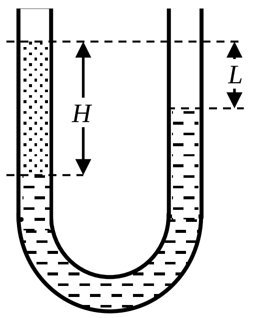
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

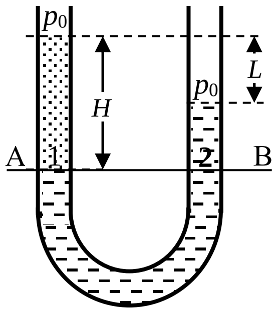
ΑΣΚΗΣΗ 1

Σε ένα σωλήνα σχήματος U τοποθετείται ένα άγνωστο υγρό που είναι αδιάλυτο στο νερό και το οποίο έχει πυκνότητα ρ_f. Στο αριστερό σκέλος του σωλήνα προστίθεται νερό μέχρις ένα ύψος H=30.0 cm. Αν η ελεύθερη άνω στάθμη του νερού βρίσκεται σε ύψος L=20,0 cm πάνω από τη δεξιά ελεύθερη στάθμη του άγνωστου υγρού. Να υπολογίσετε την πυκνότητα ρ_f του άγνωστου υγρού. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ_w=1,00 g/cm^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=9,80 m/s^2.



ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο (ΑΒ) που διέρχεται από τη διαχωριστική επιφάνεια των δυο υγρών. Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, στα σημεία 1 και 2 του επιπέδου αναφοράς οι πιέσεις p_1 και p_2 είναι ίσες μεταξύ τους:



$$p_1 = p_2 \qquad (1)$$

Η πίεση στο σημείο (1) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό και η οποία έχει ύψος H = 30,0 cm συν την ατμοσφαιρική πίεση p_0 που δρα στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού:

$$p_1 = \rho_w g H + p_0 \qquad (2)$$

Η πίεση στο σημείο (2) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης του άγνωστου υγρού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό και η οποία έχει ύψος $h = H - L$ = 10,0 cm συν την ατμοσφαιρική πίεση p_0 που δρα στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού:

$$p_2 = \rho_\mathrm{f} g h + p_0 = \rho_\mathrm{f} g (H - L) + p_0 \qquad (3)$$

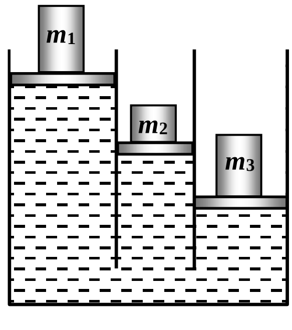
Από τις Εξισώσεις 1, 2 και 3 παίρνουμε:

$$\rho_w g H + p_0 = \rho_\mathrm{f} g (H - L) + p_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_\mathrm{f} = \frac{H}{H - L}\rho_w = \frac{30,0\ cm}{10,0\ cm} \times 1,00\ g/cm^3 \quad \Rightarrow$$

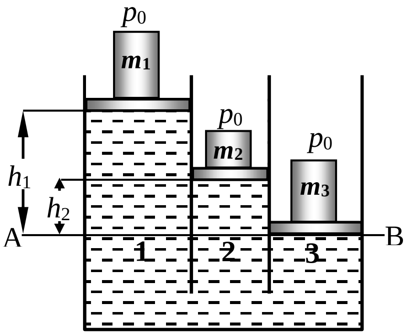
$$\rho_\mathrm{f} = 3,00\ g/cm^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ένα σύστημα τριών συγκοινωνούντων δοχείων τα οποία περιέχουν νερό και τα οποία καταλήγουν σε κατακόρυφους κυλινδρικούς σωλήνες που έχουν ακτίνες r_1=11,0 cm, r_2=8,00 cm και r_3=9,80 cm. Τα αντίστοιχα έμβολα που φράσουν τους σωλήνες αυτούς έχουν μάζες m_1=110 kg, m_2=61,0 kg και m_3=105 kg. Κάτω από τις συνθήκες και στην κατάσταση ισορροπίας, να υπολογίσετε την υψομετρική διαφορά μεταξύ των τριών εμβόλων. Πυκνότητα νερού ρ_w = 1000 g/cm^3 και g = 9,80 m/s^2.



ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο (AB) που διέρχεται από το έμβολο με μάζα m_3. Το έμβολο με μάζα m_3 βρίσκεται στη θέση με $h_3 = 0$. Οι υψομετρικές διαφορές μετρούνται ως προς το επίπεδο (AB). Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, στα σημεία 1, 2 και 3 του επιπέδου αναφοράς οι πιέσεις p_1, p_2 και p_3 είναι ίσες μεταξύ τους:

$$p_1 = p_2 = p_3 \qquad (1)$$

Η πίεση στο σημείο (1) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό και η οποία έχει ύψος h_1 συν την πίεση που προκαλεί το βάρος $w_1 = m_1g$ το βάρος του εμβόλου με μάζα m_1 συν την ατμοσφαιρική πίεση p_0 που δρα πάνω συγκεκριμένο έμβολο:

$$p_1 = \rho_w g h_1 + \frac{m_1 g}{A_1} + p_0 = \rho_w g h_1 + \frac{m_1 g}{\pi r_1^2} + p_0 \qquad (2)$$

όπου $A_1 = \pi r_1^2$ είναι το εμβαδό της επιφάνειας του εμβόλου με μάζα m_1.

Η πίεση στο σημείο (2) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό και η οποία έχει ύψος h_2, συν την πίεση που προκαλεί το βάρος $w_2 = m_2g$ το βάρος του εμβόλου με μάζα m_2 συν την ατμοσφαιρική πίεση p_0 που δρα πάνω στο συγκεκριμένο έμβολο:

$$p_2 = \rho_w g h_2 + \frac{m_2 g}{A_2} + p_0 = \rho_w g h_2 + \frac{m_2 g}{\pi r_2^2} + p_0 \qquad (3)$$

όπου $A_2 = \pi r_2^2$ είναι το εμβαδό της επιφάνειας του εμβόλου με μάζα m_2.

Η πίεση στο σημείο (32) είναι ίση με την πίεση που προκαλεί το βάρος $w_3 = m_3g$ το βάρος του εμβόλου με μάζα m_3 συν την ατμοσφαιρική πίεση p_0 που δρα πάνω στο συγκεκριμένο έμβολο:

$$p_3 = \frac{m_3 g}{A_3} + p_0 = \frac{m_3 g}{\pi r_3^2} + p_0 \qquad (4)$$

Από τις Εξισώσεις 1, 2 και 4 παίρνουμε:

$$p_1 = p_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_w g h_1 + \frac{m_1 g}{\pi r_1^2} + p_0 = \frac{m_3 g}{\pi r_3^2} + p_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_w g h_1 + \frac{m_1 g}{\pi r_1^2} = \frac{m_3 g}{\pi r_3^2} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_w h_1 + \frac{m_1}{\pi r_1^2} = \frac{m_3}{\pi r_3^2} \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{\dfrac{m_3}{\pi r_3^2} - \dfrac{m_1}{\pi r_1^2}}{\rho_w} = \frac{\dfrac{105\ \text{kg}}{3{,}14 \times (0{,}0980\ \text{m})^2} - \dfrac{110\ \text{kg}}{3{,}14 \times (0{,}110\ \text{m})^2}}{1000\ \text{kg/m}^3} \quad \Rightarrow$$

$$h_1 = 0{,}587\ \text{m}$$

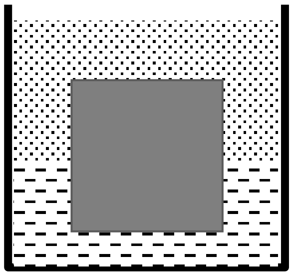
Από τις Εξισώσεις 1, 3 και 4 παίρνουμε:

$$p_2 = p_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_w g h_2 + \frac{m_2 g}{\pi r_2^2} + p_0 = \frac{m_3 g}{\pi r_3^2} + p_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_w g h_2 + \frac{m_2 g}{\pi r_2^2} = \frac{m_3 g}{\pi r_3^2} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_w h_2 + \frac{m_2}{\pi r_2^2} = \frac{m_3}{\pi r_3^2} \;\Rightarrow\; h_2 = \frac{\dfrac{m_3}{\pi r_3^2} - \dfrac{m_2}{\pi r_2^2}}{\rho_w} = \frac{\dfrac{105\ \text{kg}}{3{,}14 \times (0{,}0980\ \text{m})^2} - \dfrac{61{,}0\ \text{kg}}{3{,}14 \times (0{,}0800\ \text{m})^2}}{1000\ \text{kg/m}^3} \quad \Rightarrow$$

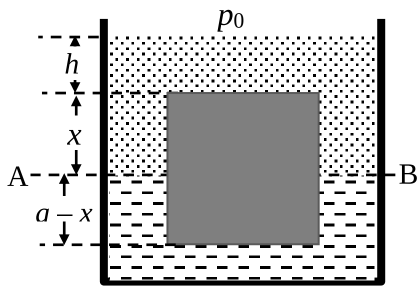
$$h_2 = 0{,}446\ \text{m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3



Μέσα σε μια δεξαμενή υπάρχουν δυο υγρά τα οποία είναι αδιάλυτα μεταξύ τους και τα οποία έχουν πυκνότητες ρ_1=0,85 g/cm^3 και ρ_2=1,00 g/cm^3. Ένας κύβος που είναι κατασκευασμένος από υλικό που έχει πυκνότητα ρ_c=0,90 g/cm^3 και η ακμή του έχει μήκος α=10,0 cm τοποθετείται μέσα στη δεξαμενή. Να προσδιορίσετε αριθμητικά τη θέση που θα ισορροπήσει ο κύβος σε σχέση με τη διαχωριστική επιφάνεια των δυο υγρών.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο (ΑΒ) το οποίο ταυτίζεται με τη διαχωριστική επιφάνεια των δυο υγρών.

Η πίεση p_1 στην πάνω επιφάνεια του κύβου οφείλεται στην ατμοσφαιρική πίεση p_0 και στην υδροστατική πίεση του υγρό με πυκνότητα ρ_1 σε βάθος h. Η πίεση αυτή είναι ίση με:

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h \qquad (1)$$

Η πίεση p_{AB} στη διαχωριστική επιφάνεια (ΑΒ) των δυο υγρών οφείλεται στην ατμοσφαιρική πίεση p_0 και στην υδροστατική πίεση του υγρού με πυκνότητα ρ_1 σε βάθος h+x. Η πίεση αυτή είναι ίση με:

$$p_{\text{AB}} = p_0 + \rho_1 g(h + x) \qquad (3)$$

Η πίεση p_2 στην κάτω επιφάνεια του κύβου είναι ίση με την πίεση p_{AB} συν την υδροστατική πίεση του υγρού με πυκνότητα ρ_2 σε βάθος a –x. Η πίεση αυτή είναι ίση με:

$$p_2 = p_{\text{AB}} + \rho_2 g(\alpha - x) = p_0 + \rho_1 g(h + x) + \rho_2 g(a - x) \qquad (4)$$

Η διαφορά πίεσης Δp μεταξύ κάτω και πάνω επιφάνειας του κύβου είναι ίση με:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 + \rho_1 g(h + x) + \rho_2 g(a - x) - (p_0 + \rho_1 g h) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta p = \cancel{p_0} + \cancel{\rho_1 g h} + \rho_1 g x + \rho_2 g a - \rho_2 g x - \cancel{p_0} - \cancel{\rho_1 g h} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta p = (\rho_1 - \rho_2) g x + \rho_2 g a \qquad (5)$$

Η συνισταμένη υδροστατική δύναμη που ασκείται πάνω στον κύβο αντιπροσωπεύει την άνωση F_B που υφίσταται ο κύβος. Η άνωση αυτή είναι ίση με:

$$F_B = (\Delta p)A = [(\rho_1 - \rho_2) g x + \rho_2 g a] a^2 \qquad (6)$$

όπου A = α^2 είναι το εμβαδό της πλευρά του κύβου.

Επειδή ο κύβος είναι σε στατική ισορροπία, η άνωση F_{B} πρέπει να είναι ίση με το βάρος F_{G} του κύβου:

$$F_B = F_G = [(\rho_1 - \rho_2) g x + \rho_2 g a] a^2 = m_c g = \rho_c V_c g = \rho_c a^3 g \quad \Rightarrow$$

$$[(\rho_1 - \rho_2) x + \rho_2 a] g a^2 = \rho_c a^3 g \quad \Rightarrow \quad (\rho_1 - \rho_2) x + \rho_2 a = \rho_c \alpha \quad \Rightarrow$$

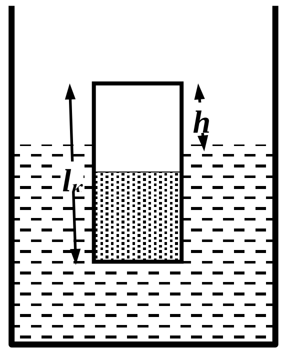
$$(\rho_1 - \rho_2) x = \rho_c \alpha - \rho_2 a = (\rho_c - \rho_2)\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\rho_c - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} a$$

$$x = \frac{(0{,}90\ \text{g/cm}^3) - (1{,}00\ \text{g/cm}^3)}{(0{,}85\ \text{g/cm}^3) - (1{,}00\ \text{g/cm}^3)} \times (10{,}0\ \text{cm}) \quad \Rightarrow \quad x = 6{,}67\ \text{cm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα κουτί αναψυκτικού των 455 ml έχει διάμετρο d=6,20 cm και μάζα $m_κ$=20,0 g. Το κουτί αυτό μισογεμάτο με νερό επιπλέει όρθιο στην ελεύθερη επιφάνεια νερού. Να υπολογίσετε το μήκος του κουτιού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του νερού; Η πυκνότητα του νερού είναι $ρ_ν$ = 1,00g/cm^3.

ΛΥΣΗ



Από τον όγκο $V_κ$ = 455 ml = 455 cm^3 και τη διάμετρο s$d_κ$ = 6,20 cm του κουτιού βρίσκουμε το ύψος $l_κ$ του κουτιού:

$$V_κ = \frac{\pi d^2}{4} l \;\Rightarrow\; l_κ = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \times 455\text{cm}^2}{3{,}14 \times 6{,}20^2\text{cm}^2} \;\Rightarrow\; l_κ = 15{,}1 \text{ cm}$$

Επειδή το κουτί περιέχει μέχρι τη μέση νερό, η μάζα $m_ν$ του νερού θα είναι ίση με:

$$m_ν = \rho_ν \frac{V_κ}{2} = 1{,}00 \text{ g/cm}^3 \frac{455 \text{ cm}^3}{2} \quad\Rightarrow\quad m_ν = 228 \text{ g}$$

Το βάρος F_G του κουτιού μαζί με το νερό (σε Newton) είναι:

$$F_G = (m_κ + m_ν)g = (0{,}020\text{kg} + 0{,}228\text{kg}) \times 9{,}80 \text{ m/s}^2 \quad\Rightarrow\quad F_G = 2{,}43\, N$$

Επειδή το κουτί ισορροπεί, το βάρος F_G πρέπει να είναι ίσο με την άνωση F_B που υφίσταται. Αν h είναι το μήκος του τμήματος του κουτιού που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του νερού, τότε η άνωση που θα ασκείται πάνω στο κουτί θα προκύπτει από τον όγκο V του κουτιού που είναι βυθισμένο στο νερό:

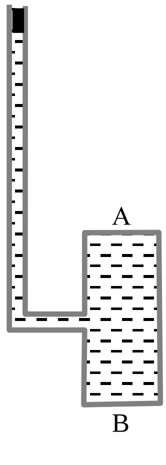
$$F_B = \rho_ν g V = \rho_ν g \frac{\pi d^2}{4}(l_κ - h)$$

Συνθήκη Ισπρροπίας: $F_B = F_G \quad\Rightarrow\quad \rho_ν g \frac{\pi d^2}{4}(l_κ - h) = F_G \quad\Rightarrow\quad l_κ - h = \frac{4F_G}{\pi \rho_ν g d^2} \quad\Rightarrow$

$$h = l_κ - \frac{4F_G}{\pi \rho_ν d^2} = 0{,}151 \text{ m} - \frac{4 \times (2{,}43 \text{ N})}{3{,}14 \times \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \times \left(9{,}80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \times (0{,}0620 \text{ m})^2} \quad\Rightarrow$$

$$h = 0{,}0688\, m \qquad \text{ή} \qquad h = 6{,}88\, cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

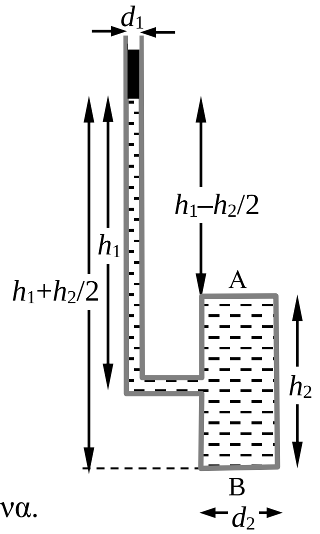


Στο διπλανό υδραυλικό σύστημα ο κατακόρυφος λεπτός σωλήνας έχει διάμετρο d_1=4,0 cm και ύψος μεγαλύτερο από ένα μέτρο. Το κυλινδρικό δοχείο έχει ύψος h_2=60,0 cm και διάμετρο βάσης d_2=20,0 cm. Το υδραυλικό σύστημα γεμίζει με νερό μέχρι ότου το ύψος του νερού μέσα στον κατακόρυφο λεπτό σωλήνα να γίνει ίσο με h_1=100,0 cm και στη συνέχεια φράσσεται με κινούμενο έμβολο το οποίο έχει μάζα m=10,0 kg. Να υπολογίσετε:

(α) Τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στη βάση Α του κυλινδρικού δοχείου.

(β) Τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στη βάση Β του κυλινδρικού δοχείου.

ΛΥΣΗ



Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, και στις δυο βάσεις (βάσεις A και B) επιδρούν η ατμοσφαιρική πίεση που υπάρχει στο άνοιγμα του κατακόρυφου σωλήνα καθώς και η πίεση που οφείλεται στο βάρος του εμβόλου:

Ατμοσφαιρική πίεση: P_0 = 101400 Pa.

Πίεση P_G λόγω του βάρους $F_G = mg$ του εμβόλου:

$$P_G = \frac{F_G}{A_1} = \frac{mg}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4mg}{\pi d_1^2} = \frac{4(10{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})}{3{,}14 \times (0{,}040\,\mathrm{m})^2} \quad \Rightarrow$$

$$P_G = 78000\ \mathrm{Pa}$$

όπου A είναι το εμβαδό της διατομής του κατακόρυφου λεπτού σωλήνα.

Η δύναμη F_A που ασκείται στην βάση A:

Εκτός από την ατμοσφαιρική πίεση και την πίεση λόγω του βάρους του εμβόλου, στη βάση A ασκείται και η υδροστατική πίεση P_1 λόγω της στήλης του νερού που βρίσκεται πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που ορίζεται από τη βάση A:

$$P_1 = \rho_v g\left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right) = (1000\,\mathrm{kg/m_3})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})\left(1{,}000\,\mathrm{m} - \frac{0{,}600\,\mathrm{m}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad P_1 = 6860\ \mathrm{Pa}$$

Η συνολική πίεση P_A στη βάση A είναι ίση με:

$$P_A = P_0 + P_G + P_1 = 101400\,Pa + 78000\ \mathrm{Pa} + 6860\,Pa \quad \Rightarrow \quad P_A = 186000\ \mathrm{Pa}$$

Η δύναμη που ασκείται πάνω στην κυκλική βάση A, η οποία έχει εμβαδό A_2, είναι ίση με:

$$F_A = P_A A_2 = P_A \frac{\pi d_2^2}{4} = (186000\ \mathrm{Pa})\frac{3{,}14 \times (0{,}200\ \mathrm{m})^2}{4} \quad \Rightarrow \quad F_A = 5840\ \mathrm{N}$$

Η δύναμη F_B που ασκείται στην βάση B:

Εκτός από την ατμοσφαιρική πίεση και την πίεση λόγω του βάρους του εμβόλου, στη βάση B ασκείται και η υδροστατική πίεση P_2 λόγω της στήλης του νερού που βρίσκεται πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που ορίζεται από τη βάση B:

$$P_2 = \rho_v g\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = (1000\,\mathrm{kg/m_3})(9{,}80\,\mathrm{m/s^2})\left(1{,}000\,\mathrm{m} + \frac{0{,}600\,\mathrm{m}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad P_2 = 12700\ \mathrm{Pa}$$

Η συνολική πίεση P_A στη βάση A είναι ίση με:

$$P_A = P_0 + P_G + P_2 = 101400\,Pa + 78000\ \mathrm{Pa} + 12700\,Pa \quad \Rightarrow \quad P_A = 192000\ \mathrm{Pa}$$

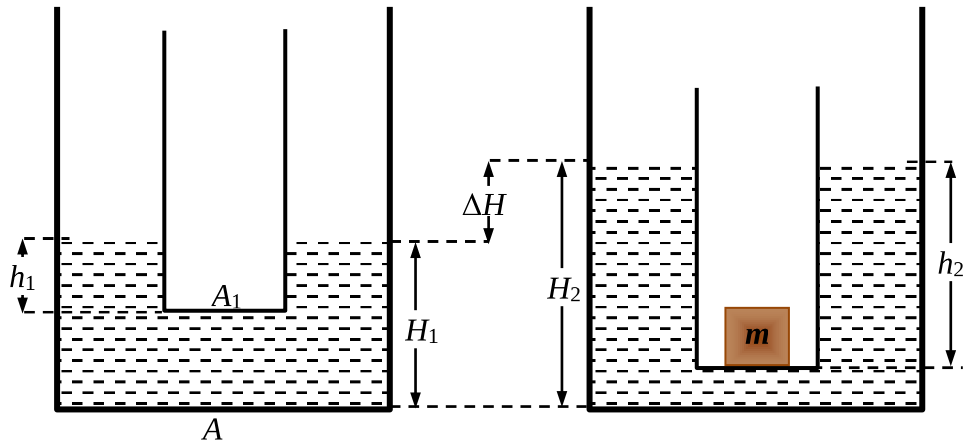
Η δύναμη που ασκείται πάνω στην κυκλική βάση A, η οποία έχει εμβαδό A_2, είναι ίση με:

$$F_A = P_A A_2 = P_A \frac{\pi d_2^2}{4} = (192000\ \mathrm{Pa})\frac{3{,}14 \times (0{,}200\ \mathrm{m})^2}{4} \quad \Rightarrow \quad F_A = 6000\ \mathrm{N}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα κυλινδρικό δοχείο επιπλέει στο νερό το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα άλλο μεγαλύτερο κυλινδρικό δοχείο του οποίου το εμβαδό της βάσης του είναι A=314 cm^2. Στο κυλινδρικό δοχείο που επιπλέει τοποθετείται μια μάζα m = 0,500 kg και η στάθμη του νερού ανέρχεται κατά διάστημα ΔH. Να υπολογίσετε το διάστημα ΔH. Η πυκνότητα του υγρού είναι ρ_υ=1,24 g/cm^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g = 9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ



Σχήμα της Άσκησης φαίνονται οι θέσεις του εσωτερικού κυλινδρικού σε σχέση με την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Συμβολίζουμε με m_δ τη μάζα του εσωτερικού κυλίνδρου.

Αρχική Κατάσταση: Το εσωτερικό δοχείο χωρίς το σώμα μάζας *m*.

Συνθήκη Ισορροπίας: Άνωση F_{B1} = Βάρος Κυλίνδρου $F_{G\delta}$

$F_{B1} = F_{G\delta} \quad \Rightarrow \quad \rho_\upsilon g h_1 A_1 = m_\delta g \qquad (1)$

Όγκος υγρού: $V_1 = AH_1 - A_1 h_1 \qquad (2)$

Τελική Κατάσταση: Το εσωτερικό δοχείο μαζί με το σώμα μάζας *m*.

Συνθήκη Ισορροπίας: Άνωση F_{B2} = Βάρος Κυλίνδρου $F_{G\delta}$ και Βάρος Μάζας

$F_{B2} = F_{G\delta} + mg \quad \Rightarrow \quad \rho_\upsilon g h_2 A_1 = m_\delta g + mg \qquad (3)$

Όγκος υγρού: $V_2 = AH_2 - A_1 h_2 \qquad (4)$

Και στις δυο καταστάσεις, η ποσότητα του υγρού (δηλαδή ο όγκος του υγρού), παραμένει η ίδια. Κατά συνέπεια, $V_1 = V_2$. Οπότε, από τις Εξισώσεις 2 και 4 παίρνουμε:

$AH_1 - A_1 h_1 = AH_2 - A_1 h_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 h_2 - A_1 h_1 = AH_2 - AH_1 = A(H_2 - H_1) \quad \Rightarrow$

$A_1(h_2 - h_1) = A(\Delta H) \qquad (5)$

Αφαιρούμε κατά μέλη την Εξίσωση 1 από την Εξίσωση 3:

$\rho_\upsilon g h_2 A_1 - \rho_\upsilon g h_1 A_1 = m_\delta g + mg - m_\delta g \quad \Rightarrow \quad \rho_\upsilon g A_1(h_2 - h_1) = mg \qquad (6)$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση 5 στην Εξίσωση 6 παίρνουμε:

$$\rho_\upsilon g A(\Delta H) = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \frac{m}{\rho_\upsilon A} = \frac{(0{,}500\text{kg})}{(1240\text{kg/m}^3)(314 \times 10^{-4}\text{m}^2)} \quad \Rightarrow \Delta H = 0{,}0128\text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα πλοίο με κατακόρυφα πλαϊνά τοιχώματα και συνολικής μάζας M=1,12x10^8 kg (μάζα πλοίου + μάζα φορτίου), έχει ένα βύθισμα μέσα στη θάλασσα που είναι ίσο με h_0=11,0 m και ένα εκτόπισμα όγκου θαλασσινού νερού που είναι ίσο με V_0. Το πλοίο πρόκειται να εισέλθει από τη θάλασσα σε ένα ποτάμι. Για να μη κολλήσει το πλοίο στην κοίτη του ποταμού, αποβάλλει έρμα στη θάλασσα έτσι ώστε η συνολική μάζα του πλοίου να μειώνεται κατά Δm=1,07x10^7 kg, οπότε το βύθισμα του πλοίου μέσα στη θάλασσα γίνεται ίσο με h_1=10,5 m και το αντίστοιχο εκτόπισμα όγκου θαλασσινού νερού γίνεται ίσο με V_1. Όταν το πλοίο ταξιδεύει στο ποτάμι, το βύθισμά του είναι h_2 και το αντίστοιχο εκτόπισμα όγκου είναι V_2. Οι πυκνότητες του θαλασσινού νερού και του νερού του ποταμού είναι αντίστοιχα ρ_θ=1,025 g/cm^3 και ρ_π=1,00 g/cm^3. Να υπολογίσετε:

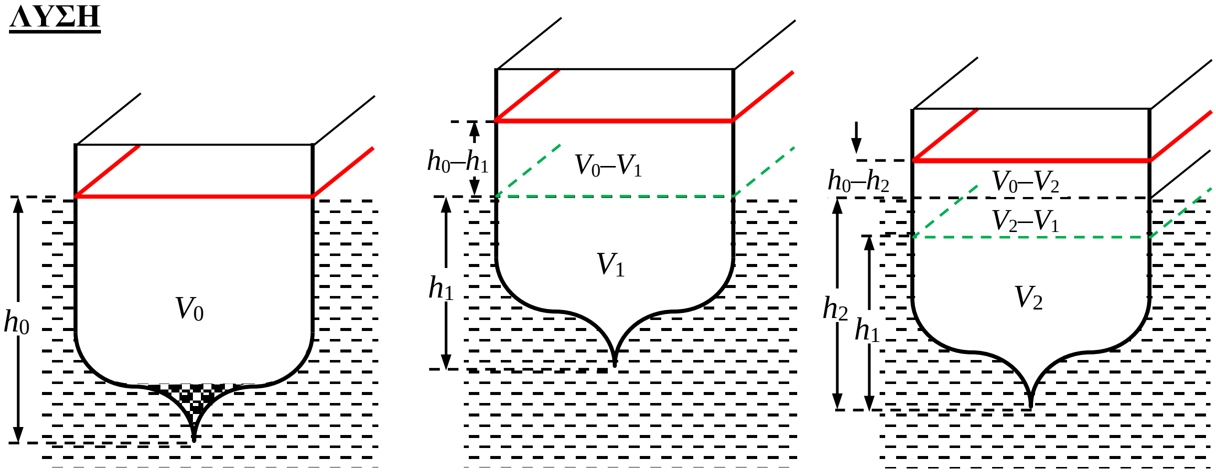
(α) Το εκτόπισμα όγκου V_0.

(β) Το εμβαδό A μιας οριζόντιας τομής του πλοίου.

(γ) Τη διαφορά $V_2 - V_1$ όπου V_2 και V_1 είναι το εκτόπισμα όγκου του πλοίου μέσα στο νερό του ποταμού και μέσα στο θαλασσινό νερό, αντίστοιχα.

(δ) Το βύθισμα h_2 του πλοίου μέσα στο νερό του ποταμού.

ΛΥΣΗ



Το πλοίο στη θάλασσα με έρμα | Το πλοίο στη θάλασσα χωρίς έρμα | Το πλοίο στο ποτάμι χωρίς έρμα

(α) **Το πλοίο με έρμα στη θάλασσα:**

Συνθήκη ισορροπίας: Άνωση F_{B0} = Βάρος πλοίου+φορτίου F_{G0}

$$\rho_\theta g V_0 = Mg \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{M}{\rho_\theta} \qquad (1)$$

$$V_0 = \frac{1{,}12 \times 10^8 \text{ kg}}{1025 \text{ kg/m}^3} \quad \Rightarrow \quad V_0 = 1{,}09 \times 10^5 \text{ m}^3$$

(β) **Το πλοίο χωρίς έρμα στη θάλασσα:**

Συνθήκη ισορροπίας: Άνωση F_{B1} = Βάρος πλοίου-φορτίου F_{G0} μείον βάρος έρματος

$$\rho_\theta g V_1 = Mg - (\Delta m)g \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{M - \Delta m}{\rho_\theta} \qquad (2)$$

Αφαιρώντας το έρμα, το πλοίο αναδύεται από τη θάλασσα κατά διάστημα $h_0 – h_1$. Αν A είναι το εμβαδό της οριζόντιας διατομής του πλοίου, τότε ο όγκος του πλοίου που αναδύεται είναι ίσος με:

$$\Delta V_{01} = V_0 - V_1 = A(h_0 - h_1) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V_0 - V_1}{h_0 - h_1} = \frac{\dfrac{M}{\rho_\theta} - \dfrac{M - \Delta m}{\rho_\theta}}{h_0 - h_1} \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{\Delta m}{\rho_\theta (h_0 - h_1)} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1{,}07 \times 10^7 \mathrm{kg}}{(1025 \mathrm{kg/m^3})(11{,}0\mathrm{m} - 10{,}5\mathrm{m})} \quad \Rightarrow \quad A = 20900 \mathrm{~m^2}$$

(γ) **Το πλοίο χωρίς έρμα στο ποτάμι:**

Συνθήκη ισορροπίας: Άνωση F_{B1} = Βάρος πλοίου-φορτίου F_{G0} μείον βάρος έρματος

$$\rho_\pi g V_2 = Mg - (\Delta m) g \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{M - \Delta m}{\rho_\pi} \qquad (3)$$

$$V_2 - V_1 = \frac{M - \Delta m}{\rho_\pi} - \frac{M - \Delta m}{\rho_\theta} \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \frac{M - \Delta m}{\rho_\theta}\left(\frac{\rho_\theta}{\rho_\pi} - 1\right) \qquad (4)$$

$$V_2 - V_1 = \frac{(1{,}12 \times 10^8 \mathrm{kg} - 1{,}07 \times 10^7 \mathrm{kg})}{1025 \mathrm{kg/m^3}}\left(\frac{1025 \mathrm{kg/m^3}}{1000 \mathrm{kg/m^3}} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$V_2 - V_1 = 2470 \mathrm{~m^3}$$

(δ) **Το πλοίο χωρίς έρμα στο ποτάμι:**

Το πλοίο βυθίζεται περισσότερο μέσα στο ποτάμι έτσι ώστε το νέο βύθισμά του να είναι ίσο με το ζητούμενο βύθισμα h_2. Σε σχέση με τη θάλασσα, το πλοίο μέσα στο ποτάμι βυθίζεται κατά διάστημα $h_2 – h_1$. Ο επί πλέον όγκος ΔV_{21} του πλοίου που βυθίζεται μέσα στο ποτάμι είναι ίσος με:

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = A(h_2 - h_1) \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = \frac{V_2 - V_1}{A} \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + \frac{V_2 - V_1}{A}$$

$$h_2 = 10{,}5 \mathrm{~m} + \frac{2470 \mathrm{~m^3}}{20900 \mathrm{~m^2}} \quad \Rightarrow \quad h_2 = 10{,}6 \mathrm{~m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ένας καταδυτικός κυλινδρικός κώδωνας που έχει βάρος F_G βυθίζεται μέσα στη θάλασσα μέχρι ένα βάθος H. Να υπολογίσετε:

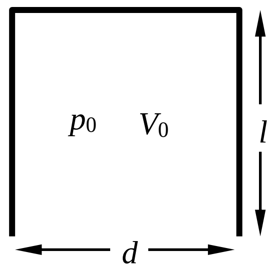
α. Το ύψος h της στάθμης του νερού μέσα στον καταδυτικό κώδωνα.

β. Τη δύναμη F με την οποία πρέπει να συγκρατείται ο κώδωνας στο βάθος H_0.

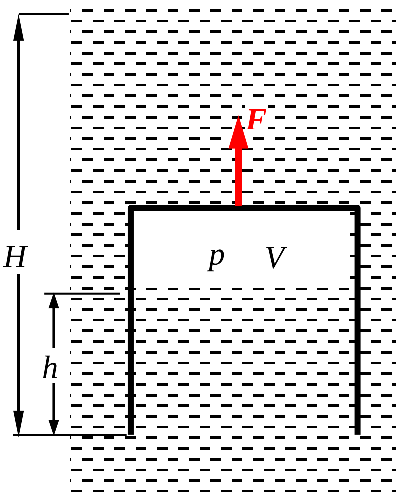
γ. Το βάθος H στο οποίο η δύναμη F του ερωτήματος β είναι μηδέν.

Δίνονται: Η διάμετρος του κώδωνα d=3,00 m, το ύψος του κώδωνα l=3,00 m, η μάζα του κώδωνα m=8,165x10^3 kg, το βάθος H = 22,0 m, η ατμοσφαιρική πίεση P_0 = 1,013 Pa, η πυκνότητα του αέρα ρ_α=1,25 kg/m^3 και η επιτάχυνση βαρύτητας g=9,80 m/s^2. Δίνεται επίσης και ο νόμος των Boyle και Marriot: pV=σταθερό, όπου p είναι η πίεση μέσα σε ένα όγκο V όταν η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή.

<u>ΛΥΣΗ</u>



(α) Όταν ο κώδωνας είναι έξω από τη θάλασσα, ο όγκος του αέρα που υπάρχει μέσα σε αυτόν είναι ίσος με τον όγκο V_0 του κώδωνα και η πίεσή του είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση p_0. Όταν ο κώδωνας βυθίζεται κατακόρυφα μέσα στη θάλασσα το νερό που εισέρχεται μέσα σε αυτόν συμπιέζει τον αέρα που εγκλωβίζεται έτσι ώστε στο επιλεγμένο βάθος H_0 ο όγκο του αέρα και η πίεσή του να είναι V και p, αντίστοιχα. Με την προϋπόθεση ότι η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των Boyle – Marriot:



$pV = p_0V_0$ (1)

Ατμοσφαιρική πίεση: p_0 = 101400 Pa (2)

Αρχικός όγκος κώδωνα: $V_0 = \frac{\pi d^2}{4} l$ (3)

Η στάθμη του νερού σταματά να ανέρχεται όταν η πίεση p του εγκλωβισμένου αέρα γίνει ίση με την υδροστατική πίεση p_υ στην επιφάνεια του νερού μέσα στον κώδωνα η οποία βρίσκεται σε βάθος $(H - h)$:

$p = p_\upsilon = p_0 + \rho_\theta g(H - h)$ (4)

Όγκος εγκλωβισμένου αέρα: $V = \frac{\pi d^2}{4}(l - h)$ (5)

Από τις Εξισώσεις 1, 3, 4 και 5 παίρνουμε:

$$[p_0 + \rho_\theta g(H_0 - h)]\cancel{\frac{\pi d^2}{4}}(l - h) = p_0\cancel{\frac{\pi d^2}{4}}l \;\Rightarrow\; [p_0 + \rho_\theta g(H - h)](l - h) = p_0 l \;\Rightarrow$$

$$h^2 - \left(\frac{p_0}{\rho_\theta g} + H + l\right)h + Hl = 0 \qquad (6)$$

$$h = \frac{\left(\frac{p_0}{\rho_\theta g} + H + l\right) - \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho_\theta g} + H + l\right)^2 - 4Hl}}{2} \qquad (7)$$

Η δεύτερη ρίζα τη δευτεροβάθμιας Εξίσωσης 6 απορρίπτεται, αφού το προκύπτον h είναι μεγαλύτερο από το ύψος l του κώδωνα.

$$\frac{p_0}{\rho_\theta g} + H + l = \frac{101300\ \mathrm{Pa}}{(1020\ \mathrm{kg/m^3})(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})} + 22{,}0\ \mathrm{m} + 3{,}00\ \mathrm{m} = 35{,}1\ \mathrm{m}$$

$$4Hl = 4(22{,}0\ \mathrm{m})(3{,}00\ \mathrm{m}) = 264\ \mathrm{m^2}$$

Οπότε, από την Εξίσωση 7 παίρνουμε:

$$h = \frac{35{,}1\ \mathrm{m} - \sqrt{(35{,}1\ \mathrm{m})^2 - 264\ \mathrm{m^2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 1{,}99\ \mathrm{m}$$

(β) **Υπολογισμός της δύναμης *F* που συγκρατεί των κώδωνα στο βάθος των 22,0 m.**

Πάνω στον κώδωνα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος F_G του κώδωνα με φορά προς τα κάτω:

$$F_G = mg = (8165kg)\left(\frac{9{,}80m}{s^2}\right) \quad \Rightarrow \quad 80000\text{N} \qquad (8)$$

Το βάρος $F_α$ της ποσότητας του αέρα που είναι εγκλωβισμένος μέσα στον κώδωνα. Η ποσότητα αυτή είναι ίση με την ποσότητα του αέρα που βρίσκονταν μέσα στον κώδωνα πριν αυτός βυθιστεί στο νερό. Πριν ο κώδωνας βυθιστεί μέσα στο νερό, η πίεση του αέρα μέσα στον κώδωνα είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0 και ο όγκος του αέρα είναι ίσος με τον αρχικό όγκο V_0 που δίνεται στην Εξίσωση 3. Στις συνθήκες αυτές η πυκνότητα του αέρα είναι ίση με $ρ_α = 1{,}25$ kg/m^3. Οπότε το βάρος του αέρα είναι ίσο με:

$$F_a = \rho_\alpha g V_0 = \rho_\alpha g \frac{\pi d^2}{4} l \qquad (9)$$

$$F_a = (1{,}25\ \text{kg/m}^3)(9{,}80\text{m/s}^2)\frac{3{,}14 \times (3{,}00\ \text{m})^2}{4}(3{,}00\text{m}) \quad \Rightarrow \quad F_a = 260\ \text{kg}$$

Η άνωση F_B. Δεδομένου ότι το πάχος των τοιχωμάτων του κώδωνα είναι πολλές φορές μικρότερο από τις διαστάσεις του κώδωνα, ο όγκος του θαλασσινού νερού που εκτοπίζεται από τον κώδωνα είναι πρακτικά ίσος με τον όγκο του εγκλωβισμένου αέρα, (βλέπε Εξίσωση 5), όπου $h = 1{,}99$ m. Οπότε, η άνωση θα είναι ίση με:

$$F_B = \rho_\theta g V = \rho_\theta g \frac{\pi d^2}{4}(l - h) \qquad (10)$$

$$F_B = (1020\text{kg/m}^3)(9{,}80\text{m/s}^2)\frac{3{,}14 \times (3{,}00\ \text{m})^2}{4}(3{,}00\text{m} - 1{,}99\ \text{m}) \Rightarrow$$

$$F_B = 71330\ \text{N}$$

Στο βάθος $H = 22{,}0$ m η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με:

$$F_{\text{net}} = F_B - F_G - F_a = 71330\ \text{N} - 88000\ \text{N} - 260\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{net}} = -8930\ \text{N}$$

Για να ισορροπήσει ο κώδωνας σε βάθος $H = 22{,}0$ m πρέπει πάνω σε αυτόν να ασκήσουμε μια ίση και αντίθετη δύναμη F:

$F = +8930$ N

(γ) Το βάθος H_0 στο οποίο η δύναμη F του ερωτήματος β είναι μηδέν.

Από την Εξίσωση 7 προκύπτει ότι σε βάθος $H = 3{,}00$ m (ο κώδωνα είναι οριακά καλυμμένος από το νερό) το ύψος του νερού μέσα στον κώδωνα θα είναι $h = 0{,}578$ m. Στην περίπτωση αυτή, από την Εξίσωση 10 βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη άνωση που θα ασκείται πάνω στον κώδωνα θα με $F_B = 171000$ N > $F_G = 80000$ N. Αυτό σημαίνει ότι, αρχικά για να βυθιστεί ο κώδωνας σε μεγαλύτερα βάθη πρέπει να ασκούμε πάνω σε αυτό κατάλληλη δύναμη με φορά προς τα κάτω. Όσο όμως ο κώδωνας μετατοπίζεται σε μεγαλύτερα βάθη, το ύψος της στάθμης του νερού μέσα σε αυτόν θα αυξάνεται με αποτέλεσμα να μειώνεται όγκος του εγκλωβισμένου αέρα και κατά συνέπεια να μειώνεται και η αντίστοιχη άνωση. Με άλλα λόγια, όσο ποιο βαθιά βρίσκεται ο κώδωνας τόσο ποιο μικρή θα είναι και η δύναμη που θα τον συγκρατεί στο αντίστοιχο βάθος. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα οριακό βάθος H_0 στο οποίο η στάθμη του νερού μέσα στον κώδωνα θα είναι h_0 και η συνισταμένη δύναμη F_{net} που θα ασκείται πάνω στον κώδωνα θα είναι ίση με το μηδέν:

$$F_{\text{net}} = F_B - F_G - F_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_\theta g \frac{\pi d^2}{4}(l - h_0) - mg - \rho_\alpha g \frac{\pi d^2}{4} l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$l - h_0 = \frac{4m}{\pi \rho_\theta} + \frac{\rho_\alpha}{\rho_\theta} l \quad \Rightarrow$$

$$h_0 = \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{\rho_\theta}\right) l - \frac{4m}{\pi d^2 \rho_\theta} = \left(1 - \frac{1{,}25\text{kg/m}^3}{1020\text{kg/m}^3}\right)(3{,}00\text{m}) - \frac{8165\text{kg}}{3{,}14(1020\text{kg/m}^3)} \quad \Rightarrow$$

$$h_0 = 1{,}86 \text{ m}$$

Για να υπολογίσουμε το βάθος H_0 στο οποίο η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στον κώδωνα είναι ίση με μηδέν χρησιμοποιούμε το νόμο των Boyle-Marriot (Εξίσωση 1 μαζί με τις Εξισώσεις 2, 3 και 4) με τη διαφορά ότι στις Εξισώσεις 3 και 4 αντικαθιστούμε το ύψος h με το ύψος h_0:

$$pV = p_0 V_0 \quad \Rightarrow \quad \big(p_0 + \rho_\theta g (H_0 - h_0)\big)\frac{\pi d^2}{4}(l - h_0) = p_0 \frac{\pi d^2}{4} l \quad \Rightarrow$$

$$p_0 + \rho_\theta g (H_0 - h_0) = p_0 \frac{l}{l - h_0} \quad \Rightarrow \quad p_0 + \rho_\theta g H_0 - \rho_\theta g h_0 = p_0 \frac{l}{l - h_0} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_\theta g H_0 = p_0 \frac{l}{l - h_0} - p_0 + \rho_\theta g h_0 \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{p_0}{\rho_\theta g}\left(\frac{l}{l - h_0} - 1\right) + h_0 \quad \Rightarrow$$

$$H_0 = \frac{p_0 h_0}{\rho_\theta g (l - h_0)} + h_0 \quad \Rightarrow \quad H_0 = \left(\frac{p_0}{\rho_\theta g (l - h_0)} + 1\right) h_0 \qquad (11)$$

$$H_0 = \left(\frac{101300 \text{ Pa}}{(1020 \text{ kg/m}^2)(9{,}80 \text{ m/s}^2)(3{,}00\text{m} - 1{,}86\text{m})} + 1\right)(1{,}86\text{m/s}^2) \quad \Rightarrow$$

$$H_0 = 18{,}4 \text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ο πυθμένας ενός σκάφους (μιας ρυμουλκούμενης φορτηγίδας) που είναι κατασκευασμένο από ατσάλινη λαμαρίνα έχει μήκος l = 5,00 m, πλάτος d = 2,00 m και πάχος w_1 = 0,020 m. Τα πλευρικά τοιχώματα του πλοίου είναι κατασκευασμένα και αυτά από ατσάλινη λαμαρίνα έχουν ύψος h =1,50 m και πάχος w_2 = 0,50 cm. Να υπολογίσετε

(α) Το βύθισμα του σκάφους στη θάλασσα όταν αυτό είναι άδειο

(β) Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να μεταφέρει το συγκεκριμένο σκάφος χωρίς αυτό να βυθιστεί.

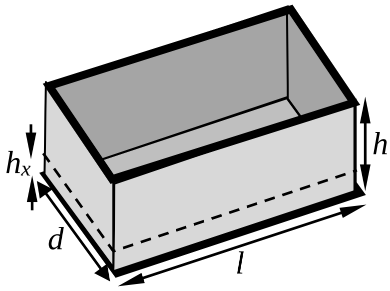
Πυκνότητα ατσάλινης λαμαρίνας ρ_λ = 8,00 g/cm^3. Πυκνότητα θαλασσινού νερού ρ_θ = 1,020 g/cm^3. Επιτάχυνση βαρύτητας g = 9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ

(α) Συμβολίζουμε με h_x το βύθισμα του σκάφους όταν αυτό είναι άδειο. Στην περίπτωση αυτή ο όγκος V_x του σκάφος που είναι βυθισμένο στη θάλασσα θα είναι ίσο με:

$$V_x = l d h_x \qquad (1)$$

Ο βυθισμένος αυτός όγκος υφίσταται άνωση:



$F_{Bx} = \rho_\theta g V_x \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = \rho_\theta g l d h_x \qquad (2)$

Επειδή το άδειο σκάφος ισορροπεί, το βάρος του θα πρέπει να είναι ίσο με την άνωση που υφίσταται. Το βάρος F_G του σκάφους είναι ίσο με το βάρος F_1 του πυθμένα συν το βάρος F_2 των πλευρικών τοιχωμάτων. Ο πυθμένας έχει μήκος l, πλάτος d και πάχος w_1 και όγκο ($V_{\text{πυθμένα}}$)= ldw_1. Οπότε το βάρος του πυθμένα θα είναι ίσο με:

$F_1 = \rho_\lambda (V_{\text{πυθμένα}}) g = \rho_\lambda l d w_1 g \qquad (3)$

Τα πλευρικά τοιχώματα του σκάφους έχουν συνολικό μήκος $2(d + l)$, ύψος h και πάχος w_2 και όγκο ($V_{\text{πλευρών}}$)= $2(l+d)hw_2$. Οπότε, το βάρος των πλευρικών τοιχωμάτων θα είναι ίσο με:

$F_2 = \rho_\lambda (V_{\text{πλευρών}}) g = \rho_\lambda 2(l+d) h w_2 g \qquad (4)$

Το συνολικό βάρος του σκάφους θα είναι ίσο με:

$F_G = F_1 + F_2 = \rho_\lambda l d w_1 g + \rho_\lambda 2(l+d) h w_2 g \qquad (5)$

Συνθήκη ισορροπίας: $F_{Bx} = F_G \quad \Rightarrow \quad \rho_\theta \cancel{g} l d h_x = \rho_\lambda l d w_1 \cancel{g} + \rho_\lambda 2(l+d) h w_2 \cancel{g} \quad \Rightarrow$

$$h_x = \frac{\rho_\lambda l d w_1 + \rho_\lambda 2(l+d) h w_2}{\rho_\theta l d} = \frac{\rho_\lambda}{\rho_\theta}\left(w_1 + \frac{2(l+d)h}{ld} w_2\right) \quad \Rightarrow$$

$$h_x = \frac{8000\,\text{kg/m}^3}{1020\,\text{kg/m}^3}\left(0{,}020\text{ m} + \frac{2(5{,}00\text{m} + 2{,}00\text{m})(1{,}50\text{m})}{(5{,}00\text{m})(2{,}00\text{m})}(0{,}005\text{ m})\right) \quad \Rightarrow$$

$h_x = 0{,}239\text{ m}$

(β) Συμβολίζουμε με m_x τη μάζα του μέγιστου φορτίου που μπορεί να δεχθεί το σκάφος χωρίς αυτό να βυθιστεί. Με το φορτίο αυτό, το βύθισμα του σκάφους θα είναι οριακά ίσο με το ύψος h των πλευρικών τοιχωμάτων του. Στην περίπτωση αυτή, το συνολικό βάρος F_{net} του σκάφους θα είναι ίσο με:

$F_{net} = (\text{βάρος σκάφους}) + (\text{βάρος μέγιστου φορτίου})$

$F_{net} = \rho_\lambda l d w_1 g + \rho_\lambda 2(l+d) h w_2 g + m_x g \qquad (6)$

και η άνωση θα είναι ίση με:

$F_{Bh} = \rho_\theta g V_h \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = \rho_\theta g l d h \qquad (7)$

Συνθήκη ισορροπίας: $F_{Bh} = F_{net} \quad \Rightarrow$

$$\rho_\theta \cancel{g} l d h = \rho_\lambda l d w_1 \cancel{g} + \rho_\lambda 2(l+d) h w_2 \cancel{g} + m_x \cancel{g} \quad \Rightarrow$$

$$m_x = \rho_\theta l d h - \rho_\lambda l d w_1 - 2\rho_\lambda (l+d) h w_2 = (\rho_\theta h - \rho_\lambda w_1) l d - 2\rho_\lambda (l+d) h w_2 \quad \Rightarrow$$

$$m_x = [(1020\text{kg/m}^2)(1{,}50\text{m}) - (8000\text{ kg/m}^2)(0{,}020\text{m})](5{,}00\text{m})(2{,}00\text{m}) -$$

$$-2(8000\text{ kg/m}^3)(5{,}00\text{m} + 2{,}00\text{m})(1{,}50\text{m})(0{,}005\text{m}) \quad \Rightarrow$$

$m_x = 12860\text{ kg}$

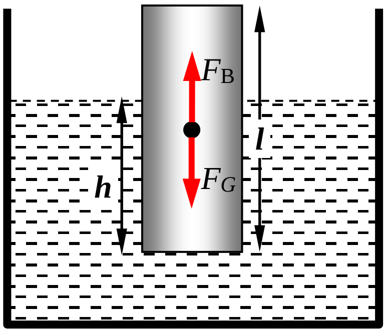
ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένας κύλινδρος, που είναι κατασκευασμένος από υλικό που έχει πυκνότητα ρ_0, έχει ύψος l και διάμετρο βάσης d. Ο κύλινδρος αυτός επιπλέει εντός υγρού που έχει πυκνότητα ρ_f με τον άξονά του να είναι κατακόρυφος. Όταν ο κύλινδρος είναι σε ισορροπία, το τμήμα αυτού που είναι βυθισμένο έχει μήκος h.

(α) Να αποδείξετε ότι $h=(\rho_0/\rho_f)l$.

(β) Υποθέστε ότι ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά διάστημα y πάνω από τη θέση ισορροπίας. Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει την συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στον κύλινδρο συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

ΛΥΣΗ



Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί μέσα στο υγρό, το βάρος του F_G πρέπει να είναι ίσο με την άνωση F_B:

$$F_B = F_G \qquad (1)$$

$$F_B = mg = \rho_0 V_c g = \rho_0 A l g \qquad (2)$$

όπου $V_c = Al$ είναι ο όγκος του κυλίνδρου και A είναι το εμβαδό της βάσης του κυλίνδρου.

$$F_G = \rho_f g V_B = \rho_f g A h \qquad (3)$$

όπου $V_B = Ah$ είναι ο όγκος του βυθισμένου κυλίνδρου.

Από τις Εξισώσεις 1, 2 και 3 παίρνουμε:

$$\rho_0 \cancel{A} l \cancel{g} = \rho_f \cancel{g} \cancel{A} h \quad \Rightarrow \quad \rho_0 l = \rho_f h \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{\rho_0}{\rho_f}\right) l$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει την ατμοσφαιρική πίεση p(z) με την απόσταση z από την επιφάνεια της θάλασσας. Επίσης να υπολογίσετε το ύψος z_0 (από την επιφάνεια της θάλασσας) στο οποίο η ατμοσφαιρική πίεση $p(z_0)=p_0/e$.
Δίνονται:
Η υδροστατική πίεση και η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της θάλασσας είναι p_0=101,3 kpa και ρ_0=1,17 kg/m^3, αντίστοιχα.
Η θερμοκρασία T και η επιτάχυνση της βαρύτητας g σε όλο το ύψος της τροπόσφαιρας είναι περίπου σταθερά.
Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $pV = nRT$, δεδομένου ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας μπορεί να θεωρηθεί ως ιδανικό αέριο σταθερής θερμοκρασίας T.

ΛΥΣΗ

Στην καταστατική εξίσωση των αερίων, η παράμετρος n είναι ο αριθμός των γραμμομορίων αέρα που βρίσκεται σε όγκο V υπό πίεση p και θερμοκρασία T. Η παράμετρος R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων. Εξ ορισμού, ο αριθμός n των γραμμομορίων ισούτε με τη μάζα m του αέρα που βρίσκεται στον όγκο V δια του μέσου μοριακού βάρους M του αέρα:

$$n = \frac{m}{M}$$

Οπότε, από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων παίρνουμε:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} \quad \Rightarrow \quad p = \rho\frac{RT}{M}$$

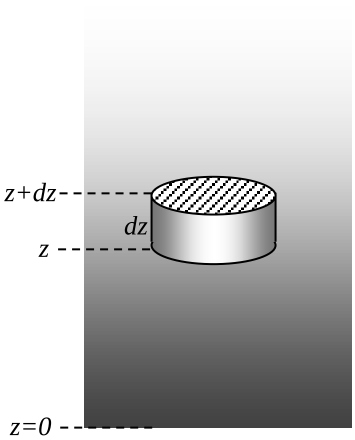
όπου ρ=*m*/*V* είναι η πυκνότητα του αέρα.

Στην επιφάνεια της θάλασσας: $p_0 = \rho_0\frac{RT}{M}$ (1)

Σε ύψος z από την επιφάνεια της θάλασσας: $p = \rho\frac{RT}{M}$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις Εξισώσεις 1 και 2 παίρνουμε:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad (3)$$



Σε ύψος z θεωρούμε μια στοιχειώδη κυλινδρική στήλη αέρα ύψους *dz* και εμβαδού βάσης *A*. Στην υψομετρική διαφορά *dz*>0 η μεταβολή της πίεσης είναι *dp* είναι αρνητική (η πίεση μικραίνει όσο το z μεγαλώνει) και ίση με:

$$dp = -\rho dz \qquad (4)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα στο ύψος z. Από τις Εξισώσεις 3 και 4 έχουμε:

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0}pgdz \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}dz \qquad (5)$$

Ολοκληρώνοντας την Εξίσωση 5 από το ύψος z=0 έως το ύψος βρίσκουμε την πίεση συναρτήσει του ύψους z:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}\int_0^z dz \quad \Rightarrow \quad lnp\Big|_{p_0}^{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}z\Big|_0^z \quad \Rightarrow \quad lnp - lnp_0 = -\frac{\rho_0 g}{p_0}z \quad \Rightarrow$$

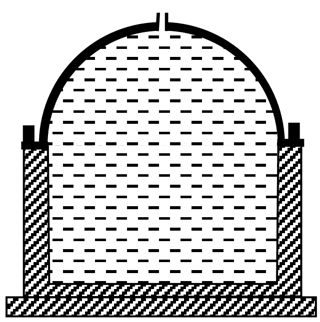
$$ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g}{p_0}z \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z} \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z} \qquad (6)$$

Στην Εξίσωση 6 θέτουμε όπου *p*(*z*)=*p*(z$_0$)=*p*$_0$/e για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ύψος z$_0$:

$$\frac{\cancel{p_0}}{e} = \cancel{p_0}e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} = e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}z_0} \quad \Rightarrow \quad e = e^{+\frac{\rho_0 g}{p_0}z_0} \quad \Rightarrow \quad \ln(e) = \ln\left(e^{+\frac{\rho_0 g}{p_0}z_0}\right) \quad \Rightarrow$$

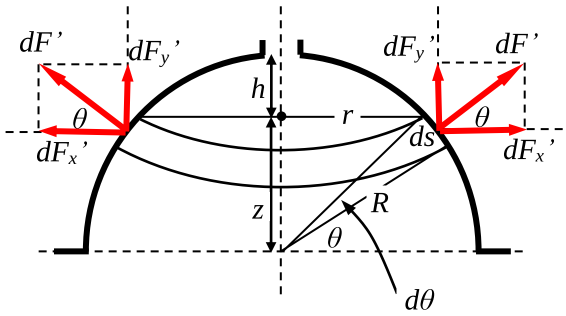
$$1 = \frac{\rho_0 g}{p_0}z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{101300\ \mathrm{Pa}}{(1{,}17\ \mathrm{kg/m^2})(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z}_0 = 8830\ \mathrm{m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12



Η οροφή μια κυλινδρικής δεξαμενής νερού είναι που έχει ακτίνα βάσης *R*=1,0 m είναι ημισφαιρική με ακτίνα *R*, είναι κατασκευασμένη από μέταλλο, έχει μάζα *m*=135 kg και φέρει μικρή οπή στην κορυφή της. Η οροφή αυτή είναι βιδωμένη υδατοστεγώς στο άνω χείλος της κυλινδρική δεξαμενής με 16 βίδες. Να υπολογίσετε το μέτρο και τη φορά της δύναμης που ασκείται πάνω σε κάθε βίδα.

ΛΥΣΗ



Διαιρούμε τον ημισφαιρικό θόλο σε στενές κυκλικές λωρίδες πλάτους ds η κάθε μια από αυτές. Επιλέγουμε μια τυχαία λωρίδα η οποία έχει ακτίνα r και απέχει από τη βάση του θόλου απόσταση z. Η ελεύθερη στάθμη του υγρού που είναι μέσα στο θόλο βρίσκεται στην κορυφή του θόλου εκεί όπου είναι η οπή. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επηρεάζει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο θόλο επειδή η πίεση αυτή υπάρχει και εντός του θόλου λόγω της οπής. Όλα τα σημεία που είναι πάνω στην επιλεγμένη λωρίδα βρίσκονται στο ίδιο βάθος h και ως εκ τούτου δέχονται την ίδια υδροστατική πίεση:

$$p = \rho_v g h = \rho_v g(R - z) \qquad (1)$$

όπου ρ_v=1000 kg/m^3 είναι η πυκνότητα του νερού. Λόγω αυτής της υδροστατικής πίεσης, σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας ασκούνται ίσες κάθετες δυνάμεις dF' οι οποίες αναλύονται σε δυο συνιστώσες. Στην οριζόντια dF_x' και στην κατακόρυφη dF_y'. Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας η οριζόντια συνιστώσα dF_x' είναι ίση και αντίθετη με την αντίστοιχη οριζόντια συνιστώσα dF_x' της δύναμης που ασκείται πάνω σε αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα της λωρίδα. Οι οριζόντιες αυτές συνιστώσες αλληλοεξουδετερώνονται με αποτέλεσμα οι συνιστώσες αυτές να μην επηρεάζουν τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στις βίδες που κρατούν τον ημισφαιρικό θόλο στην δεξαμενή νερού. Οι δυνάμεις που καταπονούν τις βίδες αυτές είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες dF_y' οι οποίες είναι ίσες με:

$$dF_y' = dF' \sin\theta \qquad (2)$$

Η υδροστατική δύναμη dF' ασκείται σε ένα πολύ μικρό τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας. Η συνολική δύναμη dF που ασκείται πάνω σε ολόκληρη τη λωρίδας θα είναι ίση με:

$$dF = (\text{υδραστατική πίεση}) \times (\text{εμβαδό επιφάνειας λωρίδας}) \qquad (3)$$

$$(\text{εμβαδό επιφάνειας λωρίδας}) = 2\pi r(ds) \qquad (4)$$

όπου ($2\pi r$) είναι το μήκος της περιφέρειας της λωρίδας και ds είναι το πλάτος της λωρίδας. Οπότε από τις Εξισώσεις 1, 3 και 4 βρίσκουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στην επιλεγμένη λωρίδα:

$$dF = \rho_v g(R - z)2\pi r(ds) = 2\pi\rho_v g(R - z)r(ds) \qquad (5)$$

Από τις Εξισώσεις 2 και 5 βρίσκουμε τη συνολική κατακόρυφη δύναμη dF_y που ασκείται πάνω στη λωρίδα:

$$dF_y = dF\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dF_y = 2\pi\rho_v g(R - z)r(ds)\sin\theta \qquad (6)$$

Για να βρούμε τη συνολική δύναμη F_y, η οποία σπρώχνει προς τα πάνω τον ημισφαιρικό θόλο, πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 6. Για να γίνει η ολοκλήρωση πρέπει η Εξίσωση αυτή να εκφραστεί ως προς μια μόνο μεταβλητή. Για ευκολία μας επιλέγουμε τη γωνία θ ως τη μόνη μεταβλητή στην Εξίσωση 6. Η γωνία θ=0 αντιστοιχεί στην πρώτη λωρίδα που βρίσκεται στη βάση του θόλου. Η γωνία θ=(π/2) αντιστοιχεί στην τελευταία λωρίδα που βρίσκεται στην κορυφή του θόλου. Κατόπιν τούτων, με τη βοήθεια του σχήματος, εκφράζουμε τις παραμέτρους *z*, *r* και *ds* συναρτήσει της γωνίας θ:

$$z = R\sin\theta\,, \qquad r = R\cos\theta \quad \kappa\alpha\iota \quad ds = R\,d\theta \qquad (7)$$

Οπότε, η Εξίσωση 6 γράφεται:

$$dF_y = 2\pi\rho_v g(R - R\sin\theta)R\cos\theta\, R\, d\theta \sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$dF_y = 2\pi\rho_v gR^3 cos\theta \sin\theta\, d\theta - 2\pi\rho_v gR^3 \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow$$

$$F_y = \int dF_y = \int_0^{p/2} (2\pi\rho_v gR^3 cos\theta \sin\theta\, d\theta - 2\pi\rho_v gR^3 \sin\theta \cos\theta\, d\theta) \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gR^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta - 2\pi\rho_v gR^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gR^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d(\sin\theta) - 2\pi\rho_v gR^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d(\sin\theta)\, F_y \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gR^3 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} - 2\pi\rho_v gR^3 \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi\rho_v gR^3 - \frac{2}{3}\pi\rho_v gR^3 \quad \Rightarrow$$

$$F_y = \frac{1}{3}\pi\rho_v gR^3 \qquad (8)$$

$$F_y = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (1000\, kg/m^3) \times (9{,}80\, m/s^2) \times (1{,}00\, m)^3 \quad \Rightarrow \quad F_y = 10300\, N$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στον ημισφαιρικό θόλο είναι:

$$F_{net} = F_y - (\text{βάρος θόλου}) = \frac{1}{3}\pi\rho_v gR^3 - mg = (10300\ \mathrm{N}) - (135\ \mathrm{kg})(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})$$

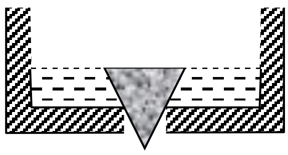
$$F_{net} = 8980\ \mathrm{N}$$

Η δύναμη *F* που ασκείται πάνω σε κάθε μια από τις 16 βίδες που συγκρατούν τον ημισφαιρικό θόλο στο επάνω μέρος της δεξαμενής θα είναι ίση με:

$$F = \frac{F_{net}}{16} = \frac{8980\ N}{16} \quad \Rightarrow \quad F = 560\ \mathrm{N}$$

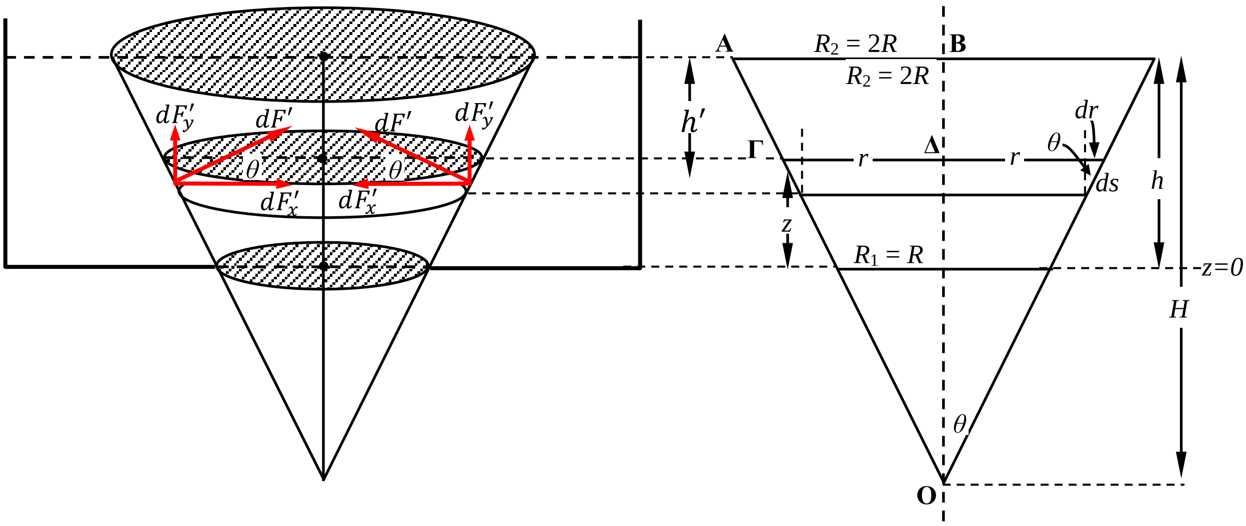
ΑΣΚΗΣΗ 13

Ένα κωνικό πώμα το οποίο έχει μάζα m = 2,09 g κλείνει την οπή εκροής μιας δεξαμενής νερού η οποία έχει ακτίνα R_1=R=0,50 cm. Ο κώνος έχει ύψος H=1,00 cm και η βάση του που έχει ακτίνα R_2 = 2R =1,00 cm, είναι σε οριζόντια θέση και βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τη στάθμη του νερού. Να υπολογίσετε τη δύναμη που πρέπει να ασκήσετε πάνω στο πώμα για να ανοίξει η οπή εκροής της δεξαμενής.



ΛΥΣΗ

Διαιρούμε την κωνική επιφάνεια σε στενές κυκλικές λωρίδες πλάτους *ds* η κάθε μια από αυτές. Επιλέγουμε μια τυχαία λωρίδα η οποία έχει ακτίνα *r* και απέχει από τον πυθμένας της δεξαμενής απόσταση z. Επειδή η βάση του κωνικού πώματος και η ελεύθερη στάθμη του νερού είναι εκτεθειμένες στην ατμόσφαιρα, η ατμοσφαιρική πίεση δεν επηρεάζει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στην κωνική επιφάνεια.



Όλα τα σημεία που είναι πάνω στην επιλεγμένη λωρίδα βρίσκονται στο ίδιο βάθος h' και ως εκ τούτου δέχονται την ίδια υδροστατική πίεση:

$$p = \rho_v g h' = \rho_v g(h - z) \qquad (1)$$

όπου ρ_v=1000 kg/m^3 είναι η πυκνότητα του νερού. Λόγω αυτής της υδροστατικής πίεσης, σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας ασκούνται ίσες κάθετες δυνάμεις *dF’* οι οποίες αναλύονται σε δυο συνιστώσες. Στην οριζόντια dF_x' και στην κατακόρυφη dF_y'. Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας η οριζόντια συνιστώσα dF_x' είναι ίση και αντίθετη με την αντίστοιχη οριζόντια συνιστώσα dF_x' της δύναμης που ασκείται πάνω στο αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα της λωρίδα. Οι οριζόντιες αυτές συνιστώσες αλληλοεξουδετερώνονται με αποτέλεσμα οι συνιστώσες αυτές να μην επηρεάζουν τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στην κωνική επιφάνεια. Αντίθετα, οι κατακόρυφες συνιστώσες dF_y' είναι αυτές που τείνουν να κινήσουν κατακόρυφα προς τα πάνω το κωνικό πώμα. Από το αριστερό σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$dF_y' = dF' \sin\theta \qquad (2)$$

Η υδροστατική δύναμη *dF’* ασκείται σε ένα πολύ μικρό τμήμα της επιλεγμένης λωρίδας. Η συνολική δύναμη dF που ασκείται πάνω σε ολόκληρη τη λωρίδας θα είναι ίση με:

$$dF = (\text{υδραστατική πίεση}) \times (\text{εμβαδό επιφάνειας λωρίδας}) \qquad (3)$$

$$(\text{εμβαδό επιφάνειας λωρίδας}) = 2\pi r(ds) \qquad (4)$$

Όπου r είναι η ακτίνα της κυκλικής τομής του κώνου και ($2\pi r$) είναι το μήκος της περιφέρειας της λωρίδας και ds είναι το πλάτος της λωρίδας. Οπότε από τις Εξισώσεις 1, 3 και 4 βρίσκουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στην επιλεγμένη λωρίδα:

$$dF = \rho_v g(h - z)2\pi r(ds) = 2\pi\rho_v g(h - z)r(ds) \qquad (5)$$

Από τις Εξισώσεις 2 και 5 βρίσκουμε τη συνολική κατακόρυφη δύναμη dF_y που ασκείται πάνω στην επιλεγμένη λωρίδα:

$$dF_y = dF\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dF_y = 2\pi\rho_v g(h - z)r(ds)\sin\theta \qquad (6)$$

Από το δεξιό σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι: $(ds)\sin\theta = dr$, όπου dr είναι η μεταβολή της ακτίνα της οριζόντιας κυκλικής τομής του κώνου η οποία αντιστοιχεί σε μετατόπιση ds πάνω στην κωνική επιφάνεια. Οπότε, η Εξίσωση 6 γράφεται:

$$dF_y = 2\pi\rho_v g(h-z)r(dr) \qquad (7)$$

Για να βρούμε τη συνολική δύναμη F_y, η οποία σπρώχνει προς τα πάνω κωνικό πώμα, πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 7. Για να γίνει η ολοκλήρωση πρέπει η Εξίσωση αυτή να εκφραστεί ως προς μια μόνο μεταβλητή. Όμως, η Εξίσωση αυτή έχει δυο μεταβλητές, την ακτίνα r της οριζόντιας κυκλικής τομής του κώνου και την απόσταση z της τομής αυτής από τον πυθμένα της δεξαμενής. Επιλέγουμε ως κύρια μεταβλητή την ακτίνα r και εκφράζουμε την απόσταση z συναρτήσει του r. Η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος του κωνικού πώματος το οποίο καλύπτεται από το νερό, δηλαδή από τον πυθμένα της δεξαμενής όπου $r = R$, έως την ελεύθερη στάθμη του νερού όπου $r = 2R$.

Συγκεκριμένα, από τα όμοια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ παίρνουμε την αναλογία:

$$\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{(OB)}{(O\Delta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2R}{r} = \frac{H}{H-h+z} \quad \Rightarrow \quad h - z = H - \frac{H}{2R}r = H\left(1 - \frac{1}{2R}r\right)$$

Οπότε, η Εξίσωση 7 γράφεται:

$$dF_y = 2\pi\rho_v gH\left(1 - \frac{1}{2R}r\right)r(dr) \qquad (8)$$

$$dF_y = 2\pi\rho_v gHrdr - 2\pi\rho_v g\frac{H}{2R}r^2dr \quad \Rightarrow$$

$$F_y = \int dF_y = \int_R^{2R}\left(2\pi\rho_v gHr\,dr - 2\pi\rho_v g\frac{H}{2R}r^2dr\right) \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gH\left(\int_R^{2R} rdr - \frac{1}{2R}\int_R^{2R} r^2dr\right) \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gH\left(\left[\frac{1}{2}r^2\right]_R^{2R} - \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_R^{2R}\right) = 2\pi\rho_v gH\left[\frac{1}{2}(4R^2 - R^2) - \frac{1}{6R}(8R^3 - R^3)\right] \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 2\pi\rho_v gH\left[2R^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{3} + \frac{R^2}{6}\right] \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{2}{3}\pi\rho_v gHR^2 \qquad (9)$$

$$F_y = \frac{2}{3} \times 3{,}14 \times (1000\,kg/m^3) \times (9{,}80\,m/s^2) \times (0{,}01\,m) \times (0{,}005\,m)^2 \quad \Rightarrow$$

$$F_y = 0{,}00513\,N$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο κωνικό πώμα είναι:

$$F_{net} = F_y - (\text{βάρος κωνικού πώματος}) = \frac{2}{3}\pi\rho_v gHR^2 - mg \quad \Rightarrow$$

$$F_{net} = (0{,}00513\,N) - (0{,}00209)(9{,}80\ \mathrm{m/s^2})$$

$$F_{net} = -0{,}0154\ \mathrm{N}$$

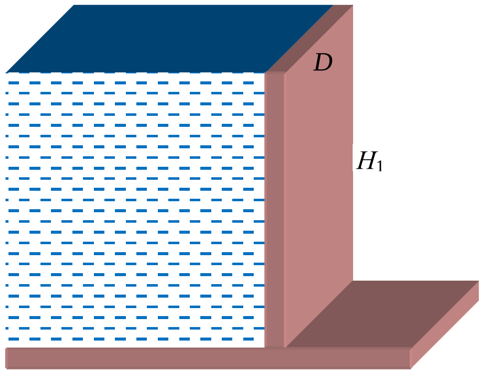
Για να αποσπάσουμε το κωνικό πώμα από την οπή θα πρέπει να ασκήσουμε μια θετική δύναμη (κατακόρυφη προς τα πάνω) με μέτρο ***F* = +0,0154 N**

ΑΣΚΗΣΗ 14

Για να δημιουργηθεί μια τεχνητή λίμνη, το φράγμα που κατασκευάστηκε έχει μήκος D=135 m και ύψος H=55,0 m. Όταν η τεχνητή λίμνη είναι γεμάτη με νερό, να υπολογίσετε:

(α) Τη συνισταμένη δύναμη που ασκεί ο υδάτινος όγκος πάνω στο φράγμα.

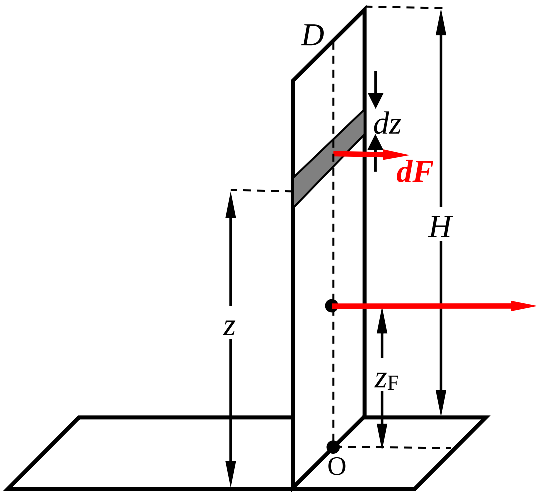
(β) Τη θέση του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης.



ΛΥΣΗ

Δεξιά και αριστερά από το φράγμα, η ατμοσφαιρική πίεση υφίσταται εντός και εκτός του νερού. Για το λόγο αυτό δεν την λαμβάνουμε υπόψη και οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο φράγμα είναι οι υδροστατικές δυνάμεις. Για να υπολογίσουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα διαιρούμε την επιφάνεια του φράγματος σε οριζόντιες λεπτές λωρίδες ύψους dz και μήκους D η κάθε μια από αυτές. Το στοιχειώδες εμβαδό κάθε λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA = D\,dz \qquad (1)$$



Κάθε στοιχειώδη λωρίδα που βρίσκεται στη θέση z είναι σε βάθος $h = H - z$ υφίσταται υδροστατική πίεση:

$$p = \rho g h = \rho g(H - z)$$

με αντίστοιχη υδροστατική δύναμη η οποία ασκείται στο γεωμετρικό μέσο της στοιχειώδους λωρίδας και έχει φορά προς τα δεξιά:

$$dF = p dA = \rho g D(H - z)dz \qquad (2)$$

(α) Η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα είναι ίση με:

$$F = \int_0^H dF = \int_0^H \rho g D(H - z)dz \quad \Rightarrow \quad F = \rho g D \int_0^H (Hdz - zdz) \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D H \int_0^H dz - \rho g D \int_0^H zdz \quad \Rightarrow \quad F = \rho g D H [z]_0^H - \rho g D \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^H \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D H^2 - \frac{1}{2}\rho g D(H^2 - 0) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\rho g D H^2 \qquad (3)$$

$$F = \frac{1}{2}(1000\, kg/m^2)(9{,}80\, m/s^2)(135\, m)(55{,}0\, m)^2 \quad \Rightarrow \quad F = 2{,}00 \times 10^9\, N$$

(β) Έστω ότι η συνισταμένη δύναμη F ασκείται σε σημείο που απέχει απόσταση z_F από τον πυθμένα της δεξαμενής. Η ροπή τ_F της δύναμης F ως προς το σημείο O (βλέπε Σχήμα) που βρίσκεται στη θέση $z = 0$ είναι ίση με:

$$\tau_F = F z_F \qquad (4)$$

Όμως, η ροπή τ_F είναι ίση με τη συνισταμένη ροπή που προκύπτει από όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις στοιχειώδεις οριζόντιες λωρίδες. Η στοιχειώδης ροπή που προκαλείται από τη στοιχειώδη δύναμη που ασκείται σε λωρίδα που απέχει απόσταση z από τον πυθμένα των δεξαμενών είναι:

$$d\tau = z\, dF$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Εξίσωση 2, η συνισταμένη ροπή τ_F ως προς το σημείο O θα είναι ίση με:

$$\tau_F = \int_{z=0}^{z=H} z\, dF = \int_0^H z\, \rho g D (H - z) dz \quad \Rightarrow \quad \tau_F = \rho g D \int_0^H z\, (H - z) dz \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D \int_0^H [Hz\, dz - z^2 dz] \quad \Rightarrow \quad \tau_F = \rho g D H \int_0^H z\, dz - \rho g D \int_0^H z^2 dz \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D H \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^H - \rho g D \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^H \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \frac{1}{2}\rho g D H (H^2 - 0) - \frac{1}{3}\rho g D (H^3 - 0) \quad \Rightarrow \quad \tau_F = \frac{1}{2}\rho g D H^3 - \frac{1}{3}\rho g D H^3 \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \frac{1}{6}\rho g D H^3 \qquad (5)$$

Από τις Εξισώσεις 3, 4 και 5 έχουμε:

$$\tau_F = F\, z_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}\rho g D H^3 = \frac{1}{2}\rho g D H^2\, z_F \quad \Rightarrow \quad z_F = \frac{1}{3} H \qquad (6)$$

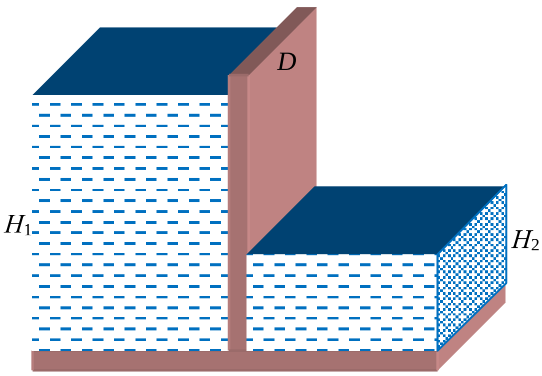
$$z_F = \frac{1}{3}(55{,}0\, m) \quad \Rightarrow \quad z_F = 18{,}3\, m$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Ένα ορθογώνιο φράγμα που έχει εύρος D=10,0 m χωρίζει μια δεξαμενή σε δυο περιοχές. Το ύψος του νερού στη μια περιοχή είναι H_1=5,00 m ενώ στη άλλη περιοχή είναι H_2=2,00 m. Να υπολογίσετε:

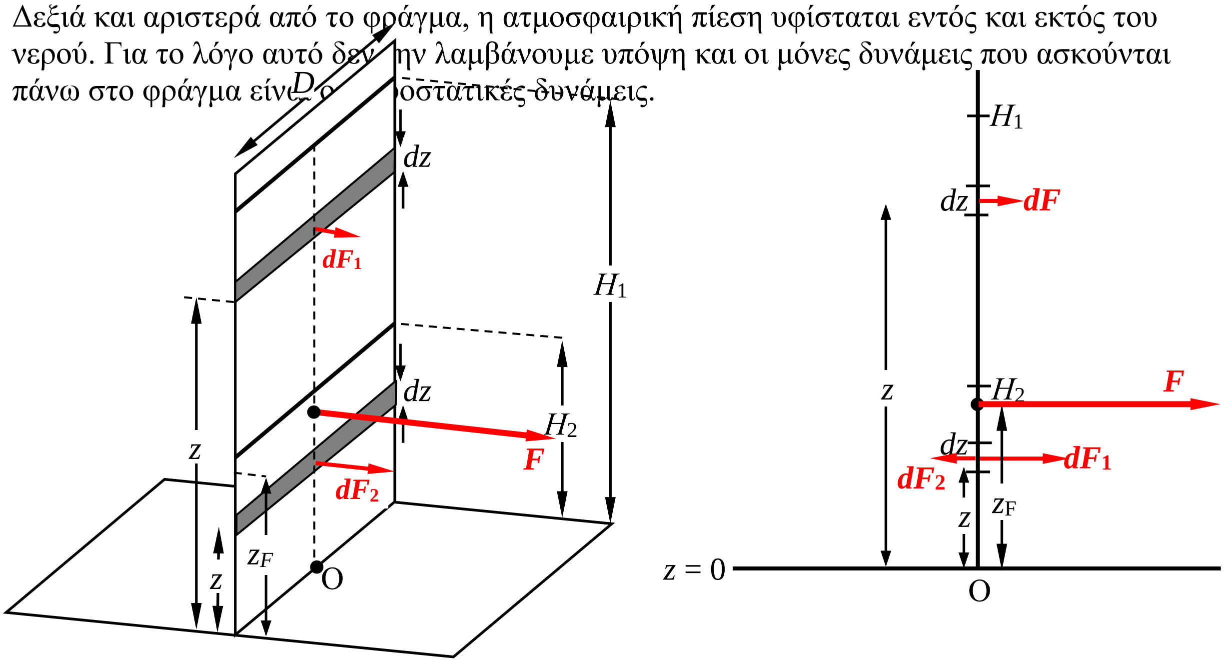
(α) Τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα.

(β) Τη θέση του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης.



ΛΥΣΗ

Δεξιά και αριστερά από το φράγμα, η ατμοσφαιρική πίεση υφίσταται εντός και εκτός του νερού. Για το λόγο αυτό δεν την λαμβάνουμε υπόψη και οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο φράγμα είναι οι υδροστατικές δυνάμεις.



Για να υπολογίσουμε τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα διαιρούμε την επιφάνεια του φράγματος σε οριζόντιες λεπτές λωρίδες ύψους dz και μήκους D η κάθε μια από αυτές. Το στοιχειώδες εμβαδό κάθε λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA = D\,dz \qquad (1)$$

Διακρίνουμε δυο υψομετρικές περιοχές πάνω στο φράγμα:

Περιοχή $\boldsymbol{0 < z < H_2}$**:**

Πάνω στο φράγμα ασκούνται οι υδροστατικές πιέσεις τόσο από την αριστερή δεξαμενή όσο και από τη δεξιά δεξαμενή. Οι στοιχειώδεις λωρίδες που βρίσκονται στις θέσεις $0 < z < H_2$, για μεν την αριστερή δεξαμενή είναι σε βάθος $h_1 = H_1 - z$ και υφίστανται υδροστατική πίεση:

$$p_1 = \rho g h_1 = \rho g (H_1 - z)$$

με αντίστοιχη υδροστατική δύναμη (με φορά προς τα δεξιά):

$$dF_1 = p_1 dA = \rho g (H_1 - z) D\,dz$$

ενώ για τη δεξιά δεξαμενή είναι σε βάθος $h_2 = H_2 - z$, οι λωρίδες αυτές υφίστανται υδροστατική πίεση:

$$p_2 = \rho g h_2 = \rho g (H_2 - z)$$

με αντίστοιχη υδροστατική δύναμη η οποία ασκείται στο γεωμετρικό μέσο της στοιχειώδους λωρίδας και έχει φορά προς τα αριστερά:

$$dF_2 = p_2 dA = \rho g (H_2 - z) D\,dz$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω σε κάθε στοιχειώδη λωρίδα που βρίσκεται στην περιοχή $0 < z < H_2$ θα είναι ίση με:

$$dF = dF_1 - dF_2 = \rho g (H_1 - z) D\,dz - \rho g (H_2 - z) D\,dz \qquad \Rightarrow$$

$$dF = \rho g D (H_1 - H_2) dz \qquad 0 < z < H_2 \qquad (2)$$

Περιοχή $\boldsymbol{0 < z < h_2}$**:**

Πάνω στο φράγμα ασκείται μόνο η υδροστατική πίεση από την αριστερή δεξαμενή. Οι στοιχειώδεις λωρίδες που βρίσκονται στις θέσεις $H_2 < z < H_1$, για την αριστερή δεξαμενή είναι σε βάθος $h = H_1 - z$ και υφίστανται υδροστατική πίεση:

$$p = \rho g h = \rho g (H_1 - z)$$

με αντίστοιχη υδροστατική δύναμη η οποία ασκείται στο γεωμετρικό μέσο της στοιχειώδους λωρίδας και έχει φορά προς τα δεξιά):

$$dF = p dA = \rho g D (H_1 - z) dz \qquad H_2 < z < H_1 \qquad (3)$$

(α) Η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα είναι ίση με:

$$F = \int_0^{H_1} dF = \int_0^{H_2} dF + \int_{H_2}^{H_1} dF = \int_0^{H_2} \rho g D (H_1 - H_2) dz + \int_{H_2}^{H_1} \rho g D (H_1 - z) dz \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1 - H_2) \int_0^{H_2} dz + \rho g D \int_{H_2}^{H_1} (H_1 dz - z dz) \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1 - H_2) [z]_0^{H_2} + \rho g D H_1 \int_{H_2}^{H_1} dz - \rho g D \int_{H_2}^{H_1} z dz \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1 - H_2) H_2 + \rho g D H_1 [z]_{H_2}^{H_1} - \rho g D \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{H_2}^{H_1} \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1 - H_2) H_2 + \rho g D H_1 (H_1 - H_2) - \frac{1}{2} \rho g D (H_1^2 - H_2^2) \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1 - H_2)(H_1 + H_2) - \frac{1}{2} \rho g D (H_1^2 - H_2^2) \quad \Rightarrow$$

$$F = \rho g D (H_1^2 - H_2^2) - \frac{1}{2} \rho g D (H_1^2 - H_2^2)$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g D (H_1^2 - H_2^2) \qquad (4)$$

$$F = \frac{1}{2} (1000\, kg/m^2)(9{,}80\, m/s^2)(10{,}0\, m)[(5{,}00\, m)^2 - (2{,}00\, m)^2] \quad \Rightarrow$$

$$F = 1{,}03 \times 10^6\, N$$

(β) Έστω ότι η συνισταμένη δύναμη F ασκείται σε σημείο που απέχει απόσταση z_F από τον πυθμένα των δεξαμενών. Η ροπή τ_F της δύναμης F ως προς το σημείο O (βλέπε Σχήμα) που βρίσκεται στη θέση $z = 0$ είναι ίση με:

$$\tau_F = F z_F \qquad (5)$$

Όμως, η ροπή τ_F είναι ίση με τη συνισταμένη ροπή που προκύπτει από όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις στοιχειώδεις οριζόντιες λωρίδες. Η στοιχειώδης ροπή που προκαλείται από τη στοιχειώδη δύναμη που ασκείται σε λωρίδα που απέχει απόσταση z από τον πυθμένα των δεξαμενών είναι:

$$d\tau = z\, dF$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις Εξισώσεις 2 και 3, η συνισταμένη ροπή τ_F ως προς το σημείο Ο θα είναι ίση με:

$$\tau_F = \int_{z=0}^{z=H_1} z\,dF = \int_0^{H_2} z\,dF + \int_{H_2}^{H_1} z\,dF \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \int_0^{H_2} z\,\rho g D(H_1 - H_2)dz + \int_{H_2}^{H_1} z\,\rho g D(H_1 - z)dz \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D(H_1 - H_2)\int_0^{H_2} z\,dz + \rho g D \int_{H_2}^{H_1} z\,(H_1 - z)dz \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D(H_1 - H_2)\int_0^{H_2} z\,dz + \rho g D \int_{H_2}^{H_1} [H_1 z\,dz - z^2 dz] \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D(H_1 - H_2)\int_0^{H_2} z\,dz + \rho g D H_1 \int_{H_2}^{H_1} z\,dz - \ \rho g D \int_{H_2}^{H_1} z^2 dz \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \rho g D(H_1 - H_2)\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{H_2} + \rho g D H_1 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{H_2}^{H_1} - \ \rho g D\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{H_2}^{H_1} \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \frac{1}{2}\rho g D(H_1 - H_2)H_2^2 + \frac{1}{2}\rho g D H_1(H_1^2 - H_2^2) - \frac{1}{3}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \frac{1}{2}\rho g D(H_1 H_2^2 - H_2^3 + H_1^3 - H_1 H_2^2) - \frac{1}{3}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) \quad \Rightarrow$$

$$\tau_F = \frac{1}{2}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) - \frac{1}{3}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) \quad \Rightarrow \quad \tau_F = \frac{1}{6}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) \qquad (6)$$

Από τις Εξισώσεις 4, 5 και 6 έχουμε:

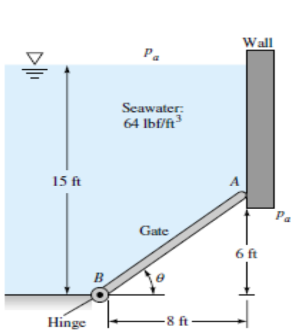
$$\tau_F = F\,z_F \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}\rho g D(H_1^3 - H_2^3) = \frac{1}{2}\rho g D(H_1^2 - H_2^2)\,\mathrm{z_F} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{z_F} = \frac{1}{3}\,\frac{H_1^3 - H_2^3}{H_1^2 - H_2^2} \qquad (7)$$

$$\mathrm{z_F} = \frac{1}{3}\,\frac{(5{,}00\,m)^3 - (2{,}00\,m)^3}{(5{,}00\,m)^2 - (2{,}00\,m)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z_F} = 1{,}92\,m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 16</u>

Η πύλη εκροής ΑΒ μιας τεχνητής λίμνης έχει μήκος L=3,0 m, εύρος D=2,0 m και σχηματίζει γωνία θ=30^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Η πύλη αυτή φράσσεται με επίπεδη μεταλλική πλάκα η οποία έχει πάχος d=5,0 mm και η οποία φέρει υδατοστεγή άρθρωση στο σημείο Β και στηρίζεται στο κατακόρυφο τοίχωμα της τεχνητής λίμνης στο σημείο Α. Το νερό μέσα στην τεχνητή λίμνη έχει ύψος h=10,0 m. Να υπολογίσετε:



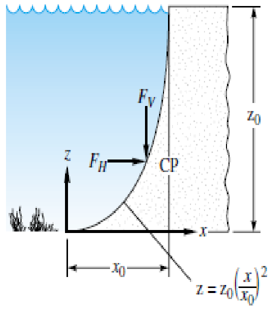
(α) Τη συνισταμένη δύναμη που ασκεί η πίεση του νερού πάνω στην μεταλλική πλάκα καθώς και το σημείο εφαρμογής αυτής.

(β) Το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που ασκεί το κατακόρυφο τοίχωμα πάνω στη μεταλλική πλάκα στο σημείο A.

(γ) Τη συνισταμένη δύναμη που καταπονεί την άρθρωση της μεταλλικής πλάκας στο σημείο B.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ένα φράγμα έχει μια παραβολική μορφή η οποία εκφράζεται με τη σχέση $z/z_o=(x/x_0)^2$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν x_0=10,0 m, z_0=24,0 m και πυκνότητα νερού ρ=1,00 g/cm^3, τότε:



(α) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες $F_H=F_{net,x}$ και $F_V=F_{net,z}$ της συνισταμένης υδροστατικής δύναμης που ασκείται πάνω στο φράγμα.

(β) Να προσδιορίσετε τη θέση πάνω στο φράγμα στην οποία δρα η συνισταμένη υδροστατική δύναμη F_{net} (π.χ. να υπολογίσετε το βάθος στο οποίο βρίσκεται το σημείο αυτό).