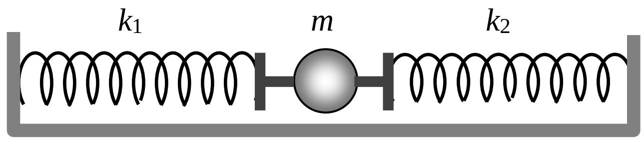
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Ένα αντικείμενο με μάζα m=500 g είναι προσαρμοσμένο μεταξύ δυο αβαρών ελατηρίων των οποίων τα φυσικά μήκη είναι L_0 και των οποίων οι σταθερές είναι k_1=10, 0 N/m και k_2=7,50 N/m (βλέπε σχήμα).



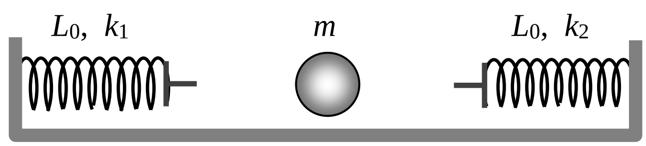
Αν η μάζα m εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας παράλληλα με τους άξονες των δυο ελατηρίων, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω, την συχνότητα f και την περίοδο T της αρμονικής ταλάντωσης. Υποθέστε ότι η μάζα m κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές.

(β) Τη χρονική στιγμή t=0 s, το αντικείμενο βρίσκεται στη θέση ισορροπία x=x_0=0 cm, έχει ταχύτητα υ_0=υ_{max}=0,20 m/s και κινείται προς τη θετική x-κατεύθυνση. Έχοντας ως δεδομένο ότι η εξίσωση κίνησης της μάζας m είναι: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, να υπολογίσετε την αρχική φάση φ και το πλάτος A της ταλάντωσης της μάζας m.

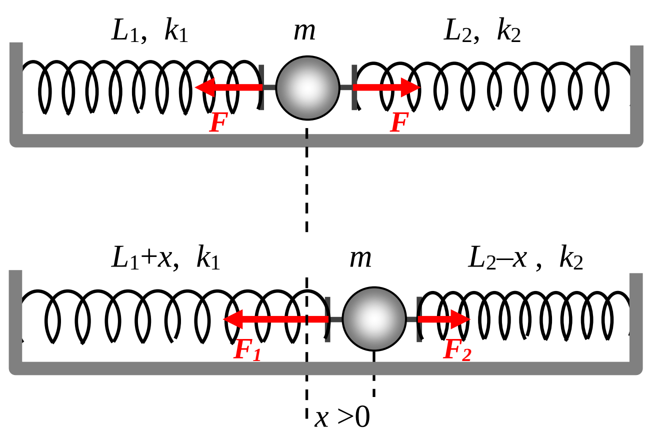
(γ) Ποια θα ήταν η αρχική φάση φ της ταλάντωση αν την χρονική στιγμή t=0 s η μάζα m κινείτο προς την αρνητική x-κατεύθυνση;

ΛΥΣΗ



Θέση ισορροπίας

Εκτροπή από θέση ισορροπίας κατά διάστημα x > 0.



(α) Στη θέση ισορροπίας και τα δυο ελατήρια έλκουν τη μάζα m με ίσες δυνάμεις F:

Το ελατήριο με σταθερά k_1 έχει τεντωθεί σε μήκος L_1, οπότε έχει υποστεί μια επιμήκυνση $(L_1 – L_0)$ και η δύναμη F με την οποία έλκει τη μάζα m είναι ίση με: $F = k_1 (L_1 – L_0)$.

Το ελατήριο με σταθερά k_2 έχει τεντωθεί σε μήκος L_2, οπότε έχει υποστεί μια επιμήκυνση $(L_2 – L_0)$ και η δύναμη F με την οποία έλκει τη μάζα m είναι ίση με: $F = k_2 (L_2 – L_0)$.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει η σχέση: $F = k_1 (L_1 – L_0) = k_2 (L_2 – L_0)$ (1.1)

Στην περίπτωση που η μάζα m έχει εκτραπεί οριζόντια από τη θέση ισορροπίας κατά διάστημα $x>0$:

Το ελατήριο με σταθερά k_1 θα έχει υποστεί μια συνολική επιμήκυνση $(L_1 – L_0 + x)>0$, οπότε η θα έλκει προς τα αριστερά τη μάζα m με δύναμη $F_1= –k_1 (L_1 – L_0 + x)$

Το ελατήριο με σταθερά k_2 θα έχει υποστεί μια συνολική επιμήκυνση $(L_2 – L_0 – x)>0$, οπότε η θα έλκει προς τα δεξιά τη μάζα m με δύναμη $F_2= k_2 (L_2 – L_0 – x)$

Στην περίπτωση αυτή, η συνισταμένη δύναμη F_{net} που θα ασκείται πάνω στη μάζα m θα είναι ίση με:

$$F_{\text{net}} = F_2 + F_1 = k_2 (L_2 – L_0 – x) – k_1 (L_1 – L_0 + x) =$$

$$= \cancel{k_2 (L_2 – L_0)} – k_2 x – \cancel{k_1 (L_1 – L_0)} – k_1 x \quad \Rightarrow$$

$$F_{\text{net}} = –(k_1 + k_2)x \qquad (1.2)$$

Η διαγραφή των δυο όρων προέκυψε από τη Σχέση (1.1) που ισχύει στη θέση ισορροπίας.

Παρατηρούμε ότι, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος και είναι ανάλογη με τη μετατόπιση x με συντελεστή αναλογίας $D = k_1 + k_2$. Αυτό σημαίνει ότι η μάζα m θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακής συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{(7{,}50 + 10{,}0)N/m}{0{,}500\ kg}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 5{,}92\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5{,}92\frac{rad}{s}}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad f = 0{,}943\ s^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}943\ s^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad T = 1{,}06\ s$$

(β) Αρχικές συνθήκες: t = 0 s, $x_0 = 0$ m και $\upsilon_0 = \upsilon_{max} = +0{,}20$ m/s

Υπολογισμός του πλάτους A: $\upsilon_{max} = \omega A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{0{,}20 m/s}{5{,}92 rad/s} \quad \Longrightarrow$

$$A = 0{,}034\ m$$

Υπολογισμός της φάσης φ:

Εξίσωση κίνησης: $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \Longrightarrow x(0)=x_0=A\cos(\varphi) \Longrightarrow$

$$\cos(\varphi)=\frac{x_0}{A}=\frac{0\,m}{0{,}039\,m}=0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi=\pm\frac{\pi}{2}\,rad \qquad (1.3)$$

Εξίσωση ταχύτητας:

$$\upsilon(t)=-A\omega\,sin(\omega t+\varphi) \ \Longrightarrow$$

$$\upsilon(0)=\upsilon_0=-A\omega\,sin(\varphi)=+0{,}20\frac{m}{s}>0 \qquad (1.4)$$

$$\sin(\varphi)<0 \quad \Longrightarrow \quad -\pi<\varphi<0 \qquad (1.5)$$

Από τις Σχέσεις (1.2) και (1.4) προκύπτει ότι: $\varphi=-\frac{\pi}{2}\,rad$

(γ) Στην περίπτωση αυτή $\upsilon_1=-0{,}20$ m/s <0 και η Σχέση (1.4) γίνεται:

$$\upsilon(0)=\upsilon_0=-A\omega\,sin(\varphi)=-0{,}20\frac{m}{s}<0 \ \Longrightarrow\ \sin(\varphi)>0 \ \Longrightarrow\ 0<\varphi<\pi \qquad (1.6)$$

Από τις Σχέσεις (1.3) και (1.6) προκύπτει ότι: $\varphi=+\frac{\pi}{2}\,rad$

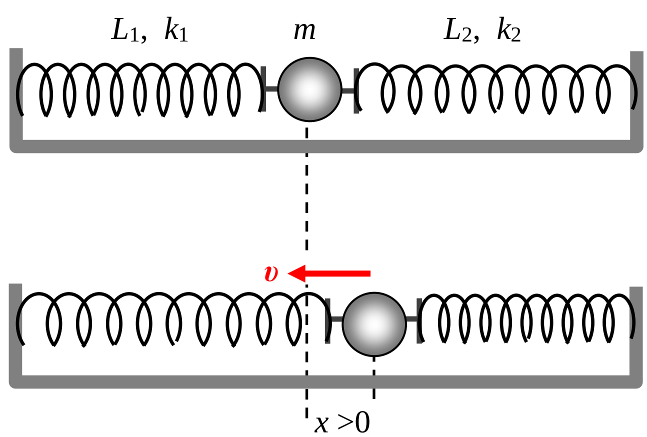
<u>ΑΣΚΗΣΗ 1Α:</u>

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να αποδείξετε ότι το σύστημα της μάζας m και των δυο ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 της ΑΣΚΗΣΗΣ 1 είναι ένας αρμονικός ταλαντωτής με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέση ισορροπίας

Η μάζα είναι σε τυχαία θέση $x>0$ και έχει ταχύτητα υ και έστω υ<0



Στην τυχαία θέση x, το σύστημα των δυο ελατηρίων με τη μάζα m έχει τις εξής ενέργειες:

Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου με σταθερά k_1: $U_1 = \frac{1}{2} k_1 x^2$ (1)

Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου με σταθερά k_2: $U_1 = \frac{1}{2} k_2 x^2$ (2)

Κινητική Ενέργεια μάζας m: $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ (3)

Ολική μηχανική ενέργεια συστήματος: $E = U_1 + U_2 + K = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2$

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται. Οπότε η χρονική παράγωγος της ολικής μηχανικής ενέργειας θα είναι ίση με το μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} k_1 \frac{dx^2}{dt} + \frac{1}{2} k_2 \frac{dx^2}{dt} + \frac{1}{2} m \frac{d\upsilon^2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} k_1 2x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} k_2 2x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 x \cancel{\upsilon} + k_2 x \cancel{\upsilon} + m \cancel{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(k_1 + k_2)x + m\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = -\,(k_1 + k_2)x \quad \Rightarrow \quad F = -Dx$$

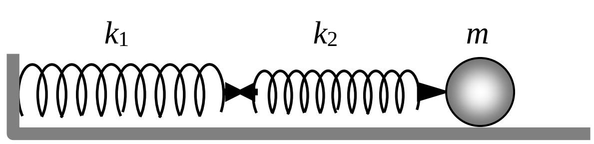
όπου $D = k_1 + k_2$

Καταλήξαμε στην τελική εξίσωση θέτοντας:

$\upsilon = \frac{dx}{dt}$ και $F = m\frac{d\upsilon}{dt}$ από το 2ο νόμο του Νεύτωνα

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Δυο οριζόντια ελατήρια με σταθερές k_1=30,5 N/m και k_2=40,0 N/m είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Το αριστερό άκρο του συστήματος των δυο ελατηρίων είναι προσαρμοσμένο σε σταθερό σημείο ενώ στο δεξιό άκρο είναι προσαρμοσμένη μια μάζα m=0,500 kg (βλέπε σχήμα).



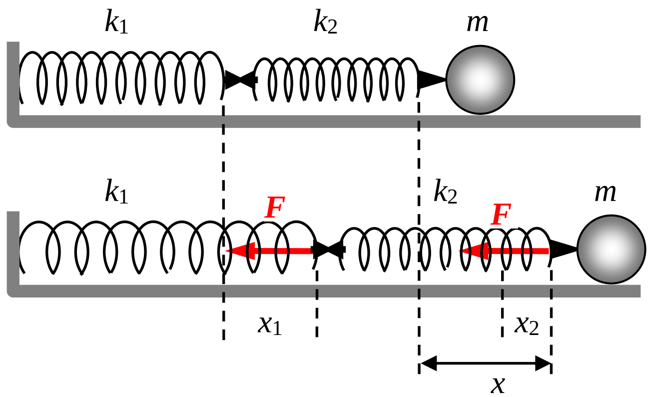
Αν η μάζα m εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας παράλληλα με τους άξονες των δυο ελατηρίων, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω, την συχνότητα f και την περίοδο T της αρμονικής ταλάντωσης. Υποθέστε ότι η μάζα m κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές.

(β) Τη χρονική στιγμή t=0,25 s, το αντικείμενο βρίσκεται στη θέση x_1=+2,0 cm, έχει ταχύτητα $υ_1$=0,20 m/s και κινείται προς τη θετική x-κατεύθυνση. Έχοντας ως δεδομένο ότι η εξίσωση κίνησης της μάζας m είναι: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, να υπολογίσετε την αρχική φάση φ και το πλάτος A της ταλάντωσης της μάζας m.

(γ) Ποια θα ήταν η αρχική φάση φ της ταλάντωση αν την χρονική στιγμή t=0,25 s η μάζα m κινείτο προς την αρνητική x-κατεύθυνση;

<u>ΛΥΣΗ</u>



(α) Αν ασκήσουμε μια οριζόντια δύναμη F πάνω στη μάζα m, η ίδια δύναμη ασκείται και σε κάθε ένα από τα δυο σε σειρά ελατήρια προκαλώντας διαφορετικές παραμορφώσεις σε κάθε ελατήριο. Συγκεκριμένα, επειδή $k_1<k_2$ το ελατήριο με σταθερά k_1 θα επιμηκυνθεί περισσότερο. Αν x_1 και x_2 είναι οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις των δυο ελατηρίων, τότε η ολική μετατόπιση x της μάζας m θα είναι ίση με:

$x = x_1 + x_2$ (2.1)

Επειδή και στα δυο ελατήρια ασκείται η ίδια δύναμη F επαναφοράς, η δύναμη αυτή σε κάθε ελατήριο θα δίνεται από τις σχέσεις:

$F = -k_1 x_1$ $\quad και \quad$ $F = -k_2 x_2$ ή ισοδύναμα:

$$x_1 = -\frac{F}{k_1} \qquad και \qquad x_2 = -\frac{F}{k_2} \qquad (2.2)$$

Από τις Σχέσεις (2.1) και (2.2) παίρνουμε:

$$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = -\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F = -\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} F \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \quad \Rightarrow$$

$$F = -Dx \quad όπου \quad D = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \qquad (2.3)$$

Από τη Σχέση (2.3) προκύπτει ότι η μάζα m θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = \sqrt{\frac{\left(30{,}5\frac{N}{m}\right)\left(40{,}0\frac{N}{m}\right)}{(0{,}500\ kg)\left(30{,}5\frac{N}{m} + 40{,}0\frac{N}{m}\right)}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 5{,}88\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5{,}88\,\frac{rad}{s}}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0{,}937\ s^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}937\ s^{-1}} \qquad \Longrightarrow \qquad T = 1{,}07\ s$$

(β) Αρχικές συνθήκες: t = 0,25 s, x_1 = +0,020 m και υ_1 = +0,20 m/s

Υπολογισμός του πλάτους A: $\upsilon_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2}{\omega^2} + x_1^2} \qquad \Longrightarrow$

$$A = \sqrt{\frac{(0{,}20m/s)^2}{(5{,}88\,rad/s)^2} + (0{,}020m)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0{,}039\ m$$

Υπολογισμός της φάσης φ:

Εξίσωση κίνησης: $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \Longrightarrow x(0{,}25) = x_1 = A\cos[(0{,}25s)(5{,}92rad/s)+\varphi] \Longrightarrow$

$$\cos(1{,}48rad + \varphi) = \frac{x_1}{A} = \frac{0{,}020\ m}{0{,}039\ m} = 0{,}51 \qquad \Longrightarrow \qquad 1{,}48\ rad + \varphi = \pm 1{,}04\ rad \qquad (2.4)$$

Εξίσωση ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = -A\omega\ sin(\omega t + \varphi) \ \Longrightarrow$$

$$\upsilon(0{,}25) = \upsilon_1 = -A\omega\ sin(1{,}48rad + \varphi) = +0{,}20\frac{m}{s} > 0 \qquad (2.5)$$

$$\sin(1{,}48rad + \varphi) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\pi < 1{,}48\ rad + \varphi < 0 \qquad (2.6)$$

Από τις Εξισώσεις 2.4 και 2.6 προκύπτει ότι:

$$1{,}48\ rad + \varphi = -1{,}04\ rad \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = (-1{,}48 - 1{,}04)rad \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = -2{,}52\ rad$$

(γ) Στην περίπτωση αυτή υ_1= –0,20 m/s <0 και η εξίσωση της ταχύτητας γίνεται:

$$\upsilon(0{,}25) = \upsilon_1 = -A\omega\ sin(1{,}48rad + \varphi) = -0{,}20\frac{m}{s} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin(1{,}48\ rad + \varphi) > 0 \quad \Longrightarrow$$

$$0 < 1{,}48\ rad + \varphi < \pi \qquad (2.7)$$

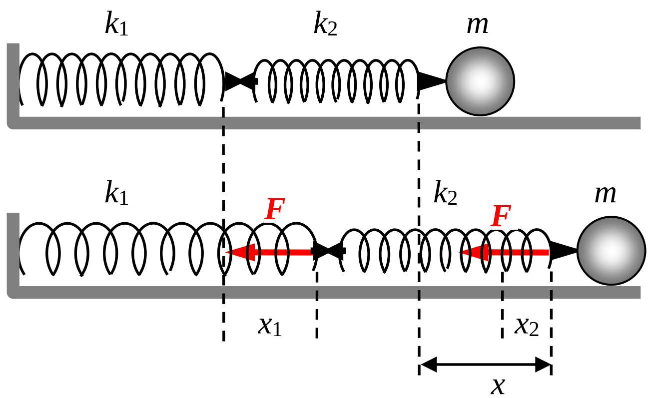
Από τις Εξισώσεις 2.4 και 2.7 προκύπτει ότι:

$$1{,}48\ rad + \varphi = +1{,}04\ rad \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = (-1{,}48 + 1{,}04)rad \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = -0{,}44\ rad$$

ΑΣΚΗΣΗ 2Α:

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να αποδείξετε ότι το σύστημα της μάζας *m* και των δυο ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 της ΑΣΚΗΣΗΣ 2 είναι ένας αρμονικός ταλαντωτής με σταθερά επαναφοράς $D = k_1 k_2/(k_1 + k_2)$.

ΛΥΣΗ



Εκτρέπουμε τη μάζα m από τη θέση ισορροπίας και την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν η μάζας m βρίσκεται στην απομάκρυνση x θα έχει ταχύτητα υ και πάνω σε αυτή θα ασκείται δύναμη επαναφοράς F Επειδή τα ελατήρια είναι σε σειρά, πάνω σε κάθε ελατήριο ασκείται ή ίδια δύναμη F, και επειδή τα ελατήρια έχουν διαφορετικές σταθερές, το ελατήριο με σταθερά k_1 θα επιμηκυνθεί κατά διάστημα x_1 ενώ το ελατήριο με σταθερά k_2 θα επιμηκυνθεί κατά διάστημα x_2. Από τις συνθήκες αυτές προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 = x \qquad (2A.1)$$

και

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 \qquad (2A.2)$$

Στην κατάσταση αυτή, η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος των δυο σε σειρά ελατηρίων και της μάζας m θα έχει τις εξής συνιστώσες ενέργειας:

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου με σταθερά k_1: $U_1 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2$

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου με σταθερά k_2: $U_2 = \frac{1}{2} k_2 x_2^2$

Κινητική ενέργεια μάζας m: $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$

Ολική μηχανική ενέργεια συστήματος: $E = U_1 + U_2 + K$

$$E = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2 \qquad (2A.3)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται. Οπότε η χρονική παράγωγος της ολικής μηχανικής ενέργειας θα είναι ίση με το μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} k_1 \frac{dx_1^2}{dt} + \frac{1}{2} k_2 \frac{dx_2^2}{dt} + \frac{1}{2} m \frac{d\upsilon^2}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} k_1 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{2} k_2 2x_2 \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{2} m 2\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 x_1 \frac{dx_1}{dt} + k_2 x_2 \frac{dx_2}{dt} + m\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \qquad (2A.4)$$

Από τις Εξισώσεις (2Α.1) και (2Α.2) βρίσκουμε τα x_1 και x_2 συναρτήσει των σταθερών k_1 και k_2 και της συνολικής μετατόπισης x. Για το σκοπό αυτό, λύνουμε την Εξίσωση (2Α.1) ως προς x_1 και αντικαθιστούμε το x_1 στην Εξίσωση (2Α.2):

$$x_1 = x - x_2 \quad \Rightarrow \quad k_1(x - x_2) = k_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 x - k_1 x_2 = k_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 x_2 + k_2 x_2 = k_1 x$$

$$\Rightarrow \quad (k_1 + k_2) x_2 = k_1 x \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x$$

Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο βρίκσουμε: $x_1 = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} x$

Αντικαθιστούμε τα x_1 και x_2 στην Εξίσωση (2Α.4) ως εξής:

$$k_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2} x \frac{dx_1}{dt} + k_2 \frac{k_1}{k_1 + k_2} x \frac{dx_2}{dt} + m\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} \right) + m\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + m\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \frac{dx}{dt} + m\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \cancel{\upsilon} + m \cancel{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \quad \Rightarrow \quad F = -Dx$$

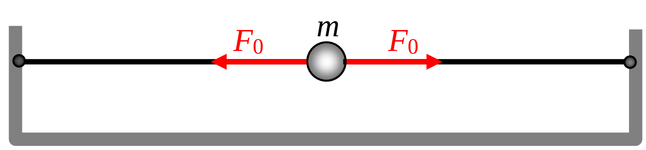
$$D = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Καταλήξαμε στην τελική εξίσωση θέτοντας:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \text{και} \quad F = m \frac{d\upsilon}{dt} \quad \text{από το 2ο νόμο του Νεύτωνα}$$

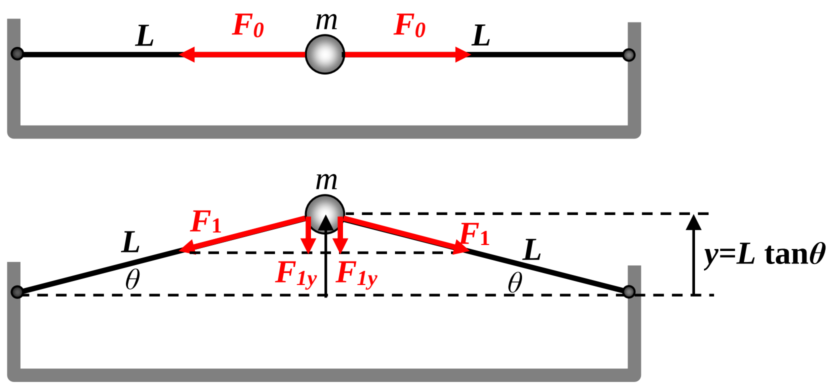
<u>ΑΣΚΗΣΗ 3:</u>

(α) Μια μάζα m=4,00 kg είναι προσαρμοσμένη σε δυο αβαρή ίδια νήματα μήκους L=1,00 m το κάθε ένα, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Το σύστημα των δυο νημάτων και της μάζα τεντώνεται οριζόντια με δύναμη F_0=100 N (η δύναμη έχει τρία (3) σημαντικά ψηφία).



Εκτρέπουμε τη μάζα *m* κάθετα προς τη διεύθυνση των δυο νημάτων κατά διάστημα $y<<L$ και την αφήνουμε ελεύθερη να ταλαντωθεί χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης της μάζας *m*. (Αγνοείστε την ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου).

<u>ΛΥΣΗ</u>



Στην περίπτωση που η μάζα m μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά διάστημα y<<L, όπου L είναι το μήκος των δυο νημάτων που συγκρατούν τη μάζα, τα δυο νήματα εκτρέπονται κατακόρυφα κατά γωνία θ<<1 rad. Στην ειδική αυτή περίπτωση μπορούμε να ισχυριστούμε με σιγουριά ότι:

$$sin\theta \approx tan\theta \approx \theta\ (rad) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad F \approx F_0$$

Οπότε, η κατακόρυφος συνιστώσα κάθε μιας από τις δυο δυνάμεις F_1 που ασκεί η μάζα πάνω στα νήματα θα είναι ίση με:

$$F_{1y} = Tsin\theta \approx F_0\theta$$

Η συνολική δύναμη F που ασκείται πάνω στη μάζα m είναι ίσο με:

$$F_y = 2F_{1y} \approx 2F_0\theta \qquad (3.1)$$

Από τη γεωμετρία του συστήματος προκύπτει ότι η κατακόρυφος μετατόπιση θα είναι ίση με:

$$y = L\ tan\theta \approx L\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{y}{L} \qquad (3.2)$$

Από τις Σχέσεις (3.1) και (3.2) προκύπτει η δύναμη επαναφοράς προς τη θέση ισορροπίας που ασκείται στη μάζα m:

$$F_y = -\frac{2F_0}{L}\,y = -D\,y \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \qquad D = \frac{2F_0}{L} \qquad (3.3)$$

Το αρνητικό πρόσημο μπήκε επειδή η δύναμη επαναφοράς F και η μετατόπιση y έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Στην περίπτωση που μελετάμε, η δύναμη είναι αρνητική (έχει φορά προς τα κάτω) ενώ η μετατόπιση y είναι θετική (έχει φορά προς τα πάνω). Από τη Σχέση (3.3) προκύπτει ότι η μάζα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητας:

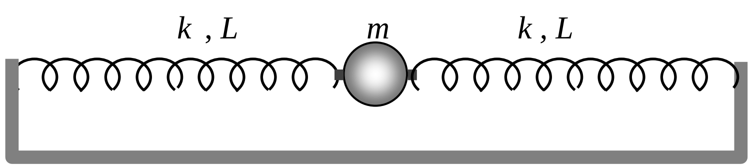
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2F_0}{mL}} = \sqrt{\frac{2 \times 100\ N}{(4{,}00\ kg)(1{,}00\ m)}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 7{,}07 \frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}07 \frac{rad}{s}}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad f = 1{,}13\ s^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}13\ s^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad T = 0{,}885\ s$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4:</u>

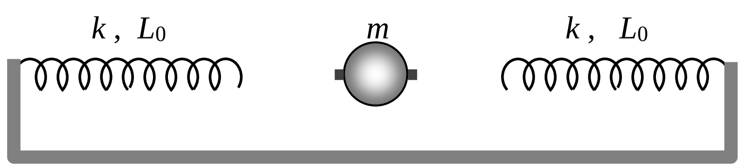
Ένα αντικείμενο με μάζα m=500 g είναι προσαρμοσμένο μεταξύ δυο αβαρών ελατηρίων, των οποίων οι σταθερές είναι k_1=40,0 N/m και k_2=7,50 N/m (βλέπε σχήμα). Και τα δυο ελατήρια έχουν το ίδιο αρχικό μήκος (μήκος χωρίς παραμόρφωση) L_0=50,0 cm. Στη κατάσταση ισορροπίας του συστήματος με τα δυο ελατήρια και τη μάζα m, το κάθε ελατήριο έχει μήκος L=75,0 cm.



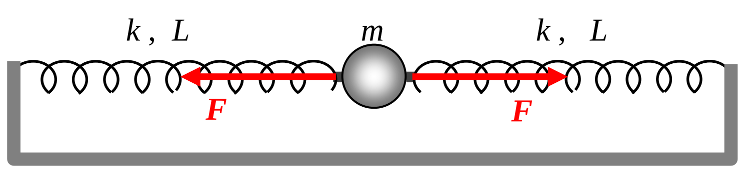
Εκτρέπουμε τη μάζα m κάθετα προς τη διεύθυνση των ελατηρίων κατά διάστημα $y \ll L$ και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί χωρίς τριβές. Να αποδείξετε ότι η μάζα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης. Αγνοείστε την ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου.

<u>ΛΥΣΗ</u>

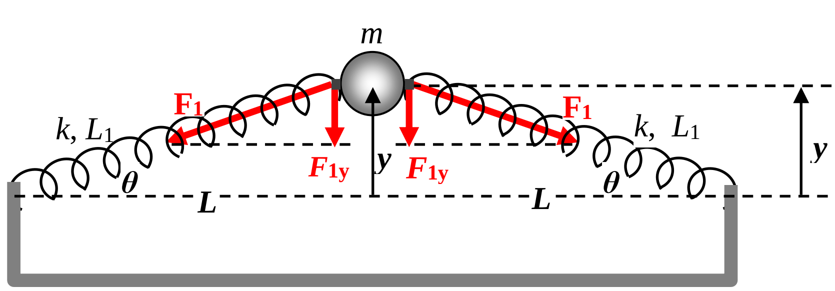
Αρχική κατάσταση
(Τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος L_0)



Το σύστημα σε ισορροπία
(Τα ελατήρια έχουν μήκος L)



Η μάζα έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά διάστημα y
(Τα ελατήρια έχουν μήκος L_1)



(α) Στην κατάσταση που η μάζα έχει εκτραπεί κατακόρυφα κατά διάστημα y, τα δυο ελατήρια έχουν μήκος L_1, δηλαδή, το κάθε ένα από αυτά έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα ($L_1 - L_0$). Οπότε, η δύναμη επαναφοράς T_{1y} κάθε ελατηρίου θα είναι ίση με:

$$F_1 = -k(L_1 - L_0)$$

Στην ίδια κατάσταση, οι κατακόρυφες συνιστώσες των δυνάμεων F_1 θα είναι ίσες με:

$$F_{1y} = F_1 sin\theta = -k(L_1 - L_0) sin\theta = -k(L_1 - L_0)\frac{y}{L_1} \quad \Longrightarrow$$

$$F_{1y} = -k\left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right)y \qquad (4.1)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα ελατήρια με την οριζόντια διεύθυνση. Το ημίτονο της γωνίας θ ($\sin\theta = y/L_1$) υπολογίσθηκε από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει κάθετες πλευρές L και y και υποτείνουσα L_1. Από το ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο υπολογίζουμε και την υποτείνουσα L_1 συναρτήσει των y και L:

$$L_1 = \sqrt{L^2 + y^2} = L\sqrt{1 + \frac{y^2}{L^2}}$$

Η συνισταμένη δύναμη F που ασκείται από τα ελατήρια πάνω στη μάζα m θα είναι τότε ίση με:

$$F_y = 2F_{1y} = -2k\left(1 - \frac{L_0}{L_1}\right)y = -2k\left(1 - \frac{L_0}{L\sqrt{1 + \frac{y^2}{L^2}}}\right)y = -2k\left(1 - \frac{L_0}{L}\left(1 + \frac{y^2}{L^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)y \quad (4.2)$$

Δεδομένου τώρα ότι $y << L$ προκύπτει ότι $\frac{y}{L} \ll 1$ *και φυσικά* $\frac{y^2}{2L^2} <<< 1$. Οπότε:

$$\left(1 + \frac{y^2}{L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{L^2} = 1 - \frac{y^2}{2L^2} \approx 1$$

και η Σχέση (4.2) γίνεται:

$$F_y = -2k\left(1 - \frac{L_0}{L}\right)y \quad \Longrightarrow \quad F_y = -\frac{2k(L - L_0)}{L}y = -Dy \qquad (4.3)$$

όπου

$$D = \frac{2k(L - L_0)}{L} \qquad (4.4)$$

είναι η σταθερά αναλογίας μεταξύ δύναμης επαναφοράς F και μετατόπισης y. Από τις Σχέσεις (4.3) και (4.4) προκύπτει ότι η μάζα m θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητας:

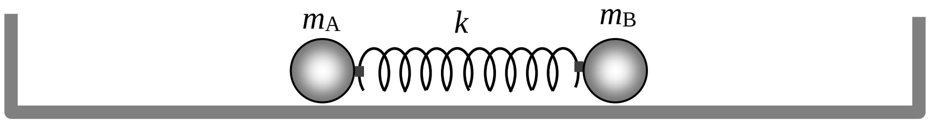
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2k(L-L_0)}{m\,L}} = \sqrt{\frac{2(40{,}0\;N/m)(0{,}750m-0{,}500m)}{(0{,}500kg)(0{,}750m)}} \quad\Longrightarrow\quad \omega = 7{,}30\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}30\frac{rad}{s}}{2\pi} \quad\Longrightarrow\quad f = 1{,}16\;s^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}13\;s^{-1}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0{,}862\;s$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

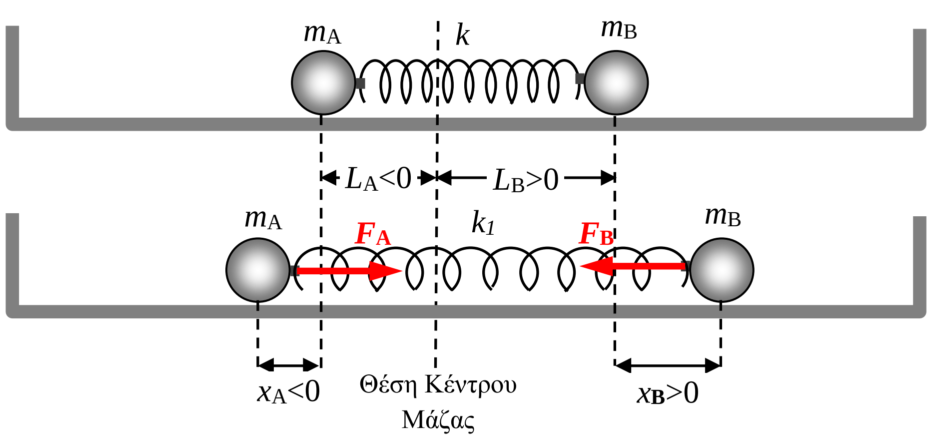
Δυο αντικείμενα με μάζες m_A=1,50 kg και m_B=1,00 kg είναι προσαρμοσμένα στα άκρα ενός οριζόντιου ελατηρίου που έχει σταθερά k=35,5 N/m, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Όταν οι δυο μάζες συμπιέσουν (ή τεντώσουν) το ελατήριο και στη συνέχεια αφεθούν ελεύθερες, τότε να αποδείξετε ότι οι δυο μάζες θα εκτελέσουν απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

ΛΥΣΗ

Το σύστημα αποτελείται από το ελατήριο με σταθερά k και από τις δυο μάζες m_A και m_B. Στο σύστημα αυτό, όταν οι δυο μάζες απομακρυνθούν, τεντώνοντας το ελατήριο, ή πλησιάσουν, συμπιέζοντας το ελατήριο, και στη συνέχεια αφεθούν ελεύθερες, τότε οι δυο μάζες θα αρχίσουν να ταλαντώνονται έτσι ώστε το κέντρο μάζας του συστήματος των δυο μαζών να παραμένει σταθερό στην αρχική του θέση επειδή απλούστατα πάνω σε αυτές τις μάζες ασκούνται μόνο οι εσωτερικές δυνάμεις που προέρχονται από το ελατήριο



Στο παραπάνω σύστημα του ελατηρίου με τις δυο μάζες θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το σταθερό σημείο της θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος.

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος, οι μάζες m_A και m_B απέχουν από το κέντρο μάζας αποστάσεις $L_A<0$ και $L_B>0$, αντίστοιχα. Στην κατάσταση αυτή το μήκος L_0 του ελατηρίου είναι ίσο με:

$$L_0 = L_B - L_A$$

Όταν το ελατήριο είναι παραμορφωμένο (στην περίπτωση που εξετάζουμε το ελατήριο είναι τεντωμένο) οι μάζες m_A και m_B έχουν απομακρυνθεί από το κέντρο μάζας κατά διαστήματα x_A και x_B, αντίστοιχα. Στην κατάσταση αυτή το μήκος L του ελατηρίου θα είναι ίσο με:

$$L = (L_B + x_B) - (L_A + x_A) = L_B - L_A + x_B - x_A = L_0 + x_B - x_A \qquad \Longrightarrow$$

$$L - L_0 = x_B - x_A$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει τη συνολική παραμόρφωση x του ελατηρίου:

$$x = L - L_0 = x_B - x_A \qquad \Longrightarrow \qquad x = x_B - x_A \qquad (5.1)$$

Εξαιτίας αυτής της παραμόρφωσης, το ελατήριο ασκεί πάνω σε κάθε μια από τις δυο μάζες δύναμη που είναι ίση με:

$$F_A = -F_B = kx \qquad \Longrightarrow \qquad F_A = -F_B = k(x_B - x_A) \qquad (5.2)$$

Από τη θεωρία του κέντρου μάζας, όταν το σημείο αναφοράς βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας, παίρνουμε τις εξής σχέσεις:

Κατάσταση ισορροπίας:

$$m_A L_A + m_B L_B = 0 \qquad (5.3)$$

Κατάσταση παραμορφωμένου ελατηρίου:

$$m_A(L_A + x_A) + m_B(L_B + x_B) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_A L_A + m_A x_A + m_B L_B + m_B x_B = 0$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με τη Σχέση (5.3) γίνεται:

$$m_A x_A + m_B x_B = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_B = -\frac{m_A}{m_B} x_A \qquad (5.4)$$

Από τις Σχέσεις (5.2) και (5.3) μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη μάζα m_A. Συγκεκριμένα:

$$F_A = k(x_B - x_A) = k\left(-\frac{m_A}{m_B} x_A - x_A\right) = -k\frac{m_A + m_B}{m_B} x_A \qquad \Longrightarrow \qquad F_A = -D_A x_A \qquad (5.5)$$

όπου

$$D_A = k\frac{m_A + m_B}{m_B} \qquad (5.6)$$

είναι η σταθερά αναλογίας μεταξύ της δύναμης F_A που ασκείται πάνω στη μάζα m_A και της συνολικής παραμόρφωσης του ελατηρίου. Από τις Σχέση (5.5) και (5.6) προκύπτει ότι η μάζα m_A θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητας:

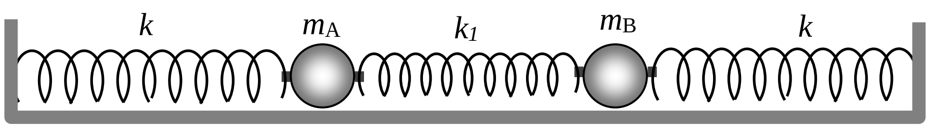
$$\omega_A = \sqrt{\frac{D_A}{m_A}} = \sqrt{k\frac{m_A + m_B}{m_A m_B}} = \sqrt{(35{,}5\frac{N}{m})\frac{(1{,}50\,kg) + (1{,}00\,kg))}{(1{,}50kg)(1{,}00kg)}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 7{,}69\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}69\frac{rad}{s}}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad f = 1{,}22\,s^{-1}$$

Κατά αναλογία με τη μάζα m_A να αποδείξετε ότι και η μάζα m_B θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 6:</u>

Δυο αντικείμενα με μάζες m_A=1,50 kg και m_B=1,00 kg είναι προσαρμοσμένα σε τρία οριζόντια ελατήρια όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



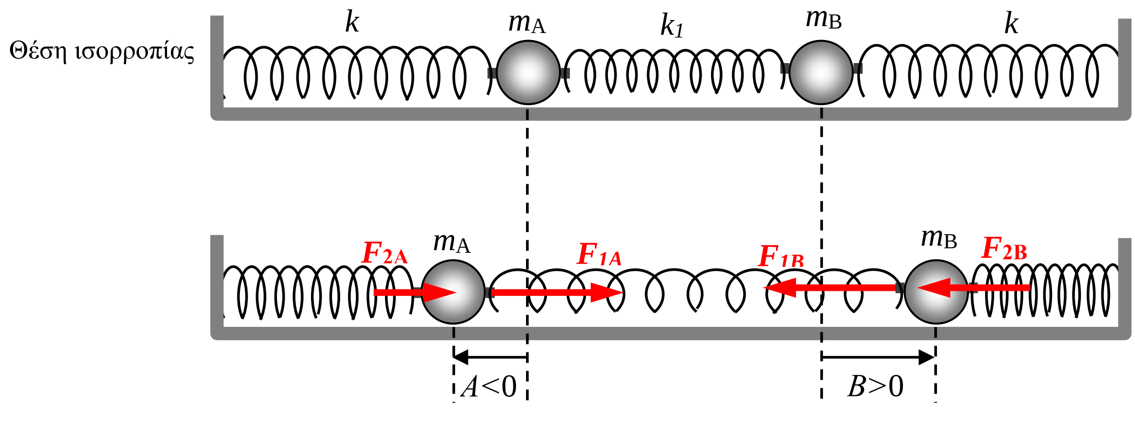
Η σταθερά των δυο ακραίων ελατηρίων είναι k=25,5 N/m ενώ η σταθερά του μεσαίου ελατηρίου είναι k_1=35,5 N/m. Να απομακρύνετε τη μάζα m_A κατά διάστημα A= –10,5 cm και τη μάζα m_B κατά διάστημα B= +15,0 cm από τις αντίστοιχες θέσεις ισορροπίας των δυο μαζών και στη συνέχεια αφήνετε τις μάζες ελεύθερες.

(α) Τη χρονική στιγμή που αφήνετε τις δυο μάζες ελεύθερες να προσδιορίσετε τις σχέσεις με τις οποίες μπορείτε να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη που ασκούν τα ελατήρια πάνω σε κάθε μάζα και να υπολογίσετε τις δυνάμεις αυτές.

(β) Όταν οι μάζες m_A και m_B αφεθούν ελεύθερες, υποθέστε ότι οι μάζες αυτές θα εκτελέσουν αρμονική ταλάντωση με αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης: x_A=Acos(ωt) και x_B=Bcos(ωt). Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε τις συχνότητες με τις οποίες μπορούν να ταλαντωθούν οι μάζες m_A και m_B.

<u>ΛΥΣΗ</u>

(α)



Όπως δείξαμε και στην Άσκηση 5, αλλά και όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα. η συνολική παραμόρφωση x του μεσαίου ελατηρίου με σταθερά k_1 θα είναι ίση με:

$$x = B - A \qquad (6.1)$$

Η παραμόρφωση αυτή είναι η αιτία που το μεσαίο ελατήριο ασκεί πάνω στις μάζας m_A και m_B τις δυνάμεις F_{1A} και F_{1B}, αντίστοιχα, οι οποίες είναι αντίθετες και ίσες με:

$$F_{1A} = -F_{1B} = k_1 x = k_1(B - A) \qquad (6.2)$$

Αφού η μάζα m_A έχει μετατοπισθεί κατά διάστημα A, το αριστερό ελατήριο θα έχει παραμορφωθεί και αυτό κατά διάστημα A. Οπότε, η δύναμη F_{2A} που ασκεί το αριστερό ελατήριο πάνω στη μάζα m_A θα είναι ίση με:

$$F_{2A} = -kA \qquad (6.3)$$

Από τις Σχέσεις (6.2) και (6.3) προκύπτει και συνισταμένη δύναμη F_A που ασκείται από τα δυο ελατήρια πάνω στη μάζα m_A:

$$F_A = F_{2A} + F_{1A} \qquad \Longrightarrow \qquad F_A = -kA + k_1(B - A) \qquad (6.4)$$

Κατά αναλογία με τη μάζα m_A, αφού η μάζα m_B έχει μετατοπισθεί κατά διάστημα B, το δεξιό ελατήριο θα έχει παραμορφωθεί και αυτό κατά διάστημα B. Οπότε, η δύναμη F_{2B} που ασκεί το δεξιό ελατήριο πάνω στη μάζα m_B θα είναι ίση με:

$$F_{2B} = -kB \qquad (6.5)$$

Από τις Σχέσεις (6.2) και (6.5) προκύπτει και συνισταμένη δύναμη F_B που ασκείται από τα δυο ελατήρια πάνω στη μάζα m_B:

$$F_B = F_{2B} + F_{1B} \qquad \Longrightarrow \qquad F_B = -kB - k_1(B - A) \qquad (6.6)$$

Υπολογισμός των δυνάμεων:

$$F_A = -kA + k_1(B - A) = -\left(25{,}5\frac{N}{m}\right)(-0{,}105\ m) + \left(35{,}5\frac{N}{m}\right)\big(0{,}150m - (-0{,}105m)\big) \quad \Longrightarrow$$

$$F_A = 6{,}38\ N$$

$$F_B = -kB - k_1(B - A) = -\left(25{,}5\frac{N}{m}\right)(-0{,}150\ m) - \left(35{,}5\frac{N}{m}\right)\big(0{,}150m - (-0{,}105m)\big) \quad \Longrightarrow$$

$$F_B = -12{,}88\ N$$

(β) Όταν οι μάζες m_A και m_B αφεθούν ελεύθερες, οι μάζες αυτές θα εκτελέσουν απλή αρμονική ταλάντωση με αντίστοιχα πλάτη A και B και με γωνιακή συχνότητα ω. Αν τη χρονική στιγμή t οι απομακρύνσεις των μαζών m_A και m_B είναι αντίστοιχα x_A και x_B, τότε οι Σχέσεις (6.4) και (6.6) γίνονται:

$$F_A = -kx_A + k_1(x_B - x_A) \qquad \Longrightarrow \qquad m_A\frac{d^2x_A}{dt^2} = -(k + k_1)x_A + k_1x_B \qquad (6.7)$$

$$F_B = -kx_B - k_1(x_B - x_A) \qquad \Longrightarrow \qquad m_B\frac{d^2x_B}{dt^2} = -(k + k_1)x_B + k_1x_A \qquad (6.8)$$

όπου: $\frac{d^2x_A}{dt^2} = \alpha_A$ και $\frac{d^2x_A}{dt^2} = \alpha_B$ είναι οι επιταχύνσεις των μαζών m_A και m_B, αντίστοιχα.

Οι Σχέσεις (6.7) και (6.8) επαναδιατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{d^2x_A}{dt^2} + \frac{(k+k_1)}{m_A}x_A - \frac{k_1}{m_A}x_B = 0 \qquad (6.9)$$

$$\frac{d^2x_B}{dt^2} + \frac{(k+k_1)}{m_B}x_B - \frac{k_1}{m_B}x_A = 0 \qquad (6.10)$$

Έχοντας ως δεδομένες τις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_A και m_B : x_A=Acos(ωt) και x_B=Bcos(ωt), οι Σχέσεις (6.9) και (6.10) δίνουν το εξής γραμμικό σύστημα με μεταβλητές τα πλάτη ταλάντωσης Α και Β των μαζών m_A και m_B:

$$-\omega^2 A + \frac{(k+k_1)}{m_A}A + \frac{k_1}{m_A}B = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_A}\right)A + \frac{k_1}{m_A}B = 0 \qquad (6.11)$$

$$-\omega^2 B + \frac{(k+k_1)}{m_B}B - \frac{k_1}{m_B}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_1}{m_B}A + \left(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_B}\right)B = 0 \qquad (6.12)$$

Οι Σχέσεις (6.11) και (6.12) συνιστούν ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με μεταβλητές τα πλάτη ταλάντωσης Α και Β. Το σύστημα αυτό έχει μη μηδενικές λύσεις μόνο στην περίπτωση που η ορίζουσα των συντελεστών είναι μηδέν:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_A} & \frac{k_1}{m_A} \\ \frac{k_1}{m_B} & \omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_B} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_A}\right)\left(\omega^2 - \frac{(k+k_1)}{m_B}\right) - \frac{k_1^2}{m_A m_B} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4 - (k+k_1)\left(\frac{m_A+m_B}{m_A m_B}\right)\omega^2 + \frac{(k+k_1)^2 - k_1^2}{m_A m_B} = 0 \qquad (6.13)$$

Η Σχέση (6.13) είναι μια διτετράγωνος εξίσωση με άγνωστη τη γωνιακή συχνότητα ω. Για να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης αυτής πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους συντελεστές αυτής.

$$(k+k_1)\left(\frac{m_A+m_B}{m_A m_B}\right) = \left(25{,}5\frac{N}{m} + 35{,}5\frac{N}{m}\right)\left(\frac{1{,}50\ kg + 1{,}00kg}{(1{,}50\ kg)(1{,}00kg)}\right) = 102\ rad^2/s^2$$

$$\frac{(k+k_1)^2 - k_1^2}{m_A m_B} = \frac{\left(25{,}5\frac{N}{m} + 35{,}5\frac{N}{m}\right)^2 - \left(35{,}5\frac{N}{m}\right)^2}{(1{,}50\ kg)(1{,}00kg)} = 1640\ rad^4/s^4$$

Οπότε, η διτετράγωνος εξίσωση γράφεται:

$$\omega^4 - (102\ rad^2/s^2)\omega^2 + 1640\ rad^4/s^4 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{102\frac{rad^2}{s^2} + \sqrt{\left(102\frac{rad^2}{s^2}\right)^2 - 4\left(1640\frac{rad^4}{s^4}\right)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = 82{,}0\frac{rad^2}{s^2}$$

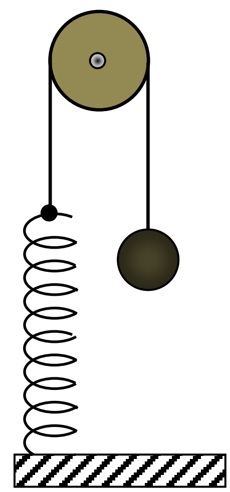
$$\omega_2^2 = \frac{102\frac{rad^2}{s^2} - \sqrt{\left(102\frac{rad^2}{s^2}\right)^2 - 4\left(1640\frac{rad^4}{s^4}\right)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2 = 20{,}0\frac{rad^2}{s^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{82{,}0\frac{rad^2}{s^2}} = 9{,}06\frac{rad}{s} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{9{,}06\frac{rad}{s}}{6{,}28 rad} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 1{,}44\, s^{-1}$$

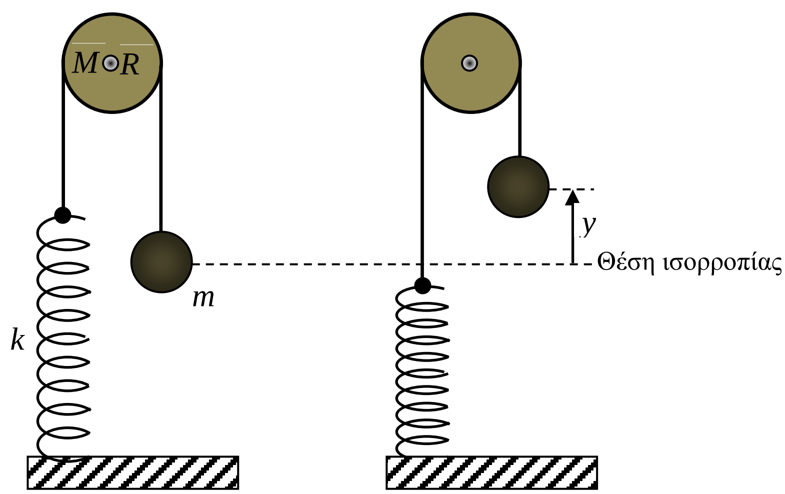
$$\omega_2 = \sqrt{20{,}0\frac{rad^2}{s^2}} = 4{,}47\frac{rad}{s} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{4{,}47\frac{rad}{s}}{6{,}28 rad} \quad \Rightarrow \quad f_2 = 0{,}712\, s^{-1}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7:</u>

Η διάταξη του διπλανού σχήματος περιλαμβάνει ένα κατακόρυφο αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά k=85,0 N/m, μια τροχαλία που έχει μάζα M=0,750 kg και ακτίνα R=0,100 m και μια μάζα m=1,000 kg η οποία προσαρμόζεται στο άνω άκρο του ελατηρίου με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται από την τροχαλία. Εκτρέπουμε τη μάζα m από τη θέση ισορροπίας κατακόρυφα κατά διάστημα A και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί αντιστάσεις. Να αποδείξετε ότι η μάζα θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση και να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω καθώς και τη συχνότητα f της ταλάντωσης αυτής.



<u>ΛΥΣΗ</u>



Εκτρέπουμε τη μάζα m από τη θέση ισορροπίας κατακόρυφα και την αφήνουμε ελεύθερη οπότε αυτή θα κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας. Σε κάποια χρονική στιγμή, η μάζα m θα βρίσκεται σε απόσταση y από τη θέση ισορροπίας και θα έχει ταχύτητα υ. Την ίδια χρονική στιγμή, το ελατήριο θα είναι παραμορφωμένο κατά διάστημα y και η τροχαλία θα περιστρέφεται με γωνιακή συχνότητα ω. Κάτω από αυτές συνθήκες:

Το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργειας: $U_{sp} = \frac{1}{2}ky^2$ (7.1)

Η μάζα m θα έχει μεταφορική κινητική ενέργεια: $K_m = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ (7.2)

Η τροχαλία θα έχει περιστροφική κινητική ενέργεια: $K_\omega = \frac{1}{2}I\omega^2$ (7.3)

όπου *I* είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας: $I = \frac{1}{2}MR^2$ (7.4)

Επειδή η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίση με την ταχύτητα της μάζας m, η γωνιακή ταχύτητα ω και η ταχύτητα υ της μάζας συνδέονται με τη σχέση:

$\upsilon = \omega R$ (7.5)

Η ολική μηχανική ενέργεια E του συστήματος ελατήριο-τροχαλία-μάζα θα είναι ίση με:

$$E = U_{sp} + K_\omega + K_m = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{4}(M+2m)\upsilon^2 \qquad (7.6)$$

Επειδή η μάζα m και η τροχαλία κινούνται ελεύθερα χωρίς δυνάμεις αντίστασης, η ολική μηχανική ενέργεια E του συστήματος ελατήριο-τροχαλία-μάζα θα διατηρείται σταθερή στο χρόνο. Οπότε, η χρονική παράγωγος της Σχέσης (7.6) θα είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}k\frac{dy^2}{dt} + \frac{1}{4}(M+2m)\frac{d\upsilon^2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k2y\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4}(M+2m)2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ky\upsilon + \frac{1}{2}(M+2m)\upsilon\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(M+2m)\alpha = -ky \quad \Rightarrow \quad M_{\alpha\nu}\alpha = -ky \qquad (7.7)$$

όπου:

$\frac{dy}{dt} = \upsilon$ είναι η μεταφορική ταχύτητα της μάζα,

$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha$ είναι η επιτάχυνση της μάζας, και

$$M_{\alpha\nu} = \frac{M+2m}{2}$$

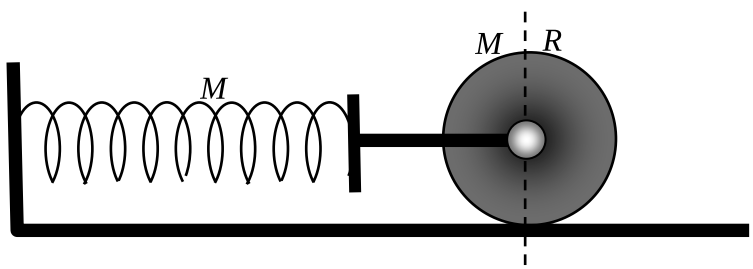
αντιπροσωπεύει την ανοιγμένη μάζα του συστήματος ελατήριο-τροχαλία-μάζα. Η Σχέση (7.7) αντιστοιχεί στη δύναμη επαναφοράς $F=M_{\alpha\nu}\alpha$ που ασκεί ένα ελατήριο με σταθερά *k* πάνω σε ένα σώμα που έχει μάζα ίση με την ανοιγμένη μάζα του συστήματος ελατήριο-τροχαλία-μάζα. Η αναλογία μεταξύ της δύναμης F με την απομάκρυνση y (βλέπε Σχέση 7.7) αποδεικνύει ότι η μάζα *m* θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω η οποία θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_{\alpha\nu}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{M+2m}{2}}} = \sqrt{\frac{85{,}0\, N/m}{\frac{0{,}750kg + 2 \times 1{,}000kg}{2}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = 7{,}86\, rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}86\, rad/s}{6{,}28\, rad} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 1{,}25\, s^{-1}$$

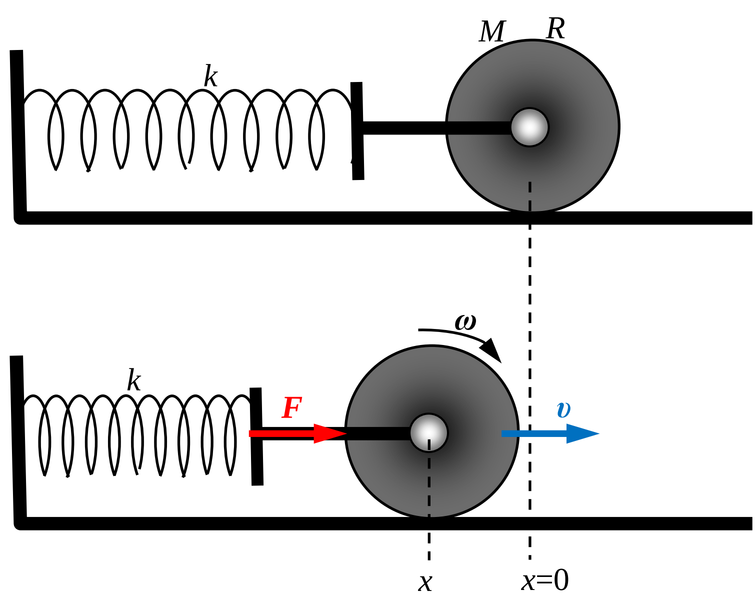
<u>ΑΣΚΗΣΗ 8:</u>

Ο άξονας ενός τροχού είναι προσαρμοσμένος στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου που έχει σταθερά k=45,5 N/m και αμελητέα μάζα. Ο τροχός έχει είναι ένας ομογενής δίσκος που έχει ακτίνα *R*=15,5 cm και μάζα *M*=0,750 kg. Αν ο τροχός εκτραπεί οριζόντια από τη θέση ισορροπίας, τότε αυτός κυλίεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς να ολισθαίνει.



Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Εκτρέπουμε τον τροχό από τη θέση ισορροπίας οριζόντια και τον αφήνουμε ελεύθερο οπότε αυτός θα κυλίσει προς τη θέση ισορροπίας. Σε κάποια χρονική στιγμή, ο τροχός θα βρίσκεται σε απόσταση x από τη θέση ισορροπίας και θα έχει μεταφορική ταχύτητα υ. Την ίδια χρονική στιγμή, το ελατήριο θα είναι παραμορφωμένο κατά διάστημα x και ο τροχός θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Κάτω από αυτές συνθήκες:

Το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργειας: $U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2$ (8.1)

Ο τροχός θα έχει μεταφορική κινητική ενέργεια: $K_m = \frac{1}{2}M\upsilon^2$ (8.2)

Η τροχαλία θα έχει περιστροφική κινητική ενέργεια: $K_\omega = \frac{1}{2}I\omega^2$ (8.3)

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του τροχού: $I = \frac{1}{2}MR^2$ (8.4)

Επειδή η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίση με τη μεταφορική ταχύτητα του τροχού, η γωνιακή ταχύτητα ω και η ταχύτητα υ της μάζας συνδέονται με τη σχέση:

$\upsilon = \omega R$ (8.5)

Η ολική μηχανική ενέργεια Ε του συστήματος ελατήριο-τροχός θα είναι ίση με:

$$E = U_{sp} + K_\omega + K_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon^2}{R^2} + \frac{1}{2}M\upsilon^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{3}{4}M\upsilon^2 \qquad (8.6)$$

Επειδή ο τροχός κινείται ελεύθερα χωρίς δυνάμεις αντίστασης, η ολική μηχανική ενέργεια E του συστήματος ελατήριο-τροχός θα διατηρείται σταθερή στο χρόνο. Οπότε, η χρονική παράγωγος της Σχέσης (8.6) θα είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dt} + \frac{3}{4}M\frac{d\upsilon^2}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} + \frac{3}{4}M2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$kx\upsilon + \frac{3}{2}M\upsilon\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}M\alpha = -kx \quad \Longrightarrow \quad M_{\alpha\nu}\alpha = -kx \qquad (8.7)$$

όπου

$\frac{dx}{dt} = \upsilon$ είναι η μεταφορική ταχύτητα του τροχού,

$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha$ είναι η επιτάχυνση του τροχού, και

$M_{\alpha\nu} = \frac{3M}{2}$

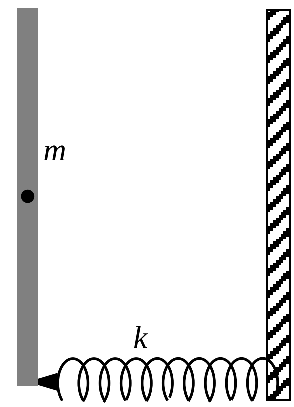
αντιπροσωπεύει την ανοιγμένη μάζα του συστήματος ελατήριο-τροχός. Η Σχέση (8.7) αντιστοιχεί στη δύναμη επαναφοράς $F=M_{\alpha\nu}\alpha$ που ασκεί ένα ελατήριο με σταθερά k πάνω σε ένα σώμα που έχει μάζα ίση με την ανοιγμένη μάζα του συστήματος ελατήριο-τροχός. Η αναλογία μεταξύ της δύναμης F με την απομάκρυνση x (βλέπε Σχέση 8.7) αποδεικνύει ότι το σύστημα ελατήριο-τροχός θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω η οποία θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_{\alpha\nu}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{3M}{2}}} = \sqrt{\frac{45{,}5\ N/m}{\frac{3 \times 0{,}750\ kg}{2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 6{,}36\ rad/s$$

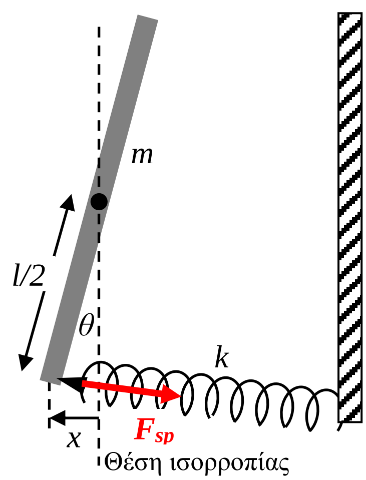
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6{,}36\ rad/s}{6{,}28\ rad} \qquad \Rightarrow \qquad f = 1{,}01\ s^{-1}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9:</u>

Μια ομογενής ράβδος, η οποία έχει μήκος l=1,00 m και μάζα m=1,500 kg, περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αυτής. Όταν η ράβδος είναι στη κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο αυτής προσαρμόζεται σε οριζόντιο ελατήριο που έχει σταθερά k=20,5 N/m όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Στην κατακόρυφη θέση της ράβδου, το ελατήριο είναι απαραμόρφωτο. Όταν η ράβδος εκτραπεί από την κατακόρυφο κατά γωνία θ<15^0 και αφεθεί ελεύθερη να αποδείξετε ότι αυτή θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα f της ταλάντωσης αυτής. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι: $I_{cm} = \frac{mL^2}{12}$.



<u>ΛΥΣΗ</u>



Βασική προϋπόθεση: η μέγιστη γωνία εκτροπής $\theta_{\max}$ της ράβδου πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το 1 *rad*, (θ<<1 *rad*).

Εκτρέπουμε τη ράβδο κατά γωνία $\theta_{\max}$<<1rad και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε το ελατήριο την έλκει προς τη θέση ισορροπίας της (κατακόρυφη θέση). Σε μια τυχαία θέση όπου η γωνία εκτροπής της ράβδου είναι θ, το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα x έτσι ώστε η δύναμη επαναφοράς $F_{sp}= -k\ x$ να ασκεί πάνω στη ράβδο ροπή στρέψης τ ως προς τον άξονα περιστροφής της (δηλαδή ως προς το κέντρο της ράβδου):

$$\tau = F_{sp}\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = -kx\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{kl}{2}x \qquad (9.1)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι στις πολύ μικρές γωνιές θ, το ελατήριο εξακολουθεί να είναι οριακά οριζόντιο. Από το σχήμα της άσκησης, και συγκεκριμένα από το τρίγωνο που έχει πλευρές $l/2$, x και γωνία κορυφής θ, και από τον ορισμό της γωνίας θ σε ακτίνια, έχουμε:

$$\theta = \frac{x}{l/2} \approx \frac{2x}{L} \quad \Rightarrow \quad x \approx \frac{l}{2}\theta \qquad (9.2)$$

Από τις Σχέσεις (9.1) και (9.2) έχουμε:

$$\tau = -\frac{kl^2}{4}\theta \quad \Rightarrow \quad \tau = -D^*\theta \qquad (9.3)$$

όπου:

$$D^* = \frac{kl^2}{4} \qquad (9.4)$$

Η Σχέση (9.3) μας επισημαίνει ότι η ροπή στρέψης ου ασκείται πάνω στη ράβδο είναι ανάλογη με τη γωνία εκτροπής θ της ράβδου από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας. Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η συγκεκριμένη αυτή ροπή είναι και ροπή επαναφοράς. Κατά συνέπεια, η ράβδος στο σύστημα ράβδος-ελατήριο θα εκτελεί απλή στροφική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{\frac{kl^2}{4}}{\frac{ml^2}{12}}} = \sqrt{\frac{12kl^2}{4ml^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 20{,}5\,\frac{N}{m}}{1{,}500\ kg}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 6{,}40\ rad$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6{,}40\ rad/s}{6{,}28} \quad \Rightarrow \quad f = 1{,}02\ s^{-1}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10:</u>

Να λυθεί η Άσκηση 9 χρησιμοποιώντας το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

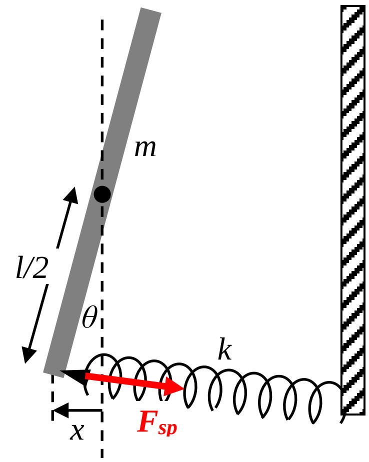
<u>ΛΥΣΗ</u>

Όταν η ράβδος βρίσκεται σε γωνία εκτροπής θ, το ελατήριο θα έχει υποστεί μια παραμόρφωση x και η ράβδος θα έχει μια γωνιακή ταχύτητα ω. Κάτω από τις συνθήκες αυτές:

Το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 \quad \Rightarrow \quad U_{sp} = \frac{1}{8}kl^2\theta^2 \qquad (10.1)$$

όπου $x \approx \frac{l}{2}\theta$ (βλέπε Σχήμα Άσκησης)



Η ράβδος θα έχει περιστροφική κινητική ενέργεια:

$$K_\omega = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12} ml^2\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad K_\omega = \frac{1}{24} ml^2\omega^2 \qquad (10.2)$$

Οπότε, η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος ράβδος-ελατήριο είναι ίση με:

$$E = U_{sp} + K_\omega = \frac{1}{8} kl^2\theta^2 + \frac{1}{24} ml^2\omega^2 \qquad (10.3)$$

Επειδή η ράβδος περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς δυνάμεις αντίστασης, η ολική μηχανική ενέργεια E του συστήματος ράβδος-ελατήριο θα διατηρείται σταθερή στο χρόνο. Οπότε, η χρονική παράγωγος της Σχέσης (10.3) θα είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{8} kl^2\theta^2 + \frac{1}{24} ml^2\omega^2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8} kl^2 2\theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{m}{24} ml^2 2\omega \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{4} kl^2\theta\omega + \frac{1}{12} ml^2\omega \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{12} ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{4} kl^2\theta \quad \Longrightarrow \quad I\frac{d\omega}{dt} = -D^* x \qquad (10.4)$$

όπου:

$I = \frac{1}{12} ml^2$ είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της,

$D^* = \frac{1}{4} kl^2$ είναι η σταθερά ροπής επαναφοράς

Η Εξίσωση (10.4) μας λέει ότι το σύστημα ράβδος-ελατήριο εκτελεί στροφική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα Ω:

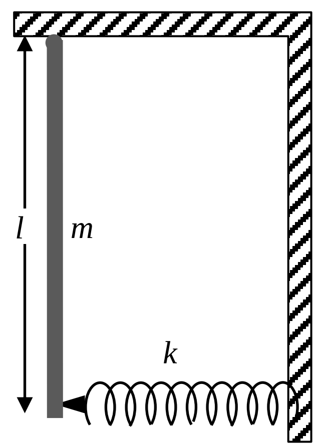
$$\Omega = \sqrt{\frac{D^*}{I}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}kl^2}{\frac{1}{12}ml^2}} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 20{,}5\,\frac{N}{m}}{1{,}500\,kg}} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = 6{,}40\,rad$$

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{6{,}40\,rad/s}{6{,}28} \quad \Longrightarrow \quad f = 1{,}02\,s^{-1}$$

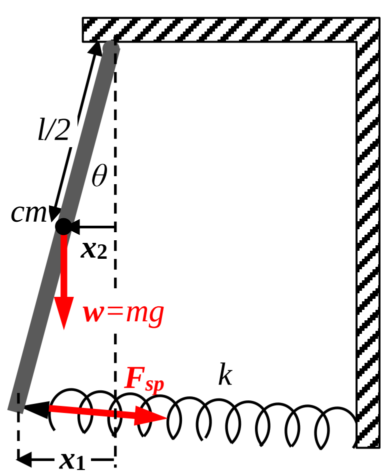
Συμβολίσαμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωση με Ω για να ξεχωρίσει από τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω της στρεφόμενης ράβδου.

ΑΣΚΗΣΗ 11:

Μια ομογενής ράβδος, η οποία έχει μήκος L=1,00 m και μάζα m=1,500 kg, περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το επάνω άκρο αυτής. Όταν η ράβδος είναι στη κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο αυτής προσαρμόζεται σε οριζόντιο ελατήριο που έχει σταθερά k=20,5 N/m όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Στην κατακόρυφη θέση της ράβδου, το ελατήριο είναι απαραμόρφωτο. Όταν η ράβδος εκτραπεί από την κατακόρυφο κατά γωνία $\theta_{max}<15^0$ και αφεθεί ελεύθερη να αποδείξετε ότι αυτή θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα f της ταλάντωσης αυτής. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι: $I_{cm} = \frac{mL^2}{12}$.



ΛΥΣΗ



Βασική προϋπόθεση: η μέγιστη γωνία εκτροπής θ_{max} της ράβδου πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το 1 *rad*, (θ<<1 *rad*).

Εκτρέπουμε τη ράβδο κατά γωνία θ_{max}<<1rad και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε το ελατήριο την έλκει προς τη θέση ισορροπίας της (κατακόρυφη θέση). Σε μια τυχαία θέση όπου η γωνία εκτροπής του εκκρεμούς είναι θ, το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα x_1 έτσι ώστε η δύναμη επαναφοράς $F_{sp} = -k\, x_1$ να ασκεί πάνω στη ράβδο ροπή στρέψης τ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής της (δηλαδή ως προς το άνω άκρο της ράβδου):

$$\tau_1 = F_{sp} l \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_1 = -k x_1 l \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_2 = -k l x_1 \qquad (11.1)$$

Αλλά και το βάρος $w=mg$ της ράβδου, το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο της ομογενούς ράβδου, ασκεί μια ροπή στρέψης τ_2 η οποία τείνει να στρέψει τη ράβδο προς τη θέση ισορροπίας της. Η ροπή αυτή είναι ίση με:

$$\tau_2 = -w\frac{l}{2} sin\theta = -\frac{mgl}{2} sin\theta \qquad (11.2)$$

Το αρνητικό πρόσημο μπήκε στη Σχέση (11.2) επειδή η ροπή τ_2 είναι θετική ενώ η γωνία θ, και φυσικά το ημίτονό της, είναι αρνητική. Σημειώνουμε εδώ ότι στις πολύ μικρές γωνιές θ, το ελατήριο εξακολουθεί να είναι οριακά οριζόντιο. Από το σχήμα της άσκησης, και συγκεκριμένα από το τρίγωνο που έχει πλευρές l, x_1 και γωνία κορυφής θ, και από τον ορισμό της γωνίας θ σε ακτίνια, έχουμε:

$$\theta = \frac{x}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad x = l\theta \qquad (11.3)$$

Για τον ίδιο λόγο, επειδή θ<<1 rad, ισχύει η προσεγγιστική σχέση:

$$sin\theta \approx \theta\ (rad) \qquad (11.4)$$

Αντικαθιστώντας τις Σχέσεις (11.3) και (11.4) στις Σχέσεις (11.1) και (11.2), παίρνουμε:

$$\tau_1 = -kl^2\theta \qquad (11.5)$$

και

$$\tau_2 = -\frac{mgl}{2}\theta \qquad (11.6)$$

Η συνολική ροπή τ_{net} που ασκείται πάνω στη ράβδο είναι ίση με:

$$\tau_{net} = \tau_1 + \tau_2 = -kl^2\theta - \frac{mgl}{2}\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_{net} = -\left(kl^2 + \frac{mgl}{2}\right)\theta \qquad \Longrightarrow$$

$$\tau_{net} = -D^*\theta \qquad (11.7)$$

όπου:

$$D^* = kl^2 + \frac{mgl}{2} \qquad (11.8)$$

Η Σχέση (11.7) μας επισημαίνει ότι η ροπή στρέψης που ασκείται πάνω στο εκκρεμές είναι ανάλογη με τη γωνία εκτροπής θ της ράβδου από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας. Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η συγκεκριμένη αυτή ροπή είναι και ροπή επαναφοράς. Κατά συνέπεια, η ράβδος στο σύστημα ράβδος-ελατήριο θα εκτελεί απλή στροφική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα Ω:

$$\Omega = \sqrt{\frac{D^*}{I}} = \sqrt{\frac{kl^2 + \frac{mgl}{2}}{\frac{ml^2}{3}}} = \sqrt{\frac{6kl^2 + 3mgl}{2ml^2}} = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{3g}{2l}} = \sqrt{\frac{3\text{x}20{,}5\,\frac{N}{m}}{1{,}500kg} + \frac{3\text{x}9{,}80\,\frac{m}{s^2}}{2\text{x}1{,}00\,m}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Omega = 7{,}46\,rad/s$$

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{7{,}46\,rad/s}{6{,}28} \quad \Longrightarrow \quad f = 1{,}19\,s^{-1}$$

όπου για τη ροπή αδράνειας I χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων του Steiner:

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{mL^2}{3}$$

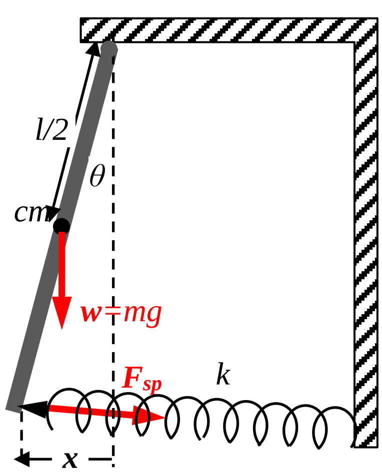
Συμβολίσαμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωση με Ω για να ξεχωρίσει από τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω της στρεφόμενης ράβδου.

ΑΣΚΗΣΗ 12:

Να λυθεί η Άσκηση 11 χρησιμοποιώντας το θεώρημα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

ΛΥΣΗ

Εκτρέπουμε τη ράβδο κατά γωνία θ_{max}<<1rad και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε το ελατήριο την έλκει προς τη θέση ισορροπίας της (κατακόρυφη θέση). Σε μια τυχαία θέση όπου η γωνία εκτροπής του εκκρεμούς είναι θ, το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα x και η ράβδος θα έχει γωνιακή ταχύτητα ω. Σημειώνουμε εδώ ότι στις πολύ μικρές γωνιές θ, το ελατήριο εξακολουθεί να είναι οριακά οριζόντιο.



Από το σχήμα της άσκησης, και συγκεκριμένα από το τρίγωνο που έχει πλευρές l, x και γωνία κορυφής θ, και από τον ορισμό της γωνίας θ σε ακτίνια, έχουμε:

$$\theta = \frac{x}{l} \quad \Longrightarrow \quad x = l\theta$$

Κάτω από τις συνθήκες αυτές το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l\theta)^2 \quad \Longrightarrow \quad U_{sp} = \frac{1}{2}kl^2\theta^2 \qquad (12.1)$$

Η ράβδος θα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια η οποία προκύπτει από το θεώρημα έργου δυναμικής ενέργειας.

Υπολογισμός της δυναμικής ενέργειας της ράβδου που έχει εκτραπεί κατά γωνία θ:

Σε μια στοιχειώδη εκτροπή της ράβδου από τη γωνία θ στην γωνία (θ+$d\theta$) το στοιχειώδες έργο που παράγεται ή καταναλίσκεται είναι:

$$dW = \tau\, d\theta \qquad (12.2)$$

όπου τ είναι η βαρυτική ροπή της ράβδου ως προς το πάνω άκρο της ράβδου. Εξ ορισμού, η βαρυτική ροπή είναι ίση με:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_G \quad \text{ή} \quad \tau = -r_{cm}F_G sin\theta \approx -\frac{l}{2}mg\,\theta \qquad (12.3)$$

Το πρόσημο (–) προέκυψε από το γεγονός ότι η βαρυτική ροπή είναι θετική ενώ η γωνία θ είναι αρνητική (βλέπε Σχήμα Άσκησης). Οπότε, με ολοκλήρωση της Εξίσωσης 12.2 υπολογίζουμε το έργο που καταναλίσκει η βαρυτική ροπή τ για να εκτραπεί η ράβδος από τη γωνία θ=0 στη γωνία θ είναι:

$$W = \int dW = \int_0^\theta \tau\, d\theta = \int_0^\theta \left(-\frac{l}{2}mg\,\theta\right)d\theta = -\frac{l}{2}mg\int_0^\theta \theta d\theta = -\frac{l}{2}mg\frac{1}{2}\theta^2 \quad \Rightarrow$$

$$W = -\frac{l}{4}mgl\theta^2 \qquad (12.4)$$

Θεώρημα Έργου – Δυναμικής Ενέργειας:

$$W = -\Delta U = -(U(\theta) - U(0) = -U(\theta) \qquad (12.5)$$

Από τις Εξισώσεις 12.4 και 12.5 προκύπτει η δυναμική ενέργεια της ράβδου όταν αυτή έχει εκτραπεί κατά γωνία θ:

$$U(\theta) = \frac{l}{4}mgl\theta^2 \qquad (12.6)$$

Η ράβδος θα έχει περιστροφική κινητική ενέργεια:

$$K_\omega = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} ml^2\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad K_\omega = \frac{1}{6} ml^2\omega^2 \qquad (12.7)$$

Από τις Εξισώσεις 12.1, 12.6 και 12.7, η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος ράβδος-ελατήριο είναι ίση με:

$$E = U_{sp} + U(\theta) + K_\omega = \frac{1}{2} kl^2\theta^2 + \frac{l}{4} mgl\theta^2 + \frac{1}{6} ml^2\omega^2 \quad \Longrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}\left(kl^2 + \frac{l}{2} mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{6} ml^2\omega^2 \qquad (12.8)$$

Επειδή η ράβδος περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς δυνάμεις αντίστασης, η ολική μηχανική ενέργεια E του συστήματος ράβδος-ελατήριο θα διατηρείται σταθερή στο χρόνο. Οπότε, η χρονική παράγωγος της Σχέσης (12.8) θα είναι ίση με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(kl^2 + \frac{l}{2} mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{6} ml^2\omega^2\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(kl^2 + \frac{l}{2} mgl\right) 2\theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6} ml^2 2\omega \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\left(kl^2 + \frac{l}{2} mgl\right)\theta + \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -\left(kl^2 + \frac{l}{2} mgl\right)\theta \quad \Longrightarrow$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = -D^*\theta \qquad (12.9)$$

όπου:

$I = \frac{1}{3} ml^2$ είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως άξονα που διέρχεται από το άκρο της

$D^* = kl^2 + \frac{l}{2} mgl$ είναι η σταθερά της ροπής επαναφοράς του συστήματος ράβδος – ελατήριο

Η Εξίσωση (12.9) μας λέει ότι το σύστημα ράβδος-ελατήριο εκτελεί στροφική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα Ω:

$$\Omega = \sqrt{\frac{D^*}{I}} = \sqrt{\frac{kl^2 + \frac{mgl}{2}}{\frac{ml^2}{3}}} = \sqrt{\frac{6kl^2 + 3mgl}{2ml^2}} = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{3g}{2l}} = \sqrt{\frac{3\text{x}20{,}5\,\frac{N}{m}}{1{,}500kg} + \frac{3\text{x}9{,}80\,\frac{m}{s^2}}{2\text{x}1{,}00\,m}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Omega = 7{,}46\, rad/s$$

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{7{,}46\, rad/s}{6{,}28} \quad \Longrightarrow \quad f = 1{,}19\, s^{-1}$$

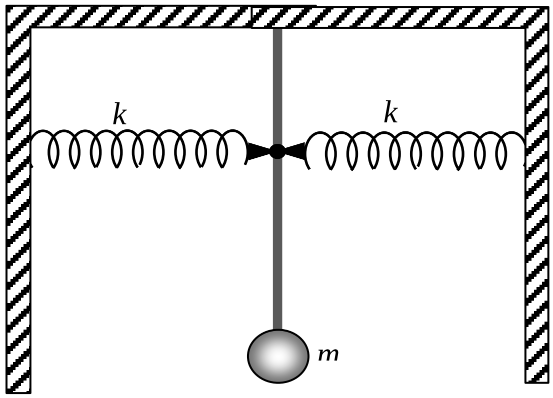
όπου για τη ροπή αδράνειας I χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων του Steiner:

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{mL^2}{3}$$

Συμβολίσαμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωση με Ω για να ξεχωρίσει από τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω της στρεφόμενης ράβδου.

ΑΣΚΗΣΗ 13:

Ένα απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m=0,500 kg η οποία είναι προσαρμοσμένη στο άκρο μιας συμπαγούς αλλά αβαρούς ράβδου (μάζα ράβδου πολλές φορές μικρότερη από τη μάζα m) μήκους L=1,00 m. Δυο οριζόντια ελατήρια που έχουν σταθερά k=25,5 N/m το κάθε ένα από αυτά είναι προσαρμοσμένα στη ράβδο και σε απόσταση h=40,0 cm από το σημείο εξάρτησής της, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Όταν το εκκρεμές είναι στην κατακόρυφο θέση, το ελατήρια είναι απαραμόρφωτα. Όταν το εκκρεμές εκτραπεί από την κατακόρυφο κατά γωνία $\theta<15^0$ και αφεθεί ελεύθερο να αποδείξετε ότι σύστημα εκκρεμές-ελατήριο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης f.

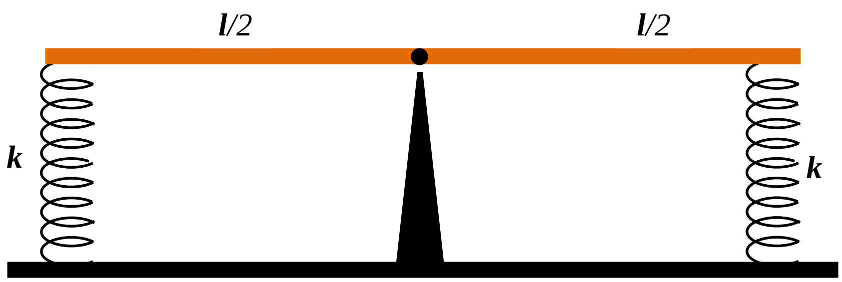


ΛΥΣΗ

Άσκηση προς λύση από τους Φοιτητές.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Μια δοκός μήκους l = 3,00 m και μάζας m = 50,0 kg δύναται να περιστρέφεται ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της. Στα άκρα της δοκού είναι προσαρμοσμένα δυο κατακόρυφα ελατήρια με σταθερά k = 500 N/m τα οποία είναι πακτωμένα σε οριζόντιο έδαφος, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

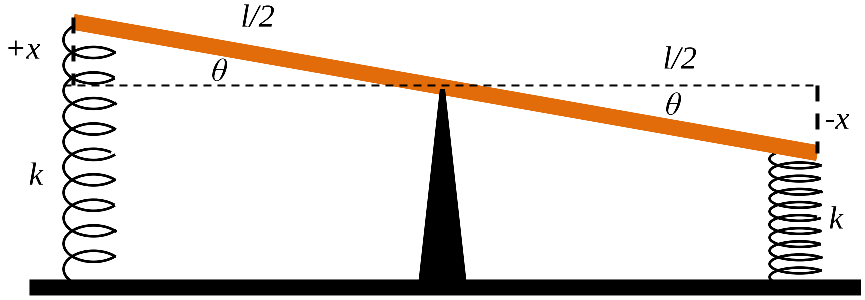


Αν το ένα από τα δυο άκρα της δοκού συμπιέσει προς τα κάτω το αντίστοιχο ελατήριο και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η δοκός θα αρχίσει να εκτελεί στροφική ταλάντωση γύρω από το κέντρο της.

β. Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω και τη συχνότητα f της στροφικής ταλάντωσης.

ΛΥΣΗ



α. Γωνία θ πολύ μικρή: $\theta \approx \frac{x}{l/2} \quad \Rightarrow \quad x \approx \frac{l}{2}\theta$ (14.1)

Δυναμική ενέργεια αριστερού ελατηρίου: $U_1 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}\theta^2 = \frac{kl^2}{8}\theta^2$ (14.2)

Δυναμική ενέργεια δεξιού ελατηρίου: $U_2 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{l^2}{4}\theta^2 = \frac{kl^2}{8}\theta^2$ (14.3)

Περιστροφική κινητική ενέργεια δοκού: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ (14.4)

όπου $I = \frac{1}{12}ml^2$ είναι η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς το κέντρο της.

Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ (είναι σταθερή)

$$E = U_1 + U_2 + K = \frac{kl^2}{8}\theta^2 + \frac{kl^2}{8}\theta^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega^2 = \frac{kl^2}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{kl^2}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kl^2}{4}2\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{I}{2}2\omega\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{kl^2}{2}\theta\frac{d\theta}{dt} + I\omega\frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad (14.5)$$

Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ *και* *Γωνιακή επιτάχυνση*: $\alpha_\omega = \frac{d\omega}{dt}$

Οπότε η Εξίσωση (14.5) γίνεται:

$$\frac{kl^2}{2}\theta\cancel{\omega} + I\cancel{\omega}\alpha_\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad I\alpha_\omega = -\frac{kl^2}{2}\theta \quad \Rightarrow \quad \tau = -D^*\theta \qquad (14.6)$$

Σταθερά επαναφοράς: $D^* = \frac{kl^2}{2}$

Η ροπή στρέψης τ της ράβδου είναι ανάλογη της γωνίας εκτροπής *θ*. Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος εκτελεί στροφική ταλάντωση.

β. Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης της δοκού είναι ίση με:

$$\omega^2 = \frac{D^*}{I} = \frac{\frac{kl^2}{2}}{\frac{1}{12}ml^2} = \frac{6k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}} = \sqrt{\frac{6 \times 500\ \mathrm{N/m}}{50\ \mathrm{kg}}} = 7{,}75\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}75\ \mathrm{rad/s}}{6{,}28\ \mathrm{rad}} \quad \Rightarrow \quad f = 1{,}23\ \mathrm{Hz}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 15</u>

Στις παραπάνω ασκήσεις ταλαντωτών με ελατήρια, τα ελατήρια ήταν αβαρή ή η μάζα τους $m_{ελ}$ ήταν πολλές φορές μικρότερη από τη μάζα m που ήταν αναρτημένη στο ελεύθερο τους. Όταν ένα ελατήριο με σταθερά k δεν είναι αβαρές αλλά έχει μάζα $m_{ελ}$, να αποδείξετε ότι στην περίπτωση αυτή ο ταλαντωτής που θα αποτελείται από το συγκεκριμένο ελατήριο και μια μάζα m θα ταλαντώνεται με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_{ελ}}{3}}{k}}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

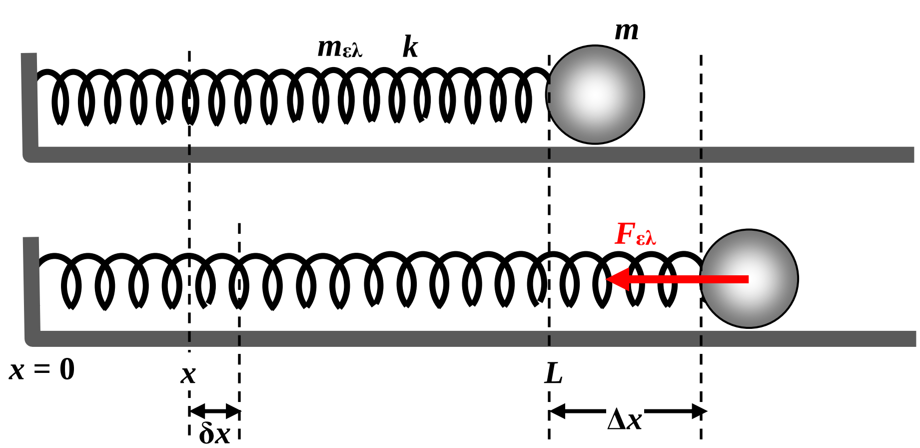
Κατ' αρχήν θεωρούμε τα εξής:

Μήκος ελατηρίου = L

Μάζα ελατηρίου = $m_{ελ}$

Η μάζα $m_{ελ}$ του ελατηρίου ισοκατανέμεται σε κάθε σπείρα

Στο παρακάτω Σχήμα δίνεται ο ταλαντωτής ελατήριο – μάζα m στην κατάσταση ισορροπίας και σε μια τυχαία χρονική στιγμή στην οποία η μετατόπιση της μάζα m είναι Δx.



Στην τυχαία χρονική στιγμή, αλλά και σε κάθε χρονική στιγμή, η συνολική παραμόρφωση (σμίκρυνση ή επιμήκυνση) Δx θα είναι ίση με το άθροισμα των επί μέρους παραμορφώσεων όλων των σπειρών του ελατηρίου, δηλαδή θα είναι ανάλογη με το μήκος L του ελατηρίου. Κατά αναλογία, σε κάθε θέση x του ελατηρίου, η αντίστοιχη παραμόρφωση δx θα είναι ίση με το άθροισμα των παραμορφώσεων των σπειρών του ελατηρίου που βρίσκονται στο μήκος x του ελατηρίου, δηλαδή θα είναι ανάλογη με το μήκος x. Η θεώρηση αυτή ανάγεται στην παρακάτω αναλογία:

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\Delta x}{L} \quad \Rightarrow \quad \delta x = \frac{x}{L}\Delta x \qquad (15.1)$$

Με παραγώγιση ως προς το χρόνο t της Εξίσωσης 15.1 βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα ταλάντωσης $\upsilon(x)$ των σπειρών που βρίσκονται στη θέση x του ελατηρίου με την ταχύτητα υ του δεξιού άκρου του ελατηρίου (δηλαδή της μάζας m):

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{x}{L}\frac{d(\Delta x)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \upsilon(x) = \frac{x}{L}\upsilon \qquad (15.2)$$

Από το γεγονός ότι η μάζα $m_{\varepsilon\lambda}$ του ελατηρίου ισοκατανέμεται σε κάθε σπείρα προκύπτει ότι η γραμμική πυκνότητα μάζας μ του ελατηρίου θα είναι ίδια σε κάθε θέση x του ελατηρίου. Οπότε:

$$\mu = \frac{dm_{\varepsilon\lambda}}{dx} = \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L} \quad \Rightarrow \quad dm_{\varepsilon\lambda} = \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L}dx \qquad (15.3)$$

Η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας $dm_{\varepsilon\lambda}$ του ελατηρίου στη θέση x θα είναι ίση με:

$$dK_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}dm_{\varepsilon\lambda}[\upsilon(x)]^2 \qquad (15.4)$$

Στην Εξίσωση 15.4 αντικαθιστούμε το $dm_{\varepsilon\lambda}$ και το $\upsilon(x)$, τα οποία δίνονται από τις Εξισώσεις 15.3 και 15.2, αντίστοιχα, για να πάρουμε:

$$dK_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L}dx\left[\frac{x}{L}\upsilon\right]^2 \quad \Rightarrow \quad dK_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L^3}\upsilon^2 x^2 dx \qquad (15.4)$$

Η συνολική κινητική ενέργεια $K_{\varepsilon\lambda}$ του ελατηρίου θα είναι ίση με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών κινητικών ενεργειών των στοιχειωδών μαζών $dm_{\varepsilon\lambda}$ του ελατηρίου από τη θέση $x = 0$ έως τη θέση $x = L$ του ελατηρίου. Αυτό ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα:

$$K_{\varepsilon\lambda} = \int dK_{\varepsilon\lambda} = \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L^3}\upsilon^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L^3}\upsilon^2 \int_{x=0}^{x=L} x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{L^3}\upsilon^2\frac{L^3}{3} \quad \Rightarrow$$

$$K_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\upsilon^2 \qquad (15.5)$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, η μηχανική ενέργεια Ε του ταλαντωτή «ελατήριο μάζας $m_{\varepsilon\lambda}$ – μάζα m» θα διατηρείται σταθερή και θα είναι ίση με το άθροισμα:

Της κινητικής ενέργειας της μάζας m: $K_m = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Της κινητικής ενέργειας του ελατηρίου: $K_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\upsilon^2$

Της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (15.6)$$

Επειδή η Μηχανική ενέργεια Ε διατηρείται σταθερή, η πρώτη παράγωγος ως προς το χρόνο θα είναι ίση με το μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\upsilon^2\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

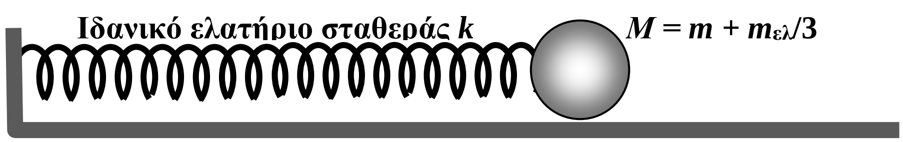
$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\frac{d\upsilon^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\cancel{\upsilon}\alpha + kx\cancel{\upsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}\right)\alpha + kx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M\alpha = -kx \qquad (15.6)$$

όπου $M = m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}$ (ανοιγμένη μάζα) (15.7)

Από τις Εξισώσεις 15.6 και 15.7 προκύπτει ότι ο ταλαντωτής «ελατήριο σταθερά k και μάζας $m_{\varepsilon\lambda}$ – μάζας m» ισοδυναμεί με ένα ταλαντωτή «ιδανικό ελατήριο με σταθερά k – μάζας $M = m + m_{\varepsilon\lambda}/3$» (βλέπε παρακάτω σχήμα):

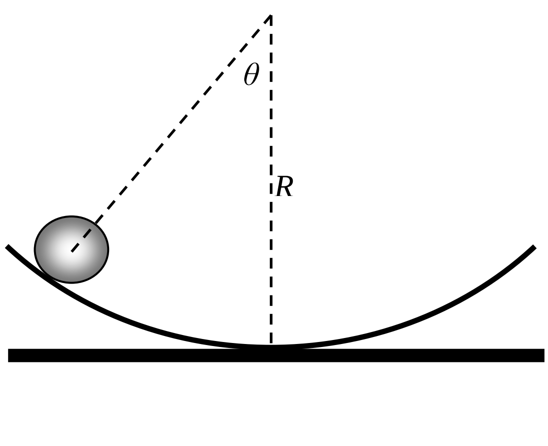


Η γωνιακή συχνότητα του ταλαντωτή θα είναι ίση με:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T} = \frac{k}{m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}}{k}}$$

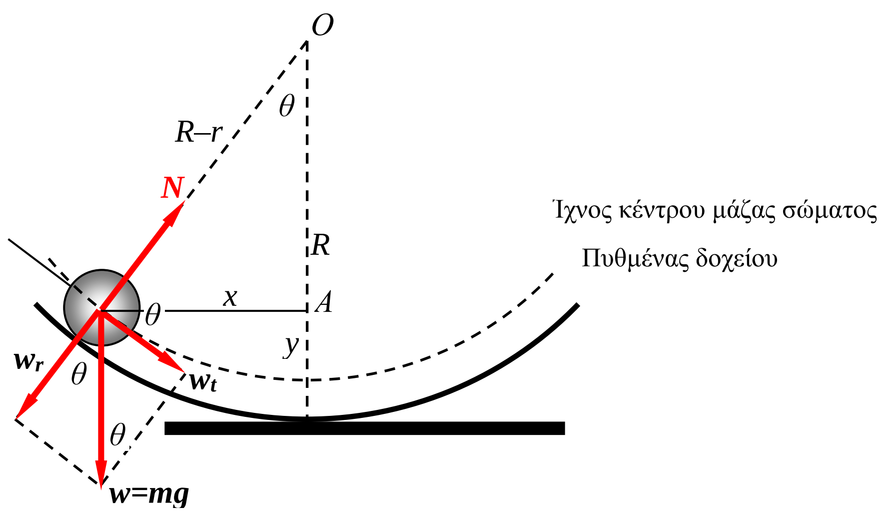
<u>ΑΣΚΗΣΗ 16:</u>

Ένα σφαιρικό σώμα που έχει μάζα m=0,500 kg και ακτίνα r=10,0 cm αφήνεται ελεύθερο στο πυθμένα ενός δοχείου ο οποίος αντιστοιχεί σε σφαιρικό τμήμα ακτίνας R=1,00 m, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Στην ειδική περίπτωση που το σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβή και χωρίς να κυλίεται, να αποδείξετε ότι το σώμα αυτό θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης.

ΛΥΣΗ



ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Για τη λύση του προβλήματος να θεωρήσετε ότι το σώμα κινείται πολύ κοντά στο κατώτατο σημείου του σφαιρικού πυθμένα. Με βάση το σχήμα της άσκησης, πρέπει γωνία θ<<1 rad.

Επειδή το σώμα που κινείται στον πυθμένα του δοχείο έχει διαστάσεις, αντικαθιστούμε αυτό με ένα υλικό σημείο το οποίο έχει μάζα m=0,500 kg και το οποίο είναι τοποθετημένο στο κέντρο μάζας του σώματος. Η διακεκομμένη γραμμή είναι το ίχνος του υλικού σημείου καθώς το σώμα κινείται.

Πρώτος τρόπος.
Χρησιμοποιήστε το Β' Νόμο του Νεύτωνα.

Σε μια τυχαία θέση, στην οποία η μάζα απέχει από την κατακόρυφο απόσταση x, πάνω στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος w=mg και η κάθετη δύναμη N που ασκεί η σφαιρική επιφάνεια της βάσης. Αναλύουμε το βάρος w στις εξής δυο συνιστώσες:

Συνιστώσα που είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του κέντρου μάζας: $w_t = wsin\theta = mgsin\theta$ (16.1)

Ακτινική συνιστώσα: $w_r = wcos\theta = mgcos\theta$ (16.2)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει ως κάθετες πλευρές την (ΟΑ) και την x και ως υποτείνουσα την R–r, το ημίτονο της γωνίας θ είναι ίσο με $sin\theta = \frac{x}{R-r}$, Οπότε η Σχέση (9.1) γίνεται:

$$w_t = \frac{mg}{R-r}x \qquad (16.3)$$

Παρατηρήσεις επί της Σχέσης (16.3):

1. Όταν η γωνία θ είναι πολύ μικρή (θ<<1 *rad*), τότε η συνιστώσα w_t θα τείνει να είναι παράλληλος με την απομάκρυνση x του σώματος από την κατακόρυφο που διέρχεται από το κατώτατο σημείο του σφαιρικού τμήματος.
2. Στην περίπτωση που μελετάμε, η απομάκρυνση x είναι αρνητική ενώ η δύναμη $w_t=F$ είναι θετική.
3. Η δύναμη $w_t=F$ ισοδυναμεί με δύναμη επαναφοράς που δρα πάνω στο σώμα.

Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, η Σχέση (16.3) μπορεί να γραφεί:

$$F = -\frac{mg}{R-r}x \quad \Longrightarrow \quad F = -Dx \qquad (16.4)$$

όπου:

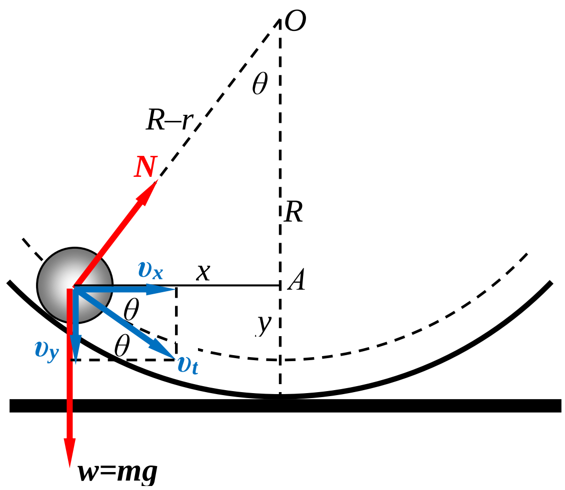
$$D = \frac{mg}{R-r} \qquad (16.5)$$

Από τη Σχέση (16.4) προκύπτει ότι το σώμα με μάζα m θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{m(R-r)}} = \sqrt{\frac{g}{R-r}} = \sqrt{\frac{(9{,}80\ m/s^2)}{(1{,}00\ m - 0{,}100\ m)}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 3{,}30\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}30\frac{rad}{s}}{6{,}28} \quad \Longrightarrow \quad f = 0{,}525\ s^{-1}$$

Δεύτερος τρόπος.
Χρησιμοποιήστε το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.



Στην τυχαία θέση που δείχνει το σχήμα της άσκησης, το σώμα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_g = mgy$$

όπου y είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του σώματος σε σχέση με τη θέση του κέντρου μάζας όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτατο σημείο του σφαιρικού τμήματος.

Στην ίδια θέση, το σώμα έχει επιτρόχια ταχύτητα υ_t και ως εκ τούτου έχει και κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon_t^2$$

Η ολική μηχανική ενέργεια Ε του σώματος διατηρείται σταθερή και είναι ίση με:

$$K + U_g = E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\upsilon_t^2 + mgy = E \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\upsilon_t^2 + mgy\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m \frac{d\upsilon_t^2}{dt} + mg\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} m2\upsilon_t \frac{d\upsilon_t}{dt} + mg\upsilon_y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\upsilon a_t + mg\upsilon_y = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t + g\frac{\upsilon_y}{\upsilon_t} = 0 \qquad (16.6)$$

Εξ ορισμού:

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y, \quad \frac{d\upsilon_t}{dt} = a_t \;(επιτρόχια\ επιτάχυνση), \quad \alpha_t = a_\omega(R - r) \qquad (16.7)$$

Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$\frac{\upsilon_y}{\upsilon_t} = sin\theta \approx \theta \quad \text{επειδή} \quad \theta \ll 1\, rad \qquad (16.8)$$

Από τις Σχέσεις (16.7) και (16.8) η Σχέση (16.7) γίνεται:

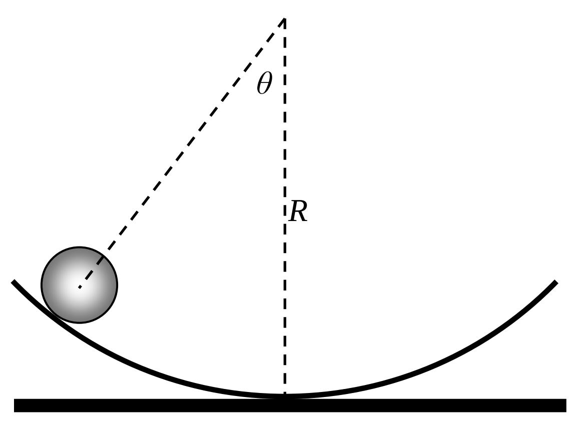
$$(R - r)\alpha_\omega + g\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_\omega + \frac{g}{R - r}\theta = 0 \qquad (16.9)$$

Από τη Σχέση (16.9) προκύπτει ότι το σώμα μάζας m θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R - r}} \sqrt{\frac{(9{,}80\, m/s^2)}{(1{,}00\, m - 0{,}100\, m)}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 3{,}30 \frac{rad}{s}$$

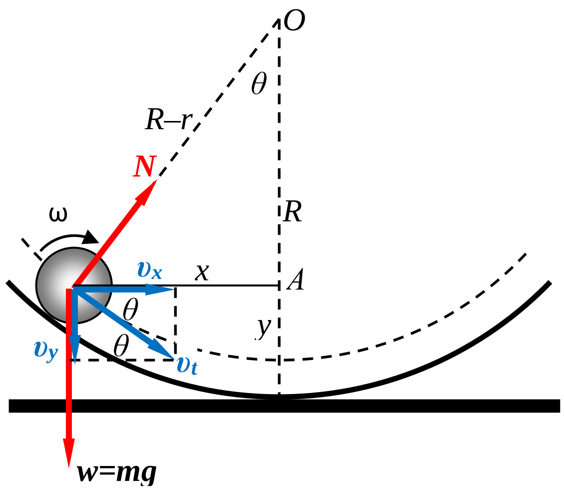
ΑΣΚΗΣΗ 17:

Ένα σφαιρικό σώμα που έχει μάζα *m*=0,500 kg και ακτίνα r=10,0 cm αφήνεται ελεύθερο στο πυθμένα ενός δοχείου ο οποίος αντιστοιχεί σε σφαιρικό τμήμα ακτίνας R=1,00 m, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Στην ειδική περίπτωση που το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, να αποδείξετε ότι το σώμα αυτό θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης.

<u>ΛΥΣΗ</u>



ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Για τη λύση του προβλήματος να θεωρήσετε ότι το σώμα κινείται πολύ κοντά στο κατώτατο σημείου του σφαιρικού πυθμένα. Με βάση το σχήμα της άσκησης, πρέπει γωνία θ<<1 rad.

Η ροπή αδράνειας σφαίρας που έχει μάζα m και ακτίνα r δίνεται από τη σχέση: $I = \frac{2mr^2}{5}$

Στην τυχαία θέση που δείχνει το σχήμα της άσκησης, το σώμα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_g = mgy$$

όπου y είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας του σώματος σε σχέση με τη θέση του κέντρου μάζας όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτατο σημείο του σφαιρικού τμήματος.

Στην ίδια θέση, το σώμα έχει επιτρόχια ταχύτητα υ_t και μια γωνιακή ταχύτητα ω, και ως εκ τούτου έχει μεταφορική κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_t^2$$

και περιστροφική κινητική ενέργεια:

$$K_\omega = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2mr^2}{5}\frac{\upsilon_t^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad K_\omega = \frac{1}{5}m\upsilon_t^2$$

Η ολική μηχανική ενέργεια Ε του σώματος διατηρείται σταθερή και είναι ίση με:

$$K + K_\omega + U_g = E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_t^2 + \frac{1}{5}m\upsilon_t^2 + mgy = E \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{10}m\upsilon_t^2 + mgy = E \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{7}{10}mv_t^2 + mgy\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{10}m\frac{dv_t^2}{dt} + mg\frac{dy}{dt} = \frac{7}{10}m2v_t\frac{dv_t}{dt} + mgv_y = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{7}{5}mva_t + mgv_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_t + \frac{5g}{7}\frac{v_y}{v_t} = 0 \qquad (17.1)$$

Εξ ορισμού:

$$\frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_t}{dt} = a_t \text{ (επιτρόχια επιτάχυνση)}, \quad v_t = \omega r \ \text{ και } \quad \alpha_t = a_\omega(R-r) \qquad (17.2)$$

Από το Σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$\frac{v_y}{v_t} = sin\theta \approx \theta \quad \text{επειδή} \ \ \theta \ll 1\,rad \qquad (17.3)$$

Από τις Σχέσεις (17.2) και (17.3) η Σχέση (17.1) γίνεται:

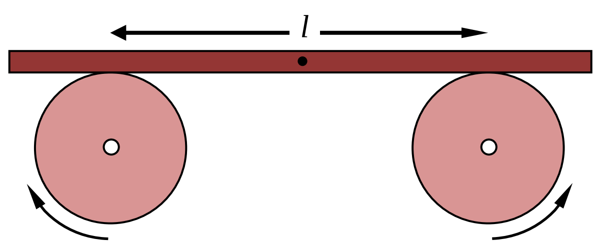
$$(R-r)\alpha_\omega + \frac{5g}{7}\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_\omega + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0 \qquad (17.4)$$

Από τη Σχέση (17.4) προκύπτει ότι το σώμα μάζας m, όταν αυτό κυλίεται,θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}\sqrt{\frac{5(9{,}80\,m/s^2)}{7(1{,}00\,m - 0{,}100\,m)}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2{,}79\,\frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}79\,\frac{rad}{s}}{6{,}28} \qquad \Rightarrow \qquad f = 0{,}444\,s^{-1}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 18</u>



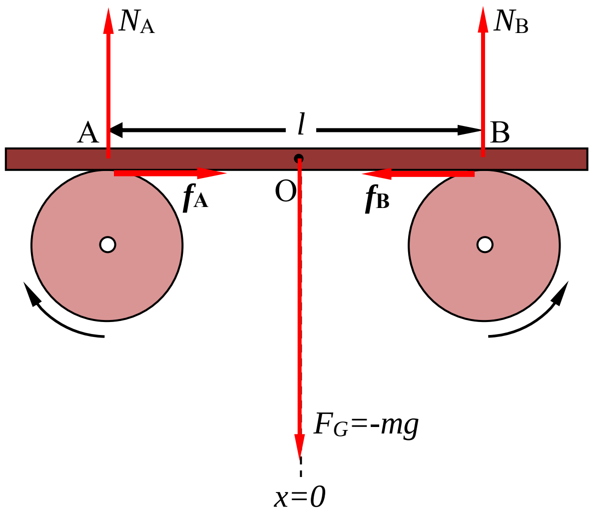
Δυο ακριβώς ίδιοι τροχοί δύνανται να περιστρέφονται με πολύ μεγάλη γωνιακή ταχύτητα γύρω από οριζόντιους άξονες οι οποίοι βρίσκονται πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση l = 1,00 m. Πάνω στους τροχούς τοποθετείται μια ράβδος της οποίας η μάζα είναι m = 1,00 kg, όπως δείχνει το Σχήμα. Όταν οι δυο τροχοί περιστρέφονται με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες:

(α) Να αποδείξετε ότι η ράβδος που είναι πάνω στους τροχούς θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

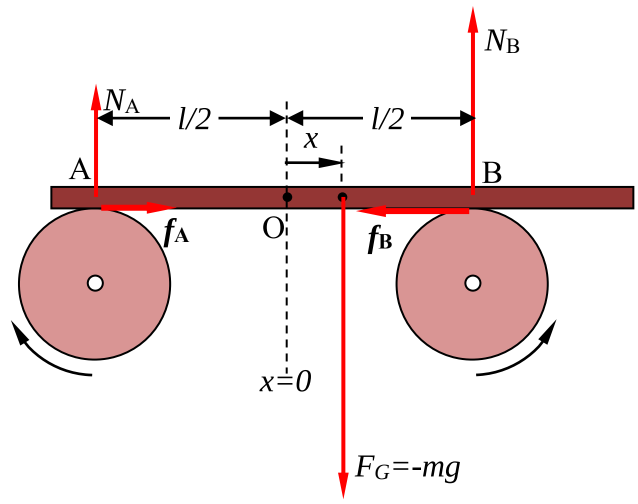
(β) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

Δίνονται: Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και περιφέρειας τροχών μ = 0,35 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ



Θέση Ισορροπίας
Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι στο μέσο O του διαστήματος AB.



Το κέντρο μάζας της ράβδου
έχει μετατοπιστεί κατά διάστημα x από τη θέση ισορροπίας O.

Πάνω στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος $F_B = mg$ της ράβδου η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας αυτής.

Οι κάθετες δυνάμεις επαφής N_A και N_B που ασκούν οι τροχοί πάνω στη ράβδο στα σημεία A και B.

Στα σημεία A και B ασκούνται και η οι τριβές:

$f_A = \mu N_A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f_B = \mu N_B$ (18.1)

(α) Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι μετατοπισμένο σε απόσταση *x* προς τα δεξιά (δεξιό Σχήμα Άσκησης):

Στην περίπτωση αυτή, η κάθετη δύναμη N_B θα είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη N_A, οπότε και η τριβή f_B θα είναι μεγαλύτερη από την τριβή f_A. Από τις Εξισώσεις 18.1 προκύπτει ότι η συνισταμένη οριζόντια δύναμη F_x θα είναι ίση με:

$F_x = f_A - f_B = \mu N_A - \mu N_B \quad \Rightarrow \quad F_x = \mu(N_A - N_B)$ (18.2)

Από το δεξιό σχήμα της άσκησης προκύπτουν οι ροπές των δυνάμεων N_B και της βαρυτικής δύναμης F_G ως προς σημείο A:

Η ροπή δύναμης N_B είναι θετική (τείνει να στρέψει τη ράβδο αριστερόστροφα) και έχει μέτρο:

$\tau_B = N_B l$ (18.3)

Η βαρυτική ροπή είναι αρνητική (τείνει να στρέψει τη ράβδο δεξιόστροφα) και έχει μέτρο:

$$\tau_{\mathrm{G}} = F_G\left(\frac{l}{2} + x\right) \qquad (18.4)$$

Από τη διάταξη της ράβδου και των τροχών προκύπτει ότι η ράβδος δεν έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη όλων των ροπών που ασκούνται πάνω στη ράβδο πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Οπότε, από τις Εξισώσεις 18.3 και 18.4 θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_B - \tau_G = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\mathrm{B}} l - mg\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N_{\mathrm{B}} l - mg\frac{l}{2} - mgx = 0 \qquad \Rightarrow \quad N_B = \frac{mg}{2} + \frac{mg}{l}\mathrm{x} \qquad (18.5)$$

Επίσης, η ράβδος δεν έχει τη δυνατότητα να κινηθεί κατακόρυφα. Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη όλων των κατακόρυφων δυνάμεων F_{y} πρέπει να είναι ίση με το μηδέν:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\mathrm{B}} + N_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{G}} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\mathrm{B}} + N_{\mathrm{A}} = mg \qquad (18.6)$$

Αφαιρώντας από την Εξίσωση (18.6) την Εξίσωση (18.5) παίρνουμε:

$$N_{\mathrm{B}} + N_A - N_B = mg - \frac{mg}{2} - \frac{mg}{l}x \qquad \Rightarrow \qquad N_A = \frac{mg}{2} - \frac{mg}{l}x \qquad (18.7)$$

Από τις Εξισώσεις 18.2, 18.5 και 18.7 παίρνουμε:

$$F_x = \mu(N_A - N_B) = \mu\left(-\frac{2mg}{l}x\right) \qquad \Rightarrow \quad F_x = -\mu\frac{2mg}{l}x \qquad \Rightarrow$$

$$F_x = -Dx \qquad (18.8)$$

Η Εξίσωση 18.8 δηλώνει ότι η ράβδος που βρίσκεται πάνω στους περιστρεφόμενους τροχούς θα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με σταθερά επαναφοράς η οποία είναι ίση με:

$$D = \frac{2\mu mg}{l} \qquad (18.9)$$

(β) **Υπολογισμός της συχνότητας ταλάντωσης της ράβδου:**

Εξ ορισμού, η γωνιακή συχνότητα ω της αρμονικής ταλάντωσης της ράβδου είναι ίση με:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} = \frac{\frac{2\mu mg}{l}}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}} \qquad (1810)$$

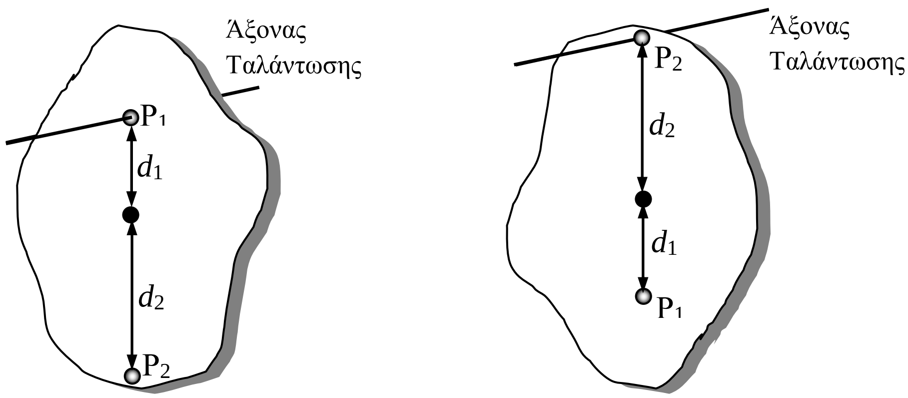
Συχνότητα ταλάντωσης της ράβδου:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu g}{l}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\mu g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \times 0{,}35 \times 9{,}80\ m/s^2}{1{,}00\ m}} \qquad \Rightarrow \qquad f = 0{,}420\ s^{-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19:

Δυο σημεία P_1 και P_2 πάνω σε ένα επίπεδο αντικείμενο απέχουν αποστάσεις d_1 και d_2, αντίστοιχα από το κέντρο μάζας του αντικειμένου. Το αντικείμενο ταλαντώνεται με την ίδια περίοδο T όταν αυτό ταλαντώνεται ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο P_1 και όταν ταλαντώνεται ως προς το άξονα που διέρχεται από το σημείο P_2. Και στις δυο περιπτώσεις ταλάντωσης, οι άξονες είναι κάθετοι στην επιφάνεια του αντικειμένου. Να αποδείξετε ότι: $d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}$, όπου $d_1 \neq d_2$.

ΛΥΣΗ



Στο παραπάνω Σχήμα απεικονίζεται ένα επίπεδο αντικείμενο το οποίο διαθέτει δυο διαθέσιμους άξονες ταλάντωσης οι οποίοι απέχουν από το κέντρο μάζας (cm) αποστάσεις d_1 και d_2, αντίστοιχα και οι οποίοι είναι κάθετοι στην επίπεδη επιφάνεια του αντικειμένου. Επειδή το αντικείμενο ταλαντώνεται με την ίδια περίοδο T και για τους δυο άξονες ταλάντωσης, η περίοδος αυτή θα είναι ίση με:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgd_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgd_2}} \qquad (19.1)$$

όπου I_1και I_2 είναι οι ροπές αδράνειας του σώματος ως προς τους δυο διαθέσιμους άξονες περιστροφής. Αν I_{cm} είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που είναι παράλληλος με τους δυο άλλους άξονες. Σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Θεωρημα Steiner), οι ροπές αδράνειας I_1 και I_2 θα δίνονται από τις Σχέσεις:

$$I_1 = I_{cm} + md_1^2 \qquad \text{και} \qquad I_2 = I_{cm} + md_2^2 \qquad (19.2)$$

Από τις Σχέσεις (19.1) και (19.2) προκύπτουν οι εξής Σχέσεις:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I_{cm} + md_1^2}{mgd_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{gT^2}{4\pi^2}d_1 = \frac{I_{cm} + md_1^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{gT^2}{4\pi^2}d_1 = \frac{I_{cm}}{m} + d_1^2$$

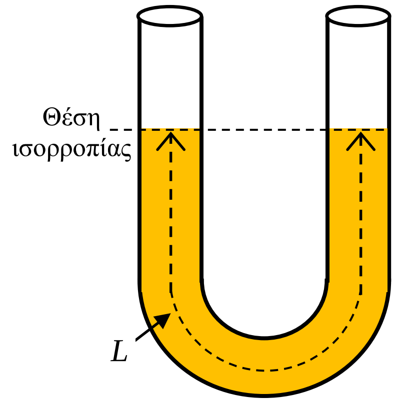
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I_{cm} + md_2^2}{mgd_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{gT^2}{4\pi^2}d_2 = \frac{I_{cm} + md_2^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{gT^2}{4\pi^2}d_2 = \frac{I_{cm}}{m} + d_2^2$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{gT^2}{4\pi^2}(d_1 - d_2) = d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) \quad \Rightarrow \quad d_1 + d_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

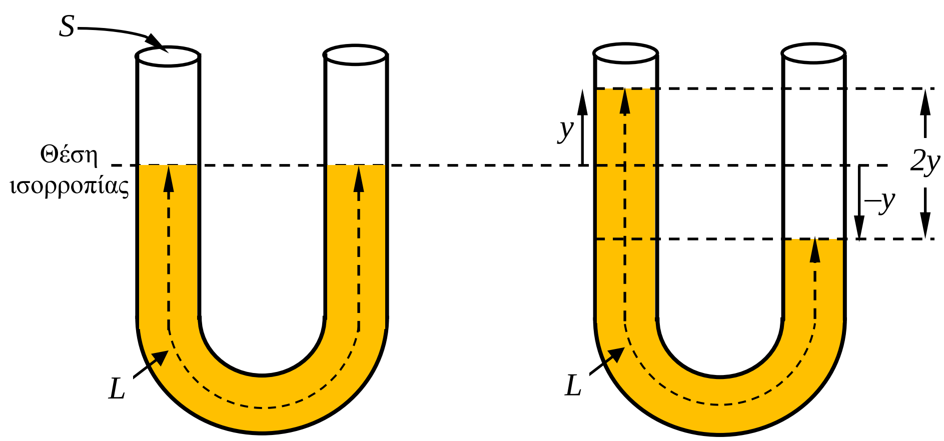
ΑΣΚΗΣΗ 20:

Μέσα σε σωλήνα που έχει τη μορφή U υπάρχει ένα ασυμπίεστο υγρό πυκνότητας ρ_υ, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Το συνολικό μήκος του υγρού μέσα στο σωλήνα είναι ίσο με L=40,0 cm. Αν η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στα δυο σκέλη του σωλήνα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας τότε να αποδείξετε ότι το υγρό αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g=9{,}80\ m/s^2$.



ΛΥΣΗ

Εκτρέπουμε το υγρό του σωλήνα U από τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, το υγρό μέσα στο σωλήνα θα βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στην κατάσταση όπου το υγρό μέσα στο σωλήνα U βρίσκεται εκτός θέσης ισορροπίας, θεωρούμε ως οριζόντιο επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κάτω στάθμη του υγρού (στο Σχήμα η κάτω στάθμη του υγρού βρίσκεται στο δεξιό σκέλος του σωλήνα). Επειδή το υγρό είναι ασυμπίεστο, όταν το υγρό ανέρχεται στο ένα σκέλος κατά διάστημα y στο άλλο σκέλος του σωλήνα το υγρό κατέρχεται κατά ίσο διάστημα y. Το συνολικό κατακόρυφο διάστημα μεταξύ κάτω στάθμης και άνω στάθμης του υγρού θα είναι ίση με 2y, οπότε ο όγκος του υπερκείμενου υγρού στο ένα σκέλος του σωλήνα U θα είναι ίσο με:

$$V_{\text{υπερκείμενου υγρού}} = S2y = 2Sy \qquad (20.1)$$

Το βάρος του w του υπερκείμενου υγρού στο ένα σκέλος του σωλήνα U θα ασκεί στο υπόλοιπο υγρό δύναμη F=w η οποία θα εξαναγκάζει όλο το υγρό του σωλήνα να κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας του. Η δύναμη F είναι αρνητική σε σχέση με τη θετική μετατόπιση +y του υγρού και είναι ίση με:

$$F = (\beta\text{άρος υπερκείμενου υγρού}) = -\rho_\upsilon g V_{\text{υπερκείμενου υγρού}} = -2\rho_\upsilon g S y \qquad \Longrightarrow$$

$$F = -\rho_{\upsilon} g S 2y \qquad \Longrightarrow \qquad F = -Dy \qquad\qquad (20.2)$$

όπου:

$$D = 2\rho_{\upsilon} g S \qquad (20.3)$$

Από τη Σχέση (14.2) προκύπτει ότι η δύναμη F είναι ανάλογη με την κατακόρυφη μετατόπιση y της ελεύθερης στάθμης του υγρού και επιπλέον η δύναμη αυτή είναι μια δύναμη επαναφοράς επειδή τείνει να επαναφέρει την ολική μάζα m_0 του υγρού στη θέση ισορροπίας. Κατόπιν τούτου, η ολική μάζα m_0 του υγρού θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\rho_{\upsilon} g S}{\rho_{\upsilon} S L}} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{2(9{,}80\ m/s^2)}{0{,}400\ m}} \qquad \omega = 7{,}00\ rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}00\ rad/s}{6{,}28} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 1{,}11\ s^{-1}$$