ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΠΥΚΝΩΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Χωρητικότητα σφαιρικού αγωγού. Να βρείτε τη χωρητικότητα ενός σφαιρικού αγωγού ακτίνας R.

ΛΥΣΗ

Ο όγκος που καλύπτεται από τον αγωγό είναι μια ισοδυναμική περιοχή. Αν q, V είναι το φορτίο και το δυναμικό του αγωγού, τότε η χωρητικότητα του αγωγού ορίζεται με την εξίσωση:

$$C = \frac{q}{V} \qquad (3.1)$$

Από τη θεωρία προκύπτει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό συναρτήσει της απόσταση r, όπου r ≥ R, από το κέντρο του ενός φορτισμένου αγωγού δίνεται από την εξίσωση:

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Το δυναμικό V του φορτισμένου σφαιρικού αγωγού είναι ίσο με το δυναμικό που έχει η σφαιρική επιφάνεια, δηλαδή V = V(R):

$$V = V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (3.2)$$

Από τις Εξισώσεις 3.1 και 3.2 προκύπτει ότι η χωρητικότητα του σφαιρικού αγωγού που έχει ακτίνα R θα δίνεται από την εξίσωση:

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (3.3)$$

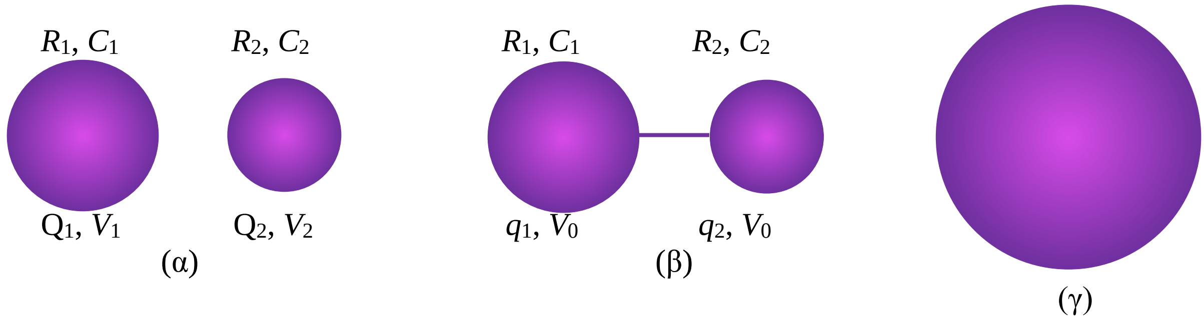
ΑΣΚΗΣΗ 2

Δυο σφαιρικοί αγωγοί με ακτίνες R_1 = 2,00 cm και R_2 = 1,50 cm συνδέονται μεταξύ τους με ένα με μεταλλικό λεπτό σύρμα. Να βρείτε τη χωρητικότητα *C* το προκύπτοντος συστήματος των δυο σφαιρών και να υπολογίσετε την ακτίνα R του αντίστοιχου σφαιρικού αγωγού

ΛΥΣΗ

Τα Σχήματα 2(α) και 2(β) που ακολουθούν δίνουν παραστατικά τους δυο ανεξάρτητους σφαιρικούς αγωγούς καθώς και τους δυο αγωγούς που είναι συνδεδεμένοι με το λεπτό σύρμα.

$R_0 = R_1 + R_2$



ΣΧΗΜΑ 2

Έστω ότι οι δυο σφαιρικοί αγωγοί είναι φορτισμένοι με φορτία Q_1 και Q_2 και έχουν αντίστοιχα δυναμικά V_1 και V_2. Το ολικό φορτίο και στους δυο αγωγούς είναι ίσο με:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \qquad (2.1)$$

Όταν οι δυο σφαιρικοί αγωγοί συνδεθούν με το λεπτό μεταλλικό σύρμα τότε οι αγωγοί αυτοί θα αποκτήσουν κοινό δυναμικό V_0. Το ηλεκτρικό φορτίο ανακατανέμεται στους δυο σφαιρικούς αγωγούς έτσι ώστε οι αγωγοί να αποκτήσουν φορτία q_1 και q_2. Επειδή το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται, μπορούμε να γράψουμε:

$$Q_0 = q_1 + q_2 \qquad (2.2)$$

Οι χωρητικότητες των δυο σφαιρικών αγωγών είναι αντίστοιχα:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{q_1}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \qquad \text{και} \qquad C_2 = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{q_2}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \qquad (2.3)$$

Διαιρώντας και τα δυο σκέλη της Εξίσωσης 2.2 δια του V_0 και λαμβάνοντας υπόψη την Εξίσωση 2.3, παίρνουμε:

$$\frac{Q_0}{V_0} = \frac{q_1}{V_0} + \frac{q_2}{V_0} \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = C_1 + C_2 \qquad (2.4)$$

όπου $C_0 = \dfrac{Q_0}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R_0 \qquad (2.5)$

και R_0 είναι η χωρητικότητα και η ακτίνα του ισοδύναμου σφαιρικού αγωγού. Το Σχήμα 2(γ) απεικονίζει τον ισοδύναμο σφαιρικό αγωγό. Οι Εξισώσεις 2.3, 2.4 και 2.5 δίνουν:

$$C_0 = C_1 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad 4\pi\varepsilon_0 R_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 + 4\pi\varepsilon_0 R_2 \qquad \Rightarrow$$

$$R_0 = R_1 + R_2 \qquad (2.6)$$

$$R_0 = R_1 + R_2 = 2{,}00\ cm + 1{,}50\ cm \qquad \Rightarrow \qquad R_0 = 3{,}50\ cm$$

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0 = 4\pi(8{,}85\times10^{-12}\mathrm{C^2/Nm^2})\times(0{,}0350\ m) \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 3{,}89\times10^{-12}\mathrm{F}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρείτε τη χωρητικότητα πυκνωτή παράλληλων πλακών εμβαδού A που απέχουν μεταξύ τους απόσταση h.

ΛΥΣΗ

Αν σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε πλάκα του πυκνωτή, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών θα είναι ίσο με:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (4.1)$$

όπου $\sigma = \dfrac{q}{A}$ (4.2)

Σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, όπως αυτό που υπάρχει μεταξύ των παράλληλων πλακών ενός επίπεδου πυκνωτή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από την εξίσωσης:

$$E = \frac{\Delta V}{h} \qquad (4.3)$$

όπου ΔV είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των παράλληλων επίπεδων πλακών του πυκνωτή. Από τις Εξισώσεις 4.1, 4.2 και 4.3 προκύπτει ότι:

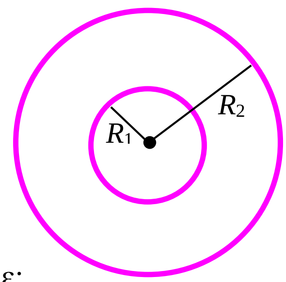
$$E = \frac{\Delta V}{h} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{q}{A}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{h} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{A}{h} \quad \Rightarrow$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{h} \qquad \text{(χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή)} \qquad (4.4)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή. Να βρείτε τη χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή ο οποίος αποτελείται από δυο ομόκεντρους μεταλλικούς σφαιρικούς φλοιούς με ακτίνες R_1 = 5,00 cm και R_2 = 10,0 cm.

ΛΥΣΗ



Το διπλανό σχήμα απεικονίζει το σφαιρικό πυκνωτή. Φορτίζουμε με φορτίο +Q τον εσωτερικό μεταλλικό σφαιρικό φλοιό. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή μεταξύ των δυο σφαιρικών φλοιών δίνεται από την εξίσωση:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}, \quad R_1 < r < R_2 \qquad (4.1)$$

Η διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των δυο σφαιρικών φλοιών είναι ίση με:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \Rightarrow$$

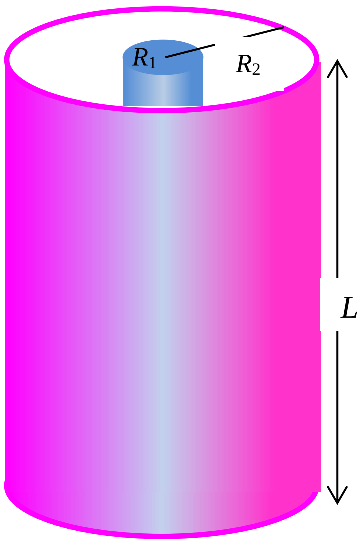
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2)\frac{(0{,}0500m)(0{,}100m)}{0{,}100m - 0{,}0500m} \quad \Rightarrow$$

$$C = 3{,}67 \times 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

Χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή. Να βρείτε τη χωρητικότητα ενός κυλινδρικού πυκνωτή ο οποίος αποτελείται από μια μεταλλική ράβδο μήκους L και ακτίνας R_1 η οποία περιβάλλεται από ένα ομοαξονικό μεταλλικό σωλήνα που έχει μήκος L και ακτίνα R_2, όπου $R_1 < R_2$. Ως εφαρμογή, να υπολογίσετε τη χωρητικότητα ενός καλωδίου κεραίας τηλεόρασης το οποίο αποτελείται από ένα σύρμα διαμέτρου $2R_1$ = 1,00 mm το οποίο περιβάλλεται από ένα μεταλλικό μανδύα που έχει διάμετρο $2R_2$ = 1,00 cm και έχει συνολικό μήκος L = 10,0 m.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Το διπλανό σχήμα απεικονίζει τον κυλινδρικό πυκνωτή. Φορτίζουμε με φορτίο +Q την εσωτερική μεταλλική ράβδο. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή μεταξύ των δυο κυλινδρικών επιφανειών δίνεται από την εξίσωση:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{r}, \quad R_1 < r < R_2 \qquad (4.1)$$

Η διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των δυο κυλινδρικών επιφανειών είναι ίση με:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}(\ln r)\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}(\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{4\pi(8{,}85\times 10^{-12} C^2/Nm^2)(10{,}0\ m)}{\ln\left(\frac{5{,}00\ mm}{0{,}500\ mm}\right)} \quad \Rightarrow \quad C = 2{,}41 \times 10^{-10}\ F = 241\ pF$$