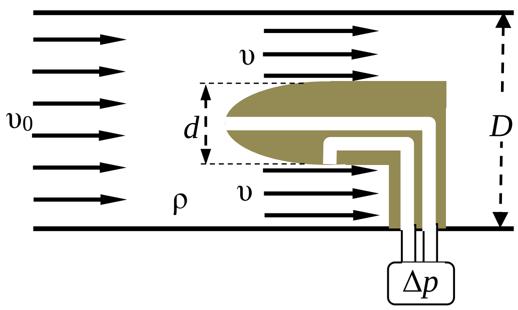
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

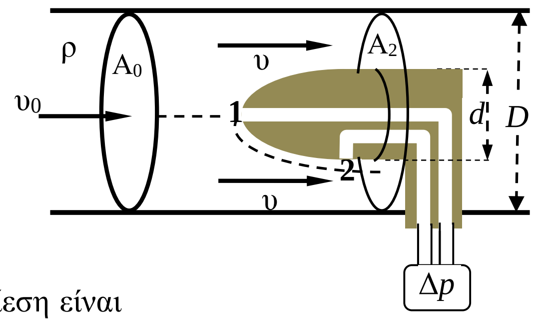
Η μέτρηση της ταχύτητας ροής ενός ρευστού μέσα σε ένα σωλήνα γίνεται με τη συσκευή Prandtl (σωλήνας Pitot) (βλέπε Σχήμα). Η συσκευή αυτή αποτελείται από δυο πολύ λεπτούς σωλήνες, από τους οποίους, το άνοιγμα του ενός είναι κάθετο στη ροή του ρευστού, ενώ το άνοιγμα το άλλου σωλήνα είναι παράλληλο με τη ροή του ρευστού. Στην περιοχή όπου τοποθετείται η συσκευή Prantdl, ο πρώτο σωλήνα μπορεί να μετρήσει την ολική πίεση p_{total} του ρευστού, ενώ ο δεύτερο σωλήνας μπορεί να μετρήσει την αντίστοιχη στατική πίεση p_{static}. Και οι δυο σωλήνες μαζί μετρούν τη δυναμική πίεση του ρευστού $\Delta p = p_{dynamic} = p_{total} - p_{static}$.



Να προσδιορίσετε τη σχέση με την οποία μπορείτε να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ_0$ του ρευστού μέσα στο σωλήνα συναρτήσει της διαφοράς πίεσης Δp, της πυκνότητας ρ του υγρού, της διαμέτρου D του σωλήνα και της διαμέτρου d του σωλήνα Prandtl.

ΛΥΣΗ

Στα σημεία που είναι μακριά από το σωλήνα Prandtl η ταχύτητα του ρευστού είναι $υ_0$ ενώ στα σημεία που περιβάλλουν το σωλήνα Prandtl το ρευστό έχει ταχύτητα $υ_2$.



Νόμος Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2:

Σημείο 1: Τα μόρια του ρευστού είναι ακίνητα, $υ_1 = 0$.
Η στατική πίεση είναι p_1

Σημείο 2: Η ταχύτητα των μορίων είναι $υ_2$ και η στατική πίεση είναι p_2.

Τα Σημεία 1 και 2 θα μπορούσαν να είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, οπότε η υδροστατική πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς είναι μηδέν.

Εξίσωση Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \cancel{\rho g y} = p_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 + \cancel{\rho g y}$ (1)

Η συσκευή Prantdl μετρά τη διαφορά των στατικών πιέσεων μεταξύ των σημείων 1 και 2:

$\Delta p = p_1 - p_2$

Οπότε, η Εξίσωση 1 γίνεται:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \qquad (2)$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ των διατομών A_0 και A_1:

$A_0 \upsilon_0 = A_2 \upsilon_2$

όπου: $A_0 = \frac{\pi D^2}{4}$ και $A_2 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ (3)

οπότε η εξίσωση συνεχείας γίνεται:

$$\frac{\pi D^2}{4}\upsilon_0 = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{D^2}{D^2 - d^2}\upsilon_0 \qquad (4)$$

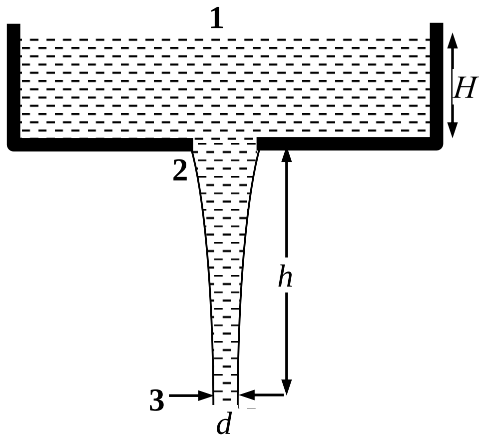
Από τις Εξισώσεις 2 και 4 προκύπτει και η ζητούμενη σχέση υπολογισμού της ταχύτητα υ_0 του ρευστού:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D^2}{D^2 - d^2}\upsilon_0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}\left(\frac{D^2 - d^2}{D^2}\right)$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Στον πυθμένα μιας πολύ μεγάλης δεξαμενής υπάρχει οπή που έχει διάμετρο D=10,0 cm. Η δεξαμενή περιέχει νερό μέχρι το ύψος H=1,00 m. Δεδομένου ότι η πυκνότητα του νερού είναι ίση με ρ=1,00 g/cm^3 να υπολογίσετε τη διάμετρο d της στήλης νερού που εκρέει από τη οπή σε απόσταση h=2,50 m από το σημείο εκροής. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=9,80 m/s^2.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Από το γεγονός ότι η διάμετρο D της οπής είναι πολλές φορές μικρότερη από τη διάμετρο της δεξαμενής προκύπτει ότι για μεγάλο χρονικό διάστημα η ελεύθερη στάθμη του νερού μέσα στη δεξαμενή δεν κατέρχεται.

Νόμος Bernoulli μεταξύ θέσεων 1 και 2:

Στη θέση 1 η ταχύτητα του νερού είναι πρακτικά υ_1=0 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Στη θέση 2 η ταχύτητα του νερού είναι υ_2 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Μεταξύ θέσεων 1 και 2 η υψομετρική διαφορά είναι H.

$$p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad \rho g H = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \sqrt{2gH} \qquad (1)$$

Νόμος Bernoulli μεταξύ θέσεων 2 και 3:

Στη θέση 2 η ταχύτητα του νερού είναι πρακτικά υ_2 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Στη θέση 3 η ταχύτητα του νερού είναι υ_3 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Μεταξύ θέσεων 2 και 3 η υψομετρική διαφορά είναι h.

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2^2 + 2gh = \upsilon_3^2 \qquad (2)$$

Από τις Εξισώσεις 1 και 2 βρίσκουμε τη σχέση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_3 στη θέση 3:

$$\upsilon_3 = \sqrt{2gH + 2gh} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = \sqrt{2g(H + h)} \qquad (3)$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ των διατομών 2 και 3:

Έστω ότι A_2 και A_3 είναι οι επιφάνειες των διατομών της οπής (θέση 2) και της στήλης νερού στη θέση 3:

$A_2 \upsilon_2 = A_3 \upsilon_3 \qquad (4)$

όπου $A_2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ και $A_3 = \dfrac{\pi d^2}{4} \qquad (5)$

Οπότε, από τις Εξισώσεις 1, 3, 4 και 5 παίρνουμε:

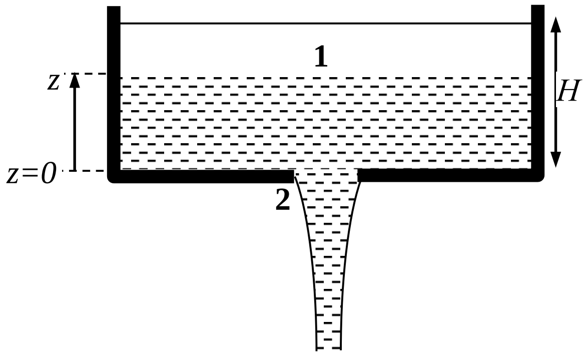
$$\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2gH} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(H+h)} \quad \Rightarrow \quad d^2 = D^2\sqrt{\frac{H}{H+h}} \quad \Rightarrow \quad d = D\left(\frac{H}{H+h}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$d = (0{,}100 \text{ m})\left(\frac{1{,}00 \text{ m}}{1{,}00\text{m} + 2{,}50\text{m}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad d = 0{,}0731 \text{ m}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Μια κυλινδρική δεξαμενή με διάμετρο βάσης D=2,00 m περιέχει νερό μέχρι σε ύψος H=2,00 m. Στον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει ελεγχόμενη κυκλική οπή εκροής του νερού η οποία έχει διάμετρο d=5,0 cm. Ανοίγετε την οπή εκροής και το νερό εξέρχεται ελεύθερα. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή. (δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, g=9,80 m/s^2).

<u>ΛΥΣΗ</u>



Τη χρονική στιγμή t η ελεύθερη στάθμη του νερού μέσα στη δεξαμενή είναι στη θέση 1 και η στήλη του νερού έχει ύψος z.
Στη θέση 1 η ταχύτητα του νερού είναι υ_1 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Στη θέση 2 η ταχύτητα του νερού είναι υ_2 και η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0.
Μεταξύ των θέσεων 1 και 2 η υψομετρική διαφορά είναι ίση με z.

Νόμος Bernoulli μεταξύ των θέσεων 1 και 2:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1^2 + 2gz = \upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ θέσεων 1 και 2:

Έστω ότι A_1 και A_2 είναι οι επιφάνειες των διατομών της δεξαμενής (θέση 1) και της οπής (θέση 3):

$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \qquad (2)$

όπου $A_1 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ και $A_2 = \dfrac{\pi d^2}{4} \qquad (3)$

Οπότε από την Εξίσωση 2 βρίσκουμε την ταχύτητα υ_2:

$$\frac{\pi D^2}{4}\upsilon_1 = \frac{\pi d^2}{4}\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{D^2}{d^2}\upsilon_1 \qquad (4)$$

Από τις Εξισώσεις 1 και 4 παίρνουμε:

$$\upsilon_1^2 + 2gz = \frac{D^4}{d^4}\upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{D^4}{d^4}\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2 = 2gz \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gz}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} \qquad (5)$$

Δεδομένου ότι:

$$\frac{D}{d} = \frac{2{,}00\ \mathrm{m}}{0{,}050\ \mathrm{m}} = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{D^4}{d^4} = 2560000 \ggg 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{D^4}{d^4} - 1 = \frac{D^4}{d^4}$$

Οπότε η Εξίσωση 5 γίνεται:

$$\upsilon_1 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gz} \qquad (6)$$

Η ταχύτητα υ_1 είναι ίση με το ρυθμό με τον οποίο κατέρχεται η ελεύθερη στάθμη του νερού:

$$\upsilon_1 = -\frac{dz}{dt} \qquad (7)$$

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι το ύψος z της στήλης νερού μέσα στη δεξαμενή μειώνεται όσο ο χρόνος αυξάνεται. Από τις Εξισώσεις 6 και 7 παίρνουμε:

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gz} = \frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}dt \quad \Rightarrow \quad \int_H^0 \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} = -\frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}\int_0^t dt$$

$$\int_H^0 z^{-\frac{1}{2}}dz = -\frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}\,t \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}z^{-\frac{1}{2}+1}\right]_H^0 = -\frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}\,t \quad \Rightarrow$$

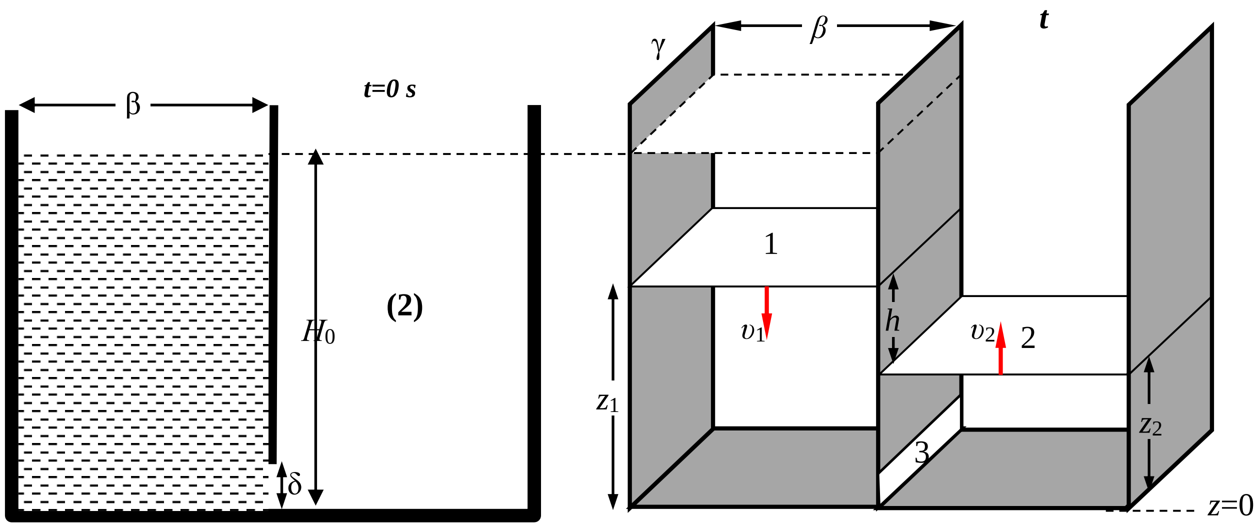
$$-2\sqrt{H} = -\frac{d^2\sqrt{2g}}{D^2}\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2D^2}{d^2}\sqrt{\frac{H}{2g}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$t = \frac{(2{,}00\ \mathrm{m})^2}{(0{,}050\ \mathrm{m})^2}\sqrt{\frac{2(2{,}00\ \mathrm{m})}{9{,}80\ \mathrm{m/s^2}}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{t = 1020\ s} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{t = 17\ min}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Δυο ακριβώς ίδιες παραλληλεπίπεδες δεξαμενές, οι οποίες έχουν μήκος β=10,0 m και πλάτος γ=5,00 m, διαχωρίζονται με ένα κατακόρυφο τοίχωμα στη βάση του οποίου υπάρχει πύλη εκροής νερού που έχει ύψος δ=5,0 cm, εκτείνεται σε όλο το πλάτος του τοιχώματος και το οποίο μπορεί να ανοίγει και να κλείνει αυτόματα. Αρχικά, η μια από τις δυο δεξαμενές είναι γεμάτη με νερό μέχρι το ύψος H_0=5,00 m, ενώ η δεύτερη δεξαμενή είναι άδεια. Τη χρονική στιγμή t=0 s η πύλη εκροής ανοίγει απότομα και το νερό ρέει από τη δεξαμενή (1) στη δεξαμενή (2). Με την προϋπόθεση ότι $\delta \ll h_0$, να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα T στο οποίο οι επιφάνειες του νερού και στις δυο δεξαμενές φθάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Δίνονται: πυκνότητα νερού ρ=1,00 g/cm^3 και η επιτάχυνση βαρύτητας g=9,80 m/s^2.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Την τυχαία χρονική στιγμή *t*:

Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή (1) βρίσκεται σε ύψος z_1 και κατέρχεται με ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = -\frac{dz_1}{dt}$$

Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή (2) βρίσκεται σε ύψος z_2 και ανέρχεται με ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = \frac{dz_2}{dt}$$

Επειδή οι οριζόντιες διατομές των δεξαμενών είναι ίσες, οι ταχύτητες υ_1 και υ_2 είναι ίσες και αντίθετες:

$$\upsilon_2 = -\upsilon_1 = \frac{dz_2}{dt} = -\frac{dz_1}{dt} \qquad (1)$$

Η απόσταση *h* μεταξύ των δυο ελεύθερων επιφανειών νερού είναι ίση με:

$$h = z_1 - z_2 \qquad (2)$$

Από τις Εξισώσεις 1 και 2 προκύπτει ότι η σχετική ταχύτητα με την οποία πλησιάζουν οι δυο ελεύθερες επιφάνειες νερού θα είναι ίση με:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(z_1 - z_2)}{dt} = \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 2\frac{dz_1}{dt} = 2\upsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt} < 0 \qquad (3)$$

Νόμος Bernoulli μεταξύ των επιφανειών 1 και 3:

Το ύψος δ της πύλης εκροής είναι πολλές φορές μικρότερο από το ύψος των ελεύθερων επιφανειών νερού μέσα στις δυο δεξαμενές. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία της πύλης εκροής θα ευρίσκονται πρακτικά στη θέση z=0, θα υφίστανται την ίδια στατική πίεση p_3 και η ταχύτητα των μορίων του νερού στα σημεία αυτά θα είναι η ίδια και ίση με υ_3.

Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στην αριστερή δεξαμενή (επιφάνεια 1) είναι σε υψομετρική διαφορά z_1 σε σχέση με την πύλη εκροής (επιφάνεια 3), υφίσταται την ατμοσφαιρική πίεση p_0 και κατέρχεται με ταχύτητα υ_1. Οπότε, η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g z_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \qquad (4)$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ των επιφανειών 1 και 3:

$$A_1\upsilon_1 = A_3\upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \beta\gamma\upsilon_1 = \delta\gamma\upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = \frac{\beta}{\delta}\upsilon_1 \qquad (5)$$

Επειδή

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{0{,}050\ m}{5{,}00\ m} = 0{,}01 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 \ll \upsilon_3 \qquad (6)$$

Σύμφωνα με τη Σχέση (6), η εξίσωση Bernoulli (Εξίσωση 4) γίνεται:

$$p_0 + \rho g z_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \qquad (7)$$

Στη δεξιά δεξαμενή, η επιφάνεια 3 είναι σε βάθος z_2 και η στατική πίεση είναι ίση με την υδροστατική:

$$p_3 = p_0 + \rho g z_2 \qquad (8)$$

Από τις εξισώσεις 7 και 8 παίρνουμε:

$$p_0 + \rho g z_1 = p_0 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \;\Rightarrow\; \rho g z_1 = \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 \;\Rightarrow\; g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\upsilon_3^2 \qquad (9)$$

Από τις Εξισώσεις 2, 3, 5 και 9 έχουμε:

$$g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 \upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad gh = \frac{1}{8}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 8gh \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\delta}{\beta}\sqrt{8gh} = -\frac{2\delta}{\beta}\sqrt{2gh} = -\frac{2\delta\sqrt{2g}}{\beta}\sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{\beta}{2\delta\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}} \qquad (10)$$

Το αρνητικό πρόσημο μπήκε επειδή η παράγωγος $(dh/dt)<0$ (το διάστημα h μειώνεται με το χρόνο).

Τα χρονική στιγμή t=0 όλο το νερό βρίσκεται στην αριστερή δεξαμενή οπότε $h = H_0$.

Τα χρονική στιγμή $t = T$ οι ελεύθερες στάθμες του νερού και στις δυο δεξαμενές βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, οπότε $h = 0$. Ολοκληρώνοντας την Εξίσωση στο χρονικό διάστημα $(0, T)$ παίρνουμε:

$$\int_0^T dt = -\frac{\beta}{2\delta\sqrt{2g}}\int_{H_0}^0 \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\beta}{2\delta\sqrt{g}}\int_{H_0}^0 h^{-\frac{1}{2}}\,dh \quad \Rightarrow \quad T$$

$$= -\frac{\beta}{2\delta\sqrt{2g}}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,h^{-\frac{1}{2}+1}\right]_{H_0}^0 \quad \Rightarrow$$

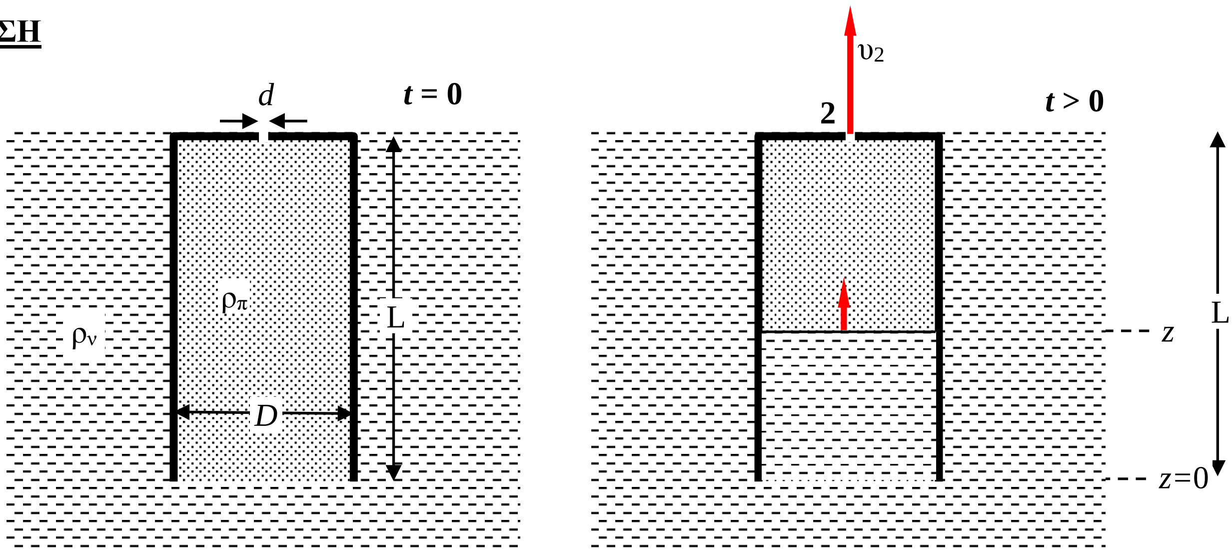
$$T = \frac{\beta}{\delta\sqrt{2g}}\sqrt{H_0} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\beta}{\delta}\sqrt{\frac{H_0}{2g}} \qquad (11)$$

$$T = \frac{10{,}0\ \mathrm{m}}{0{,}050\ \mathrm{m}}\sqrt{\frac{5{,}00\ \mathrm{m}}{2(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = 101\ \mathrm{s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα κυλινδρικό δοχείο που έχει ύψος L=80,0 cm και διάμετρο D=10,0 cm είναι γεμάτο με πετρέλαιο το οποίο έχει πυκνότητα ρ_π=0,800 g/cm^3. Το στόμιο του σωλήνα με το πετρέλαιο φράσσεται προσωρινά για να ανατραπεί και να τοποθετηθεί προσεκτικά μέσα σε μια δεξαμενή νερού απείρων διαστάσεων έτσι ώστε ο πυθμένας του σωλήνα να βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού της δεξαμενής. Τη χρονική στιγμή t=0 s ανοίγουμε μια κυκλική οπή με διάμετρο d=1,00 cm στον πυθμένα του σωλήνα. Επειδή η πυκνότητα του πετρελαίου είναι μικρότερη από τη πυκνότητα του νερού, το νερό θα αρχίσει να εισρέει στο σωλήνα με αποτέλεσμα, το πετρέλαιο να συμπιέζεται προς τα πάνω και τελικά να εκρέει από τη μικρή οπή που βρίσκεται στον πυθμένα του σωλήνα. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φύγει όλο το πετρέλαιο δια μέσου της μικρή οπή. Δίνονται: πυκνότητα νερού ρ=1,00 g/cm^3 και η επιτάχυνση βαρύτητας g=9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ



Σε μια τυχαία χρονική στιγμή t, το νερό έχει εκτοπίσει την κάτω επιφάνεια της στήλης πετρελαίου κατά διάστημα z. Τη χρονική αυτή στιγμή, η κάτω επιφάνεια της στήλης του πετρελαίου μέσα στο σωλήνα ανέρχεται με ταχύτητα υ_1 και ταυτόχρονα το πετρέλαιο εξέρχεται από την οπή 2 με ταχύτητα υ_2.

Νόμος Συνεχείας μεταξύ των επιφανειών 1 και 2:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi D^2}{4}\upsilon_1 = \frac{\pi d^2}{4}\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{D^2}{d^2}\upsilon_1 \qquad (1)$$

Νόμος Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2:

Η επιφάνεια 1 υφίσταται στατική πίεση p_1, βρίσκεται σε ύψος z ως προς το κάτω άκρο του σωλήνα και ανέρχεται με ταχύτητα υ_1.

Στην επιφάνεια 2 (επιφάνεια οπής) το πετρέλαιο που εξέρχεται στην ατμόσφαιρα υφίσταται στατική πίεση ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0, βρίσκεται σε ύψος L ως προς το κάτω άκρο του σωλήνα και το πετρέλαιο εξέρχεται με ταχύτητα υ_2. Οπότε, η εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 γράφεται:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_1^2 + \rho_\pi g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_2^2 + \rho_\pi g L$$

Από την Εξίσωση 1 προκύπτει ότι $\upsilon_2 >> \upsilon_1$ (δεδομένου ότι $D>>d$). Οπότε η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$p_1 + \rho_\pi g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho_\pi \upsilon_2^2 + \rho_\pi g L \qquad (2)$$

Η διαχωριστική επιφάνεια 1 (μεταξύ πετρελαίου και νερού) βρίσκεται σε βάθος (L – z), οπότε εκατέρωθεν της επιφάνεια αυτής η πίεση p_1 θα είναι η ίδια και ίση με την υδροστατική πίεση που ασκεί το νερό στο βάθος αυτό:

$$p_1 = p_0 + \rho_\nu g(L - z) \qquad (3)$$

Η Εξίσωση 2 σε συνδυασμό με τις Εξισώσεις 1 και 3 γράφεται:

$$p_0 + \rho_\nu g(L - z) + \rho_\pi g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho_\pi \left(\frac{D^2}{d^2}\upsilon_1\right)^2 + \rho_\pi g L \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho_\pi \frac{D^4}{d^4}\upsilon_1^2 = \rho_\nu g(L - z) + \rho_\pi g z - \rho_\pi g L = \rho_\nu g(L - z) - \rho_\pi g(L - z) = g(\rho_\nu - \rho_\pi)(L - z) \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = 2\frac{d^4}{D^4}\,\frac{g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}\,(L - z) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,\sqrt{L - z} \qquad (4)$$

Η ταχύτητα υ_1 είναι ίση με το ρυθμό που αυξάνεται η απόσταση z της διαχωριστικής επιφάνειας 1 από το κάτω άκρο του σωλήνα. Συγκεκριμένα: $\upsilon_1 = \frac{dz}{dt}$. Οπότε η Εξίσωση 4 γράφεται:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,\sqrt{L - z} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d(L - z)}{dt} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,\sqrt{L - z} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d(L - z)}{\sqrt{L - z}} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathrm{z=0}}^{\mathrm{z=L}} \frac{d(L - z)}{\sqrt{L - z}} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\int_0^T dt \quad \Rightarrow$$

$$2\sqrt{L - z}\,\Big|_0^L = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\;t\,\Big|_{t=0}^{t=T} \quad \Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{L - L} - \sqrt{L - 0}\right) = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,(T - 0) \quad \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{L} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{\frac{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}{\rho_\pi}}\,T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{\rho_\pi}{2g(\rho_\nu - \rho_\pi)}}\,\sqrt{4L} \quad \Rightarrow$$

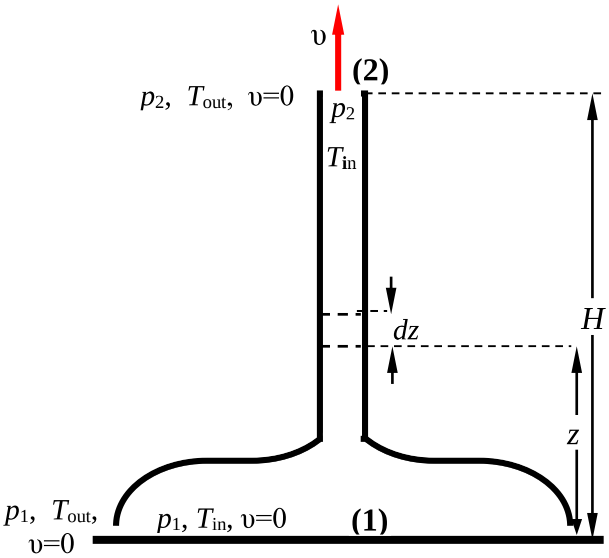
$$T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{\rho_\pi}{\rho_\nu - \rho_\pi}}\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

$$T = \frac{(10{,}0\ \mathrm{cm})^2}{(1{,}00\ \mathrm{cm})^2}\sqrt{\frac{0{,}800\ \mathrm{gr/cm^3}}{(1{,}00\ \mathrm{gr/cm^3}) - (0{,}800\ \mathrm{gr/cm^3})}}\sqrt{\frac{2(80{,}0\ \mathrm{cm})}{1000\ \mathrm{cm/s^2}}} \quad \Rightarrow \quad T = 80{,}0\ s$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια κατασκευή όμοια με θερμοκήπιο καλύπτει μια έκταση πολλών στρεμμάτων. Στο κέντρο της κατασκευή υπάρχει κατακόρυφη η οποία έχει ύψος H=100 m. Η κατασκευή αυτή ονομάζεται **ηλιακή καμινάδα**. Ζεστός αέρα θερμοκρασίας T_1=350 K εξέρχεται στην ατμόσφαιρα μέσω της καμινάδας. Η εξωτερική θερμοκρασία (θερμοκρασία περιβάλλοντος) είναι $T_0=290^0$ K. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται ο αέρας από την καμινάδα λαμβάνοντας υπόψη στους υπολογισμούς σας τη συμπιεστότητα του αέρα. Δίνεται η καταστατική εξίσωση των αερίων: $pV = nRT$ όπου p, V και T είναι η πίεση, ο όγκος και η θερμοκρασία του αέρα, αντίστοιχα. Το n είναι ο αριθμός των γραμμομορίων του αέρα, $n=m/M$ (m είναι μάζα του αέρα και M≈29 g είναι η γραμμομοριακή μάζα του αέρα). Η επιτάχυνση της βαρύτητας g=9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ



Στο επίπεδο 1:
Η πίεση εντός και εκτός του θερμοκηπίου είναι p_1. Η θερμοκρασία εντός του «θερμοκηπίου» είναι T_{in}=350 K ενώ η θερμοκρασία έξω από το θερμοκήπιο είναι T_{out}=290 K. Η ταχύτητα του αέρα εντός και εκτός της καμινάδας είναι υ=0.

Στο επίπεδο 2:
Η πίεση εντός και εκτός της καμινάδας είναι p_2. Η θερμοκρασία εντός της καμινάδας είναι T_{in}=350 K ενώ η θερμοκρασία έξω από την καμινάδα είναι T_{out}=290 K. Η ταχύτητα εντός της καμινάδας είναι υ (ζητούμενη) και εκτός της καμινάδας είναι υ=0.

Επειδή ο αέρας είναι συμπιεστός και επειδή η πίεση μέσα στην ηλιακή καμινάδα μεταβάλλεται από την τιμή p_1 (στη βάση της καμινάδας) στην τιμή p_2 (στην κορυφή της καμινάδας), η πυκνότητα ρ του αέρα δεν είναι σταθερή αλλά αντίθετα μεταβάλλεται με την απόσταση z από τη βάση της καμινάδας. Συνεπώς, στην περίπτωση της ηλιακής καμινάδας δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους νόμους της συνεχείας και Bernoulli μεταξύ σημείων του εσωτερικού της καμινάδας που απέχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Αντίθετα, αν διαιρέσουμε την καμινάδα σε στοιχειώδης όγκους που έχουν στοιχειώδες ύψος dz,τότε μπορούμε να δεχτούμε ότι η πυκνότητα του αέρα μέσα στο στοιχειώδη αυτό όγκο είναι σταθερή. Σε αυτή τη στοιχειώδη μετατόπιση dz μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του Bernoulli. Συγκεκριμένα:
Στο ύψος z ως σημείο αναφοράς:
Η στατική πίεση είναι p, η ταχύτητα του αέρα είναι υ και η πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς είναι μηδέν.

Στο ύψος $z+dz$:
Η στατική πίεση είναι $p+dp$, η ταχύτητα του αέρα είναι υ+dυ και η πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς ως προς το σημείο αναφοράς είναι $\rho g\, dz$.

Οπότε ο νόμος του Bernoulli κατά μήκος της στοιχειώδους μετατόπισης dz γράφεται:

$$\cancel{p} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \cancel{p} + dp + \frac{1}{2}\rho(\upsilon + d\upsilon)^2 + \rho g\, dz \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\rho\upsilon^2} = dp + \cancel{\frac{1}{2}\rho\upsilon^2} + \rho\upsilon d\upsilon + \frac{1}{2}\rho(d\upsilon)^2 + \rho g\, dz \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(\upsilon^2) + g\, dz = 0 \qquad (1)$$

Ο παράγοντας $(d\upsilon)^2$ διαγράφηκε ως μια υπερβολικά πολύ μικρή ποσότητα (είναι το τετράγωνο απειροστής ποσότητας). Για να είναι εύχρηστη η Εξίσωση 1 θα πρέπει να απαλείψουμε την πυκνότητα ρ του αέρα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση των αερίων την οποία τροποποιούμε ως εξής:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} \quad \Rightarrow \quad p = \rho\frac{RT}{M} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{M}{RT}p \qquad (2)$$

όπου θέσαμε αριθμός γραμμομορίων $n=(m/M)$, όπου $M\approx 29$ g είναι η γραμμομοριακή μάζα του αέρα, και πυκνότητα του αέρα $\rho=(m/V)$. Εντός της καμινάδας, όπου $T=T_{in}$, η Εξίσωση 2 γράφεται:

$$\rho = \frac{M}{RT_{in}}p \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε την Εξίσωση 3 στην Εξίσωση 1 και έχουμε:

$$\frac{dp}{\frac{M}{RT_{in}}p} + \frac{1}{2}d(\upsilon^2) + g\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{RT_{in}}{M}\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}d(\upsilon^2) + g\,dz = 0 \qquad (4)$$

Η ολοκλήρωση της Εξίσωση 4 γίνεται, για την πίεση στο διάστημα από p_1 έως p_2, για την ταχύτητα στο διάστημα από $\upsilon=0$ έως υ (το ζητούμενο) και για το ύψος από την τιμή $z = 0$ έως $z = H$. Επειδή η Εξίσωση 4 είναι ίση με μηδέν, ως διαφορικό μια συνάρτησης, το ορισμένο ολοκλήρωμα της εξίσωσης αυτής θα είναι επίσης ίσο με μηδέν. Συγκεκριμένα:

$$\frac{RT_{in}}{M}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\int_{\upsilon=0}^{\upsilon}d(\upsilon^2) + g\int_{z=0}^{z=H}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{RT_{in}}{M}\ln p\Big|_{p_1}^{p_2} + \frac{1}{2}\upsilon^2\Big|_0^{\upsilon} + g\,z\Big|_0^{H} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{RT_{in}}{M}\ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\upsilon^2 + gH = 0 \qquad (5)$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία στον αέρα έξω από την καμινάδα για να βρούμε μια εξίσωση που είναι αντίστοιχη της Εξίσωσης 4. Στο ίδιο ύψος z η στατική πίεση είναι p, η ταχύτητα του αέρα είναι $\upsilon=0$ και η πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς ως προς τη θέση αυτή είναι μηδέν. Αντίστοιχα στο ύψος $z+dz$, η στατική πίεση είναι $p+dp$, η ταχύτητα του αέρα είναι $\upsilon=0$ και η πίεση λόγω υψομετρικής διαφοράς ως προς το προηγούμενο σημείο είναι $\rho g\,dz$.

Οπότε ο νόμος του Bernoulli κατά μήκος της στοιχειώδους μετατόπισης dz γράφεται:

$$\cancel{p} = \cancel{p} + dp + \rho g\,dz \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \qquad (6)$$

Εκτός της καμινάδας, όπου $T=T_{out}$, η εξίσωση 2 γράφεται:

$$\rho = \frac{M}{RT_{out}}p \qquad (7)$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση 7 στην Εξίσωση 6 και έχουμε:

$$\frac{dp}{\frac{M}{RT_{out}}p} + g\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{RT_{out}}{M}\frac{dp}{p} + g\,dz = 0 \qquad (8)$$

Η ολοκλήρωση της Εξίσωση 8 γίνεται, για την πίεση στο διάστημα από p_1 έως p_2 και για το ύψος από την τιμή $z = 0$ έως $z = H$. Επειδή η Εξίσωση 8 είναι ίση με μηδέν, ως διαφορικό μια συνάρτησης, το ορισμένο ολοκλήρωμα της εξίσωσης αυτής θα είναι επίσης ίσο με μηδέν. Συγκεκριμένα:

$$\frac{RT_{out}}{M}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} + g\int_{z=0}^{z=H}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{RT_{out}}{M}\ln p\Big|_{p_1}^{p_2} + g\,z\Big|_0^{H} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{RT_{out}}{M}\ln\frac{p_2}{p_1}+gH=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{RT_{out}}{M}\ln\frac{p_2}{p_2}=-gH \quad\Rightarrow\quad \frac{R}{M}\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{gH}{T_{out}} \qquad (9)$$

Από τις Εξισώσεις 9 και 5 παίρνουμε:

$$-gH\frac{T_{in}}{T_{out}}+\frac{1}{2}\upsilon^2+gH=0 \quad\Rightarrow\quad \upsilon^2=2gH\frac{T_{in}}{T_{out}}-2gH= \ 2gH\left(\frac{T_{in}}{T_{out}}-1\right) \quad\Rightarrow$$

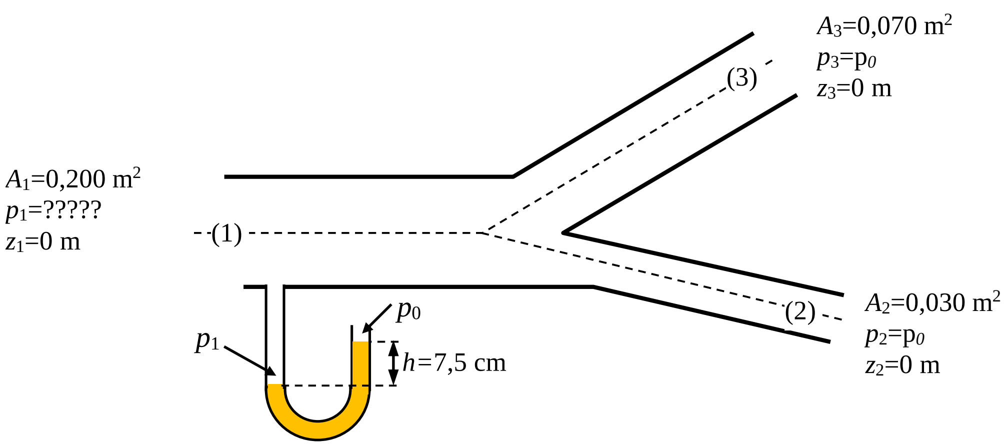
$$\upsilon=\sqrt{2gH\left(\frac{T_{in}}{T_{out}}-1\right)}$$

$$\upsilon=\sqrt{2(9{,}80\,m/s^2)(100\,m)\left(\frac{350\,K}{290\,K}-1\right)} \quad\Rightarrow\quad \upsilon=20{,}1\,m/s^2 \quad ή \quad \upsilon=72{,}5\,km/h$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7</u>

Ένας οριζόντιος σωλήνας που έχει διατομή A_1=0,200 m^2 διακλαδίζεται σε δυο άλλους οριζόντιους σωλήνες από τους οποίους ο ένας έχει διατομή A_2=0,030 m^2 και ο άλλος A_3=0,070 m^2. Το νερό ρέει από τον αρχικό σωλήνα και εκρέει ελεύθερα στον αέρα από τα άκρα των σωλήνων της διακλάδωσης. Για την μέτρηση της πίεσης p_1 στον κεντρικό σωλήνα, στο σωλήνα αυτό έχει προσαρμοστεί ένας σωλήνας σε σχήμα U μέσα στον οποίο υπάρχει υδράργυρος. Το άνοιγμα του αριστερού άκρου του σωλήνα U είναι σε άμεση επικοινωνία με το υγρό που ρέει στον κεντρικό σωλήνα, οπότε η αριστερή ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου να υφίσταται την πίεση p_1 του ρευστού. Το δεξιό ανοιχτό άκρο του σωλήνα είναι σε άμεση επικοινωνία με τον ατμοσφαιρικό αέρα και ως εκ τούτου η δεξιά ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου να υφίσταται την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Επειδή η πίεση p_1 μέσα στον κεντρικό σωλήνα είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση p_0, ο υδράργυρος μέσα στο σωλήνα U ισορροπεί έτσι ώστε η δεξιά ελεύθερη στάθμη να είναι πιο ψηλά από την αντίστοιχη αριστερή στάθμη κατά ένα διάστημα h = 7,50 cm. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες υ_1, υ_2 και υ_3 του ρευστού στον κεντρικό σωλήνα και στους σωλήνες που διακλαδίζονται, αντίστοιχα. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι p_0=1,013x10^5 Pa, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=9,80 m/s^{2}και η πυκνότητα του υδραργύρου είναι ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3 = 13600 kg/m^3.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Στο Σχήμα φαίνονται οι συνθήκες που επικρατούν στον κεντρικό σωλήνα 1 και στις εξόδους των σωλήνων 2 και 3. Η μέτρηση της πίεσης p_1 στον κεντρικό σωλήνα γίνεται έμμεσα μέσω της υψομετρικής διαφοράς των επιφανειών του υδραργύρου μέσα στο σωλήνα U. Στο αριστερό σκέλος του σωλήνα U η στατική πίεση είναι ίση με την στατική πίεση p_1 του ρευστού μέσα στον κεντρικό σωλήνα. Το δεξιό σκέλος του σωλήνα είναι ανοικτό οπότε η πίεση στην επιφάνεια του υδραργύρου είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Από τη διάταξη μέτρησης της πίεσης προκύπτει ότι:

$$p_1 = p_0 + \rho_{Hg} g h \quad \Rightarrow \quad p_1 = 101300\ \text{Pa} + (13600\ \text{kg/m}^2)(9{,}80\ \text{m/s}^2)(0{,}075\ \text{m}) \quad \Rightarrow$$

$$p_1 = 111300\ \text{Pa}$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ κεντρικού σωλήνα 1 και σωλήνων 2 και 3:

Η παροχή στον κεντρικό σωλήνα 1 είναι ίση με το άθροισμα των παροχών στους σωλήνες 2 και 3:

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 + A_3 \upsilon_3 \qquad (1)$$

Νόμος Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής 1 – 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + \upsilon_1^2 \qquad (2)$$

Νόμος Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής 1 – 3:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_3^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + \upsilon_1^2 \qquad (3)$$

Από τις Εξισώσεις 2 και 3 προκύπτει ότι $\upsilon_2 = \upsilon_3$. Οπότε η Εξίσωση 1 μπορεί να γραφεί:

$$A_1 \upsilon_1 = (A_2 + A_3)\upsilon_2 = (A_2 + A_3)\upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \upsilon_3 = \frac{A_1}{(A_2 + A_3)}\upsilon_1 \qquad (4)$$

Από τις Εξισώσεις 2 και 4 μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_1:

$$\frac{A_1^2}{(A_2 + A_3)^2}\upsilon_1^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} + \upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1^2}{(A_2 + A_3)^2}\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{A_1^2}{(A_2 + A_3)^2} - 1\right)\upsilon_1^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}\,\frac{1}{\dfrac{A_1^2}{(A_2 + A_3)^2} - 1}}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(111300 Pa - 101300\ Pa)}{1000\ \text{kg/m}^3}\,\frac{1}{\dfrac{(0{,}200\ \text{m}^2)^2}{(0{,}030\ \text{m}^2 + 0{,}070\ \text{m}^2)^2} - 1}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 2{,}58\ \text{m/s}$$

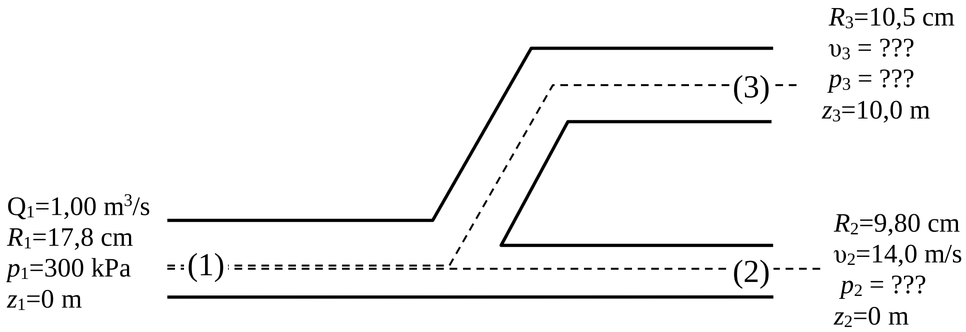
Από την Εξίσωση 4 παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = \upsilon_3 = \frac{A_1}{(A_2 + A_3)}\upsilon_1 = \frac{0{,}200\ \text{m}^2}{0{,}030\ \text{m}^2 + 0{,}070\ \text{m}^2} \times 2{,}58\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \upsilon_3 = 5{,}16\ \text{m/s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Σε ένα δίκτυο ύδρευσης ένας οριζόντιος σωλήνας που έχει ακτίνα R_1=17,8 cm διακλαδίζεται σε δυο σωλήνες από τους οποίους, ο ένας έχει ακτίνα R_2=9,80 cm και βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον αρχικό σωλήνα ενώ ο δεύτερος σωλήνας έχει ακτίνα R_3=10,5 cm και βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο που απέχει από το οριζόντιο επίπεδο του αρχικού σωλήνα απόσταση z_3=10,0 m (βλέπε παρακάτω σχήμα). Θεωρούμε ότι το νερό που ρέει μέσα στους σωλήνες συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό. Έχοντας ως δεδομένα ότι η παροχή νερού και η υδροστατική πίεση στον αρχικό σωλήνα (με ακτίνα R_1) είναι Q_1=1,00 m^3/s και p_1=300 kPa, αντίστοιχα και επί πλέον ότι η ταχύτητα ροής του νερού στο σωλήνα με ακτίνα R_2 είναι υ_2=14,0 m/s, να υπολογίσετε τις υδροστατικές πιέσεις p_2 και p_3 στους αντίστοιχους σωλήνες. (g =9,80 m/s^2).

ΛΥΣΗ



Στο Σχήμα φαίνονται οι συνθήκες που επικρατούν στο εσωτερικό του κεντρικού σωλήνα 1 και στο εσωτερικό των σωλήνων 2 και 3.

Αρχικά βρίσκουμε τις ταχύτητες του νερού στους σωλήνες 1 και 3:

$$Q_1 = A_1 \upsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{Q_1}{A_1} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \frac{Q_1}{\pi R_1^2} = \frac{1{,}00\ m^3/s}{3{,}14(0{,}178\ m)^2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 10{,}1\ m/s$$

Νόμος Συνεχείας μεταξύ του σωλήνα 1 και των σωλήνων 2 και 3:

Συμβολίζουμε με Q_2 και Q_3 τις παροχές στους σωλήνες 2 και 3.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = A_2\upsilon_2 + A_3\upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = \frac{Q_1 - A_2\upsilon_2}{A_3} \qquad (1)$$

όπου: $A_2 = \pi R_2^2$ και $A_3 = \pi R_3^2$

Οπότε, από την Εξίσωση 1 παίρνουμε:

$$\upsilon_3 = \frac{Q_1 - \pi R_2^2 \upsilon_2}{\pi R_3^2} = \frac{(1{,}00\ \mathrm{m^3/s}) - 3{,}14(0{,}0980\ \mathrm{m})^2(14{,}0\ \mathrm{m/s})}{3{,}14(0{,}105\ \mathrm{m})^2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = 16{,}7\ \mathrm{m/s}$$

Για να υπολογίσουμε τις στατικές πιέσεις μέσα στους σωλήνες 2 και 3 εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli κατά μήκος των ρευματικών γραμμών (1) – (2) και (1) – (3). Για την εφαρμογή του νόμου αυτού ορίζουμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο πάνω στο οποίο βρίσκονται οι σωλήνες 1 και 2. Κατόπιν τούτου, μόνο στο σωλήνα 3 υπάρχει πίεση $\rho g z_3$ λόγω υψομετρικής διαφοράς.

Νόμος Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής (1) – (2):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2)$$

$$p_2 = (300000\ \mathrm{Pa}) + \frac{1}{2}(1000\ \mathrm{kg/m^3})[(10{,}1\ \mathrm{m})^2 - (14{,}0\ \mathrm{m})^2] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{p_2} = 253000\ \mathrm{Pa}$$

Νόμος Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής (1) – (3):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 - \rho g z_3 \quad \Rightarrow$$

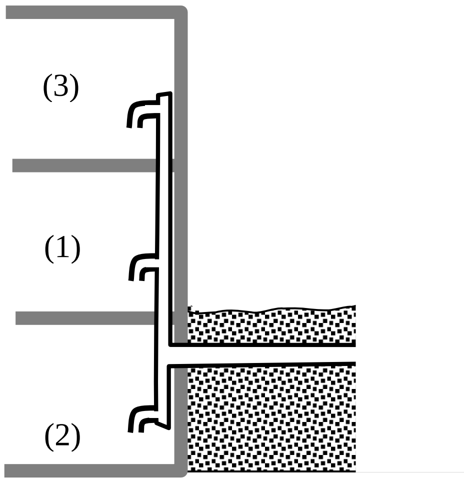
$$p_3 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_3^2 - 2gz_3)$$

$$p_3 = (300000\ \mathrm{Pa}) + \frac{1}{2}(1000\ \mathrm{kg/m^3})[(10{,}1\ \mathrm{m})^2 - (16{,}7\ \mathrm{m})^2 - 2(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})(10{,}0\ \mathrm{m})] \quad \Rightarrow$$

$$p_3 = 113560\ \mathrm{Pa} \quad \Rightarrow \quad p_3 = 114000\ \mathrm{Pa}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Μια οικία αποτελείται από ένα ισόγειο που συμβολίζουμε με (1), ένα πρώτο όροφο που συμβολίζουμε με (3) και ένα υπόγειο που συμβολίζουμε με (2). Και οι τρεις αυτοί όροφοι της οικίας έχουν ύψος h=4,00 m. Το δίκτυο ύδρευσης που τροφοδοτεί τη συγκεκριμένη οικία βρίσκεται σε βάθος h_1=1,00 m μέσα στη γη και διακλαδίζεται σε κάθε όροφο όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Η βρύση σε κάθε όροφο έχει άνοιγμα εκροής με διάμετρο d = 1,50 cm και απέχει απόσταση h_2=1,10 m από το αντίστοιχο πάτωμα.

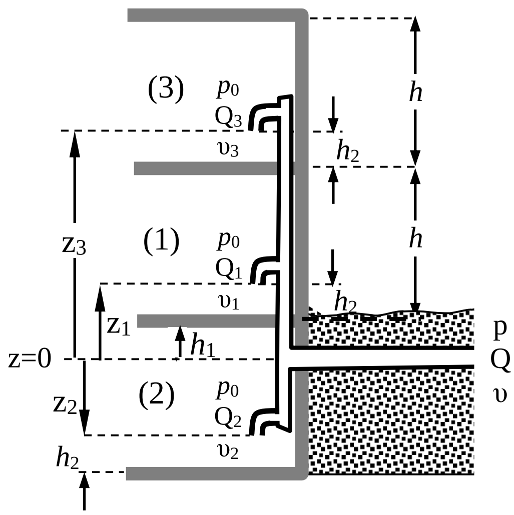


Να υπολογίσετε την παροχή Q με την οποία εταιρεία ύδρευσης πρέπει να τροφοδοτήσει την οικία, στην περίπτωση που, όταν και οι τρεις βρύσες είναι ανοιχτές, η παροχή της βρύσης του ορόφου (3) είναι ίση με $Q_3 = 7{,}95\text{x}10^{-4}$ m^3/s.

Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας g = 9,80 m/s^2 και η πυκνότητα του νερού ρ=1000 kg/m^3. Το νερό μέσα στους σωλήνες ύδρευσης να θεωρηθεί ως ιδανικό.

ΛΥΣΗ

Στο διπλανό σχήμα αποτυπώνονται όλα τα στοιχεία της άσκησης. Το εμβαδό της εξόδου κάθε βρύσης είναι:



$$A_\beta = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14(0{,}0150m)^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$A_\beta = 1{,}77 \times 10^{-4}\text{m}^2$$

Υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα υ_3 του νερού στη βρύση του ορόφου 3:

$$Q_3 = A_\beta \upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = \frac{Q_3}{A_\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_3 = \frac{(7{,}95 \times 10^{-4}\ m^3/s)}{1{,}77 \times 10^{-4}\text{m}^2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = 4{,}49\ \text{m/s}$$

(α) Για την εφαρμογή του νόμου του Bernoulli θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται ο κεντρικό σωλήνα ύδρευσης. Η στατική πίεση και η ταχύτητα του νερού στον κεντρικό σωλήνα ύδρευσης είναι αντίστοιχα p και υ.

Εφαρμογή Νόμου Bernoulli μεταξύ κεντρικού αγωγού ύδρευσης και βρύσης ορόφου 3:

Επειδή η βρύση του ορόφου 3 είναι ανοιχτή, η στατική πίεση στην έξοδό της είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Συμβολίζουμε με υ_3 την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στη βρύση αυτή και με z_3 την υψομετρική διαφορά μεταξύ της εξόδου της βρύσης του ορόφου 3 και του επιπέδου αναφοράς. Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$z_3 = h_1 + h + h_2 = 1{,}00\text{m} + 4{,}00\text{m} + 1{,}10\text{m} \quad \Rightarrow \quad z_3 = 6{,}10\ \text{m} \qquad (1)$$

Οπότε, η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 \qquad (2)$$

Εφαρμογή Νόμου Bernoulli μεταξύ κεντρικού αγωγού ύδρευσης και βρύσης ορόφου 1:

Επειδή η βρύση του ορόφου 1 είναι ανοιχτή, η στατική πίεση στην έξοδό της είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Συμβολίζουμε με $υ_1$ την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στη βρύση αυτή και με z_1 την υψομετρική διαφορά μεταξύ της εξόδου της βρύσης του ορόφου 1 και του επιπέδου αναφοράς. Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$z_1 = h_1 + h_2 = 1{,}00\mathrm{m} + 1{,}10\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z}_1 = 2{,}10\ \mathrm{m} \qquad (3)$$

Οπότε, η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g z_1 \qquad (4)$$

Οι Εξισώσεις 2 και 4 έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, οπότε και τα δεύτερα μέλη θα είναι ίσα. Λαμβάνοντας υπ' όψη και τις ισότητες 1 και 3, παίρνουμε:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g z_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 - \rho g z_1 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_3^2 + 2g(z_3 - z_1)} = \sqrt{(4{,}49m/s)^2 + 2(9{,}80m/s^2)(6{,}10m - 2{,}10m)} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 9{,}93\ m/s^2$$

Η παροχή της βρύσης του ορόφου 1 είναι ίση με:

$$Q_1 = A_\beta \upsilon_1 = (1{,}77 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2)(9{,}93\,\mathrm{m/s^2}) \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 17{,}6 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s} \qquad (5)$$

Εφαρμογή Νόμου Bernoulli μεταξύ κεντρικού αγωγού ύδρευσης και βρύσης ορόφου 2:

Επειδή η βρύση του ορόφου 2 είναι ανοιχτή, η στατική πίεση στην έξοδό της είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Συμβολίζουμε με $υ_2$ την ταχύτητα με την οποία ρέει το νερό στη βρύση αυτή και με z_2 την υψομετρική διαφορά μεταξύ της εξόδου της βρύσης του ορόφου 2 και του επιπέδου αναφοράς. Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$z_2 = -h - (-h_2) = -3{,}00\mathrm{m} + 1{,}10\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z}_2 = -1{,}90\ \mathrm{m} \qquad (6)$$

Οπότε, η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g z_2 \qquad (7)$$

Οι Εξισώσεις 2 και 7 έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, οπότε και τα δεύτερα μέλη θα είναι ίσα. Λαμβάνοντας υπ' όψη και τις ισότητες 1 και 5, παίρνουμε:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g z_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g z_3 - \rho g z_2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_3^2 + 2g(z_3 - z_2)} = \sqrt{(4{,}49m/s)^2 + 2(9{,}80m/s^2)(6{,}10m - (-1{,}90m))} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 13{,}3\ m/s^2$$

Η παροχή της βρύσης του ορόφου 2 είναι ίση με:

$$Q_2 = A_\beta \upsilon_2 = (1{,}77 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2)(13{,}3\,\mathrm{m/s^2}) \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 24{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s} \qquad (8)$$

Η συνολική παροχή Q του κεντρικού σωλήνας της ύδρευσης πρέπει να είναι ίση με:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (7{,}95 \times 10^{-4}\ m^3/s) + (17{,}6 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}) + (24{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s})$$

$$Q = 49{,}6 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s} \qquad (9)$$