης, στην οροφή μιας υποτιθέμενης κοιλότητας και στον πυθμένα της κοιλότητας, αντίστοιχα.

α) Να ελέγξετε ότι το πρώτο σήμα, που καταγράφηκε μετά την έκρηξη, προέρχεται πράγματι από τον πυθμένα της λίμνης.

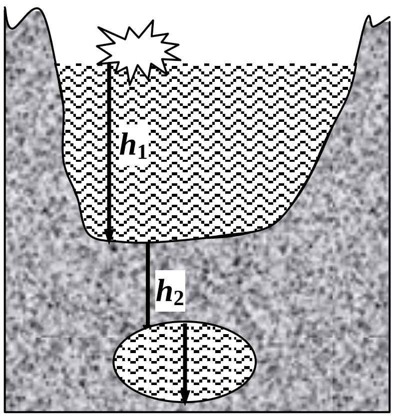
β) Να υπολογίσετε το πάχος h_2 του γρανίτη που πρέπει τρυπήσουν τα γεωτρύπανα για να φθάσουν στην κοιλότητα.

γ) Το ύψος h_3 της κοιλότητας.



Ταχύτητα ήχου: μέσα στο νερό υ_ν = 1,48 km/s, μέσα στο γρανίτη υ_γ = 6,00 km/s και μέσα στο κοίτασμα πετρελαίου υ_π = 2,40 km/s.

ΛΥΣΗ



α) Είναι προφανές ότι το πρώτο σήμα που καταγράφεται, και το οποίο είναι και το πιο ισχυρό, προέρχεται από την ανάκλαση του ηχητικού κύματος στην πρώτη διαχωριστική επιφάνεια που θα συναντήσει ο ήχος

Το διπλανό σχήμα σε συνδυασμό με την πρώτη περίπτωση θα σας βοηθήσουν να υπολογίσετε το πάχος h_2 του γρανίτη που παρεμβάλλεται μεταξύ του πυθμένα της λίμνης και της οροφής της κοιλότητας του κοιτάσματος.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το πάχος h_2 που θα υπολογίσετε στη 2η περίπτωση θα είναι διαφορετικό και μάλιστα μικρότερο από το πάχος h_2 που υπολογίσατε στην 1η Περίπτωση. Πράγματι:

Το ηχητικό κύμα που εκπέμπεται στην επιφάνεια της λίμνης φθάνει στο πάνω μέρος της υποτιθέμενης κοιλότητας αφού αυτό διανύσει:

Διάστημα h_1=500 m (μέσα σε στο νερό της λίμνης), σε χρονικό διάστημα $t_1 = \dfrac{h_1}{\upsilon_\nu}$

Διάστημα h_2 = ?? μέσα στο γρανίτη σε χρονικό διάστημα $t_2 = \dfrac{h_2}{\upsilon_\gamma}$.

Το ηχητικό κύμα ανακλάται στο πάνω μέρος της κοιλότητας και φθάνει στην επιφάνεια της λίμνης αφού διανύσει:

Διάστημα h_2 = ?? μέσα στο γρανίτη σε χρονικό διάστημα $t_2 = \dfrac{h_2}{\upsilon_\gamma}$

Διάστημα h_1=500 m (μέσα σε στο νερό της λίμνης), σε χρονικό διάστημα $t_1 = \dfrac{h_1}{\upsilon_\nu}$

Το συνολικό χρονικό διάστημα t=0,94 s διάδοσης του ηχητικού κύματος από την εκπομπή του μέχρι την ανίχνευση της ασθενούς ηχούς θα είναι ίση με:

$$t = 2t_1 + 2t_2 = \frac{2h_1}{\upsilon_\nu} + \frac{2h_2}{\upsilon_\gamma} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \left(t - \frac{2h_1}{\upsilon_\nu}\right)\frac{\upsilon_\gamma}{2} \quad \Rightarrow$$

$$h_2 = \left(0{,}94 - \frac{2(500m)}{1480m/s}\right)\frac{6000m/s}{2} \quad \Rightarrow \quad h_2 = 793m$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Ένα κύμα πάνω σε χορδή περιγράφεται με τη εξίσωση $D(x,t) = (3{,}0cm)\sin\left[2\pi\left((x/2{,}4m) + t/(0{,}20s) + 1\right)\right]$, όπου το x είναι σε m και το t σε s.

α. Προς ποια κατεύθυνση διαδίδεται το κύμα;

β. Ποια είναι η ταχύτητα του κύματος, η συχνότητα και ο κυματαριθμός;

γ. Σε t = 0,50 s, ποια θα είναι η μετατόπιση της χορδής στη θέση x = 0,20 m;

ΛΥΣΗ

Συγκρίνουμε τη δεδομένη εξίσωση κύματος:

$$D(x,t) = (3{,}0cm)\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{2{,}4m} + \frac{t}{0{,}20s} + 1\right)\right) \quad \Rightarrow \quad D(x,t) = (3{,}0cm)\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{2{,}4m} + \frac{t}{0{,}2s}\right) + 2\pi\right)$$

με τη γενική εξίσωση ενός κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση:

$$D(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_0) = A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad D(x,t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right)$$

Από τη σύγκριση προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων του κύματος:

Πλάτος: $A=3{,}0\ cm$

Μήκος Κύματος: $\lambda=2{,}4\ m$

Περίοδος Κύματος: $T=0{,}20\ s$

Αρχική Φάση Κύματος: $\varphi_0=2\pi\ rad$

α) Η εξίσωση κύματος που δίνεται είναι της μορφής: $D(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \varphi_0)$
Το θετικό πρόσημο του παράγοντα ωt στην εξίσωση που δίνεται δηλώνει ότι το συγκεκριμένο κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση.

β) Ταχύτητα κύματος: $\upsilon = \lambda f = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{2{,}4m}{0{,}20s} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 12{,}0\,m/s$

Συχνότητα κύματος: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}20s} \quad \Rightarrow \quad f = 5{,}0\,Hz$

Κυματαριθμός κύματος: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{2{,}4m} \quad \Rightarrow \quad k = 2{,}62\,rad/m$

γ) Τη χρονική στιγμή t=0,50 s, η μετατόπιση της χορδής στη θέση x=0,20 m θα είναι ίση με:

$$D(0{,}20m, t = 0{,}50s) = (3{,}0cm)\sin\left(2\pi\left(\frac{0{,}20\,m}{2{,}4\,m} + \frac{0{,}50\,s}{0{,}20\,s}\right) + 2\pi\,rad\right) = (3{,}0cm)\sin(22{,}5\,rad)$$

$$D(0{,}20m, t = 0{,}50s) = -1{,}5\,cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται κατά μήκος τεντωμένης χορδής. Ένα σωματίδιο πάνω στη χορδή έχει μέγιστη ταχύτητα 2.0 m/s και μέγιστη επιτάχυνση 200 m/s^2. Ποια είναι η συχνότητα και το πλάτος του κύματος;

ΛΥΣΗ

Μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται το σημείο: υ_{max}=2,0 m/s (**Δεν** είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος).

Μέγιστη επιτάχυνση του σημείου: $a_{max}=200\ m/s^2$.

Από την εξίσωση του κύματος $D(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$ βρίσκουμε ότι:

$$\upsilon(x,t) = \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \upsilon(x,t) = -\upsilon_{\max}\cos(kx - \omega t + \varphi_0) \text{ όπου } \upsilon_{\max} = A\omega$$

$$a(x,t) = \frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} = -A\omega^2\sin(kx - \omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad a(x,t) = -a_{\max}\sin(kx - \omega t + \varphi_0) \text{ όπου } a_{\max} = A\omega^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις που δίνουν τις μέγιστες τιμές της επιτάχυνσης και της ταχύτητας βρίσκουμε:

$$\frac{a_{max}}{\upsilon_{max}} = \frac{A\omega^2}{A\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{max}}{\upsilon_{max}} = \omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{200\, m/s^2}{2\pi \times 2{,}0\, m/s} \quad \Rightarrow \quad f = 15{,}9\, s^{-1} \text{ ή } f = 15{,}9\ Hz$$

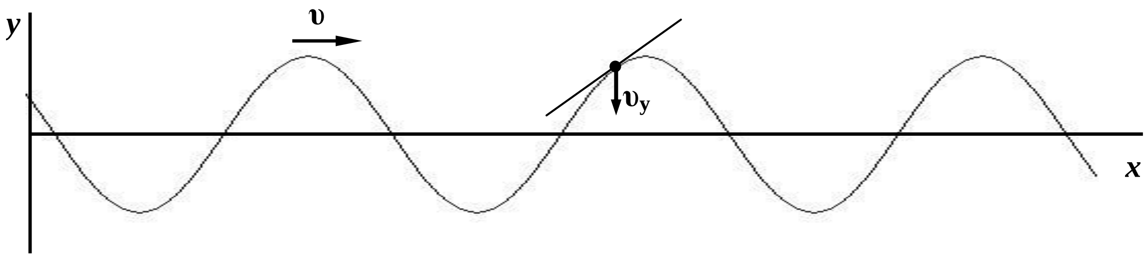
Από τη σχέση που δίνει την μέγιστη ταχύτητα βρίσκουμε:

$$\upsilon_{max} = A\omega = 2\pi A f \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\upsilon_{max}}{2\pi f} = \frac{2{,}0\, m/s}{2\pi \times 15{,}9\, s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}020\, m \text{ ή } A = 2{,}0\ cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Πάνω σε ένα τεντωμένο σκοινί διαδίδεται ένα εγκάρσιο μηχανικό κύμα. Να αποδείξετε ότι η κλίση του σκοινιού, σε ένα οποιοδήποτε σημείο του σκοινιού, είναι ίση με το λόγο της ταχύτητας υ_y της ταλάντωσης του συγκεκριμένου σημείου προς την ταχύτητα υ με την οποία διαδίδεται το κύμα κατά μήκος του σκοινιού.

ΛΥΣΗ



Η εξίσωση του εγκάρσιου κύματος κατά μήκος του σκοινιού είναι: $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$

Στο παραπάνω σχήμα δίνουμε ένα στιγμιότυπο του εγκάρσιου κύματος στο οποίο εξ ορισμού, η κλίση σε κάθε σημείο του σκοινιού είναι ίση με τη μερική παράγωγο της μετατόπισης y(x,t) ως προς x:

Κλίση: $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = Ak\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ (1)

Εξ ορισμού, η ταχύτητα ταλάντωσης κάθε σημείου του σκοινιού είναι ίση με τη μερική παράγωγο της μετατόπισης y(x,t) ως προς το χρόνο t:

Ταχύτητα ταλάντωση στο ίδιο σημείο του σκοινιού: $\upsilon_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ (2)

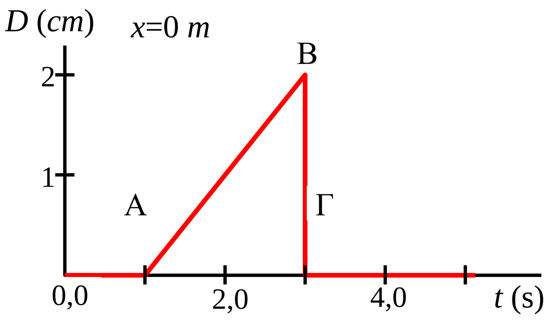
Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2):

$$\frac{\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\upsilon_y} = \frac{Ak\cos(kx - \omega t + \varphi_0)}{-A\omega\cos(kx - \omega t + \varphi)} = -\frac{k}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\upsilon_y \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{2\pi f} = -\frac{\upsilon_y}{\lambda f} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\upsilon_y}{\upsilon}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ιστορικό *D*(*x*=0, *t*) ενός κυματικού παλμού ο οποίος διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος ενός σκοινιού με ταχύτητα υ=100 *cm/s*.



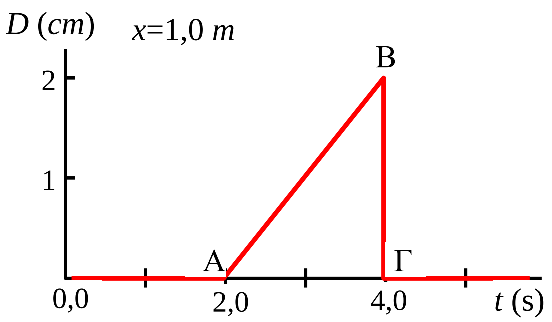
α. Να περιγράψετε το πώς ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται την εξέλιξη του κυματικού παλμού όταν αυτός βρίσκεται στις θέσεις *x*=0 m και *x*=1 *m*.

β. Τη χρονική στιγμή t=0 s κατά την οποία εσείς βρίσκεστε στη θέση *x*=0 *cm*, να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κυματικού παλμού *D*(*x*, *t*=0).

ΛΥΣΗ

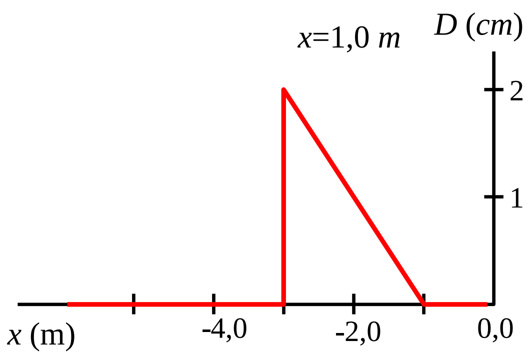
α. Ο παρατηρητής βρίσκεται στη θέση x=0 m. Στη θέση αυτή ο ιστορικό του κύματος είναι αυτό που απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα. Ο κυματικός παλμός αρχίζει να γίνεται αντιληπτός από τον παρατηρητή τη χρονική στιγμή *t*=1,0 *s* (σημείο Α). Ο κυματικός παλμός θα αυξάνει το πλάτος του βαθμιαία μέχρι την τιμή *D*=2 *cm* (σημείο Β) και τη χρονική στιγμή t=3,0 s απότομα το πλάτος του παλμού γίνεται *D*=0 *cm* (σημείο Γ).

Ο παρατηρητής βρίσκεται στη θέση x=1,0 m. Επειδή ο κυματικός παλμός διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ=100 cm/s, ο παλμός αυτός αρχίζει να γίνεται αντιληπτός από τον παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση αυτή μετά από χρονικό διάστημα Δt=(Δx/υ)=(1,0m/1,0m/s)=1,0 s. Αυτό σημαίνει ότι στη θέση x=1,0 m το ιστορικό του κυματικού παλμού θα είναι μετατοπισμένο χρονικά κατά χρονικό διάστημα Δt=1,0 s σε σχέση με το ιστορικό του κυματικού παλμού στη θέση x=0,0 m (βλέπε διπλανό σχήμα)



β. Ο κυματικός παλμός διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ=100 cm/s και φθάνει στη θέση x=0,0 m σε χρονικό διάστημα Δt=1,0 s. Αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή t=0,0 s ο κυματικός παλμός θα βρίσκεται αριστερά από τη θέση x=0,0 m. Επειδή ο κυματικός παλμός αρχίζει να γίνεται αντιληπτός μετά από χρονικό διάστημα Δt=1,0 s, στο χρονικό αυτό διάστημα, το σημείο Α του παλμού θα έχει διανύσει ένα διάστημα Δx=υΔt=(1,0m/s)(1,0s)=1,0 m.

Επειδή το διάστημα Δx=1,0 m διανύθηκε στον αρνητικό άξονα x με τελική θέση το x=0,0 m, συμπεραίνουμε ότι η αρχική θέση του σημείο Α του κυματικού παλμού τη χρονική στιγμή t=0,0 s θα είναι η x= -1,0 m. Κατά αντιστοιχία, επειδή τα σημεία Β και Γ γίνονται αντιληπτά στη θέση x=0,0 m τη χρονική στιγμή t=3,0 s, συμπεραίνουμε ότι, τα σημεία αυτά πριν από τα χρονικό διάστημα Δt=3,0 s θα βρίσκονται στη θέση x= -3,0 m. Μεταφράζοντας την περιγραφή που κάναμε σε γράφημα παίρνουμε το διπλανό στιγμιότυπο του κυματικού παλμού τη χρονική στιγμή t=0,0 s



ΑΣΚΗΣΗ 7:

Η εξίσωση κύματος ενός μηχανικού κύματος είναι: $y(x,t) = (0{,}700\ cm)\sin\left(12.56t - 2.00x\right)$. Ο χρόνος t και το διάστημα x δίνονται σε δευτερόλεπτα και εκατοστά, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος A του κύματος
β. Τον κυματαριθμό k του κύματος
γ. Το μήκος κύματος λ του κύματος
δ. Τη συχνότητα f του κύματος
ε. Την ταχύτητα υ και την κατεύθυνση του κύματος
στ. Την αρχική φάση φ του κύματος
ζ. Τη μέγιστη ταχύτητας $\upsilon_{y,max}$ ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου διάδοσης.

ΛΥΣΗ

Η γενική μορφή της εξίσωσης κύματος είναι: $y(x,t) = A\sin\left(kx - \omega\, t + \varphi\right)$

Για να προσδιορίσουμε τις ζητούμενες παραμέτρους πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε την εξίσωση κύματος που μας δίνεται στη γενική μορφή. Για τη μετατροπή αυτή χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα: sin(α)=sin(π – α), όπου α=12.56t – 2x

$$y(x,t) = (0.700cm)\sin\left(\pi - (12.56t - 2.00x)\right) \Rightarrow \quad y(x,t) = (0.700\ cm)\sin\left(2.00\,x - 11.56\,t + \pi\right)$$

α. A=0.7 cm

β. k=2,00 cm^{-1}

γ. $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{2{,}00\,cm^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3.14\ cm$

δ. $\omega = 12.56\,s^{-1} \quad \Rightarrow \quad 2\pi\, f = 12.56\,s^{-1} \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{12.56\,s^{-1}}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = 2.00\,s^{-1}\ (Hz)$

ε. $\upsilon = \lambda\, f = (3.14cm)(2.00\,s^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 6.28\ cm/s$

Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x (γιατί;)

στ. Η αρχική φάση του κύματος είναι φ = π.

ζ. $\upsilon_y = \dfrac{\partial\, y(x,t)}{\partial\, t} = -A\omega\ \cos\ (k\,x - \omega t + \varphi) = -\upsilon_{y,\max}\ \cos\ (k\,x - \omega t + \varphi)$

$$\upsilon_{y,\max} = A\omega = A 2\pi\, f = 2\pi\,(0.700cm)\,(2.00\,s^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{y,\max} = 8.79cm/s$$