ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΙΑ ΕΝΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟ
ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Σε μια κατασκευαστική εργασία χρησιμοποιείτε ένα μικρό γερανό ο οποίος έχει τις εξής προδιαγραφές:

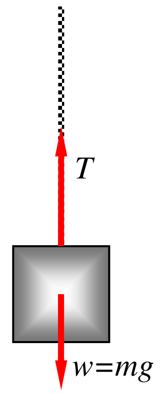
Όριο θραύσης συρματόσχοινου: T_{max}= 5250 N

Ο κινητήρας προσδίδει στο φορτίο μέγιστη επιτάχυνση α_{max}=5,0 m/s^2 όταν αυτός ξεκινά να ανεβάζει το φορτίο του.

Α. Να υπολογίσετε τη μάζα του μέγιστου φορτίου την οποία μπορεί να ανυψώσει κατακόρυφα ο συγκεκριμένος γερανός χωρίς να σπάσει το συρματόσχοινο.

Β. Να υπολογίσετε τη μάζα του μέγιστου φορτίου στην περίπτωση που το φορτίο είναι τοποθετημένο μέσα σε μεταλλικό κάδο ο οποίος ολισθαίνει σε μεταλλική ράμπα που σχηματίζει γωνία θ=75^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Δίδονται οι συντελεστές τριβής ολίσθησης μεταξύ μεταλλικών επιφανειών. Χωρίς λίπανση: μ_s=0,80 και μ_k=0,60. Με λίπανση: μ_s=0,10 και μ_k=0,05

ΛΥΣΗ



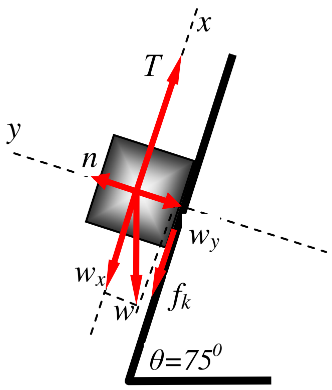
Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη m είναι το βάρος w και η δύναμη τάσης T από το συρματόσκοινο. Τα μέτρα των δυνάμεων αυτών είναι ίσα (T=w) μόνο στην περίπτωση που η μάζα m κινείται με σταθερή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή το συρματόσκοινο θα μπορούσε να σηκώσει μάζα με βάρος ίσο με το w_{max}=T_{max}=5250N το οποίο θα αντιστοιχούσε σε μάζα: m=w_{max}/g=(5250N)/(9,80m/s^2)=536 kg.

Α. Το πρόβλημα με την αντοχή του συρματόσκοινου παρουσιάζεται στο ξεκίνημα του κινητήρα όταν το σώμα αρχίζει να ανέρχεται με επιτάχυνση a_{max}=5,0 m/s^2. Για να αποκτήσει η μάζα την επιτάχυνση αυτή πρέπει η τάση T>w και μάλιστα πρέπει ο Β' νόμος του Νεύτωνα να ικανοποιεί τη σχέση:

$$T - w = m\,a_{\max} \quad \Rightarrow \quad T = mg + m\,a_{\max} \quad \Rightarrow \quad T = m(g + a_{\max}) \qquad (1)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η δύναμη T της τάσης του νήματος είναι ανάλογη με τη μάζα m του σώματος που ανεβάζει ο γερανός, ή αντίστροφα, αν είναι δεδομένη η μέγιστη δύναμη T_{max} μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη μάζα m_{max} που θα μπορούσε να ανυψώσει ο γερανός. Συγκεκριμένα:

$$T_{\max} = m_{\max}(g + a_{\max}) \quad \Rightarrow \quad m_{\max} = \frac{T_{\max}}{g + a_{\max}} = \frac{5250\,N}{9{,}80\,m/s^2 + 5{,}0\,m/s^2} = 350\,kg$$



B. Στην περίπτωση αυτή, πάνω στο σώμα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:
Το βάρος της μάζα m: $w=mg$ το οποίο αναλύεται στις εξής συνιστώσες: $w_x=mg\sin(\theta)$
και $w_y=mg\cos(\theta)$
Η δύναμη της τάσης του συρματόσκοινου: T
Η κάθετη δύναμη n η οποία πρέπει να είναι ίση με την συνιστώσα w_y : $n=mg\cos(\theta)$
Η δύναμη κινητικής τριβής ολίσθησης $f_k=\mu_k n \rightarrow$
$f_k=\mu_k mg\cos(\theta)$

Για να αποκτήσει η μάζα m επιτάχυνση $a_{\max}$ πρέπει από το Β' νόμο του Νεύτωνα, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στη μάζα να ικανοποιεί τη σχέση:

$$T - w_x - f_k = m a_{\max} \Rightarrow T - mg\sin(\theta) - \mu_k mg\cos(\theta) + m a_{\max} \Rightarrow$$

$$T = m(g\sin(\theta) - \mu_k g\cos(\theta) + a_{\max}) \quad (2)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η δύναμη T της τάσης του νήματος είναι ανάλογη με τη μάζα m του σώματος που ανεβάζει ο γερανός, ή αντίστροφα, αν είναι δεδομένη η μέγιστη δύναμη $T_{\max}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη μάζα $m_{\max}$ που θα μπορούσε να ανυψώσει ο γερανός. Συγκεκριμένα:

$$m_{\max} = \frac{T_{\max}}{g\sin(\theta) + \mu_k g\cos(\theta) + a_{\max}} \quad (3)$$

Ράμπα χωρίς λίπανση, μ_k=0,60:

$$m_{\max} = \frac{5250\,N}{(9{,}80m/s^2)\sin(75^0) + 0{,}60(9{,}80m/s^2)\cos(75^0) + 5{,}0m/s^2} = 330\,kg$$

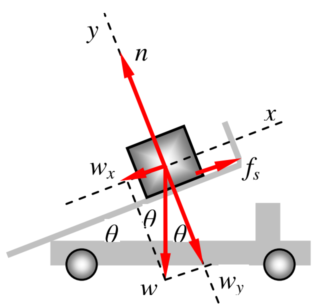
Ράμπα χωρίς λίπανση, μ_k=0,05:

$$m_{\max} = \frac{5250\,N}{(9{,}80m/s^2)\sin(75^0) + 0{,}05(9{,}80m/s^2)\cos(75^0) + 5{,}0m/s^2} = 360\,kg$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έχετε φορτώσει στην καρότσα ενός φορτηγού ένα μαρμάρινο όγκο που έχει μάζα m=2350 kg. Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία ανατροπής της καρότσας του φορτηγού ώστε ο μαρμάρινος όγκος να μην ολισθήσει. Ο συντελεστής στατικής τριβής ολίσθησης μεταξύ μαρμάρινου όγκου και καρότσας φορτηγού είναι μ_s=0,85

ΛΥΣΗ



Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη μαρμάρινη μάζα είναι:
Το βάρος του μαρμάρου: $\vec{w} = -mg\,\hat{j}$
Η κάθετος δύναμη: $\vec{n}$
Η στατική τριβή ολίσθησης: $\vec{f}_s$
Το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε έχει τον άξονα x παράλληλο με την επιφάνεια της καρότσας του φορτηγού.
Αναλύουμε το βάρος του σώματος στις δυο συνιστώσες του:
$w_x=w\sin(\theta)$ και $w_y=w\cos(\theta)$

Συνθήκες ισορροπίας: $\Sigma F_x = 0 \;\rightarrow\; f_s - w_x = 0 \;\rightarrow\; f_s = w_x \;\rightarrow\; f_s = mg\sin(\theta)$ (1)

$$\Sigma F_y = 0 \;\rightarrow\; n - w_y = 0 \;\rightarrow\; n = w_y \;\rightarrow\; n = mg\cos(\theta) \quad (2)$$

Από τη Σχέση (1) προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει η γωνία θ ανατροπής της καρότσας τόσο μεγαλώνει η τιμή του $\sin(\theta)$ με αντίστοιχη αύξηση της τιμής της στατικής τριβής ολίσθησης f_s η οποία δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη τιμή $f_{s,max}$ η οποία αντιστοιχεί σε γωνία ανατροπής $\theta=\theta_{max}$ και είναι ίση με:

$f_{s,max}=\mu_s\, n = \mu_s mg\cos(\theta_{max})$ (βλέπε σχέση (2)) (3)

Για γωνίες ανατροπής $\theta>\theta_{max}$ η συνιστώσα w_x του βάρους θα είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη στατική τριβή ολίσθησης $f_{s,max}$ και το μάρμαρο θα να ολισθαίνει προς το κάτω μέρος της καρότσας. Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

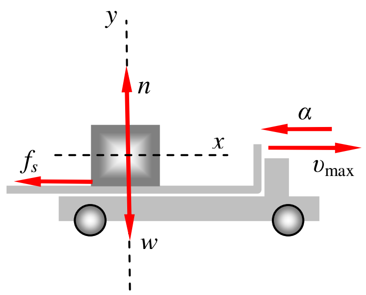
$\mu_s mg\cos(\theta_{max}) = \mu_s mg\sin(\theta_{max}) \;\rightarrow$

$$\frac{\sin(\theta_{max})}{\cos(\theta_{max})} = \mu_s \;\rightarrow\; \tan(\theta_{max}) = \mu_s \;\rightarrow\; \theta_{max} = \arctan(\mu_s) = \arctan(0{,}85) = 40^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ως συνεργάτης μηχανικός σε ένα έργο έχετε αναλάβει την ευθύνη για την ασφαλή μεταφορά μαρμάρινων όγκων με φορτηγά. Γνωρίζετε από την τεχνική μελέτη του έργου ότι κάθε μαρμάρινος όγκος έχει μάζα m=2350 kg. Γνωρίζετε επίσης ότι, από μελέτες που έχουν γίνει, τα περισσότερα τροχαία συμβάντα καταλήγουν σε ανθρώπινα θύματα και σε καταστροφή οχημάτων όταν ο οδηγός δεν αντιδράσει γρήγορα και το όχημα ακινητοποιηθεί σε χρονικό διάστημα $\Delta t_c>2{,}0$ s. Ως υπεύθυνος μηχανικός πρέπει να υποδείξετε στους οδηγούς των φορτηγών την μέγιστη ταχύτητα υ_{max} με την οποία πρέπει να κινούνται τα φορτηγά για την ασφαλή κίνησή τους. Να υπολογίσετε τη μέγιστη αυτή ταχύτητα. Ο συντελεστής στατικής τριβής ολίσθησης μεταξύ μαρμάρινου όγκου και καρότσας φορτηγού είναι μ_s=0,85

ΛΥΣΗ



Στο χρονικό διάστημα που το φορτηγό επιβραδύνεται, οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο μάρμαρο είναι:

Η στατική τριβή ολίσθησης f_s

το βάρος w του μαρμάρου και η κάθετη δύναμη n που ασκείται από τη καρότσα. Επειδή η καρότσα είναι οριζόντια, η κάθετη δύναμη n είναι ίση με το βάρος του μαρμάρου

$n = mg$ (1)

Όταν το φορτηγό φρενάρει, αυτό επιβραδύνεται με μια αρνητική επιτάχυνση α μέχρι να σταματήσει. Την ίδια αρνητική επιτάχυνση α έχει και το μάρμαρο που είναι φορτωμένο στην καρότσα του. Η δύναμη που προκαλεί αυτήν της αρνητική επιτάχυνση στον μαρμάρινο όγκο είναι η στατική τριβή ολίσθησης η οποία σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα είναι ίση με:

$f_s = m\,a$ (2)

Η αρνητική επιτάχυνση α εξαρτάται από τα ανακλαστικά του οδηγού, την ποιότητα των φρένων και τροχών οπότε το δεξιό σκέλος της Εξίσωσης (2) μπορεί να πάρει από πολύ μικρές τιμές μέχρι πολύ μεγάλες τιμές. Στην περίπτωση που μελετάμε, γνωρίζουμε μόνο το χρονικό διάστημα $\Delta t_c \leq 2{,}0$ s ακινητοποίησης του φορτηγού. Αν υ_{max} είναι η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα του φορτηγού, τότε η αρνητική επιτάχυνση α_{max} του φορτηγού θα δίνεται από τη σχέση:

$$a_{max} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t_c} = \frac{0 - \upsilon_{max}}{\Delta t_c} = -\frac{\upsilon_{max}}{\Delta t_c} \qquad (3)$$

Αντίθετα, το μέτρο της στατική τριβή ολίσθησης f_s είναι πάντα μικρότερο από το μέτρο της μέγιστης στατικής τριβής ολίσθησης, η οποία είναι αρνητική και ίση με:

$$f_{s,max} = -\mu_s n = -\mu_s mg \qquad (4)$$

Στις περιπτώσεις που $|m\,a| \leq |f_{s,max}|$, ο μαρμάρινος όγκος δεν ολισθαίνει πάνω στην καρότσα. Αντίθετα, όταν $|m\,a| \geq |f_{s,max}|$ η καρότσα έχει μεγαλύτερη επιβράδυνση από το μαρμάρινος όγκος. Αυτό έχει ως συνέπεια να ακινητοποιείται πρώτα η καρότσα και μετά ο μαρμάρινος όγκος. Αυτό σημαίνει ότι ο μαρμάρινος όγκος συνεχίζει να κινείται ακόμα και στην περίπτωση που η καρότσα είναι ακίνητη, ή με άλλα λόγια, ο μαρμάρινος όγκος ολισθαίνει πάνω στην καρότσα.

Στην περίπτωση που η αρνητική επιτάχυνση είναι α_{max}, στην περίπτωση δηλαδή που ο μαρμάρινος όγκος οριακά αρχίζει να ολισθαίνει, ο Β’ νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$f_{s,max} = m\,a_{max} \qquad (5)$$

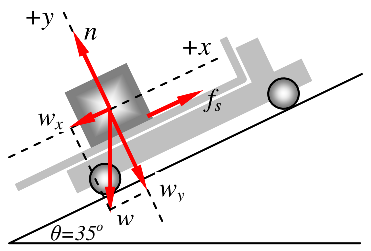
Από τις Εξισώσεις 3, 4 και 5 παίρνουμε τελικά:

$$-\mu_s mg = -m\frac{\upsilon_{max}}{\Delta t_c} \;\rightarrow\; \upsilon_{max} = \mu_s g\,\Delta t_c = 0{,}85(9{,}80 m/s^2)(2{,}0s) \;\rightarrow\; \upsilon_{max} = 17\,m/s = 60\,km/h$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Τα φορτηγά με τα φορτία που αναφέρονται στην άσκηση 3 πρέπει να ανέβουν ένα ανηφορικό δρόμο ο οποίος σχηματίζει γωνία $\theta = 35^0$ με το οριζόντιο επίπεδο. Στις περισσότερες περιπτώσεις, όταν τα φορτηγά αναβαίνουν ανηφόρες, οι στροφές την μηχανής πέφτουν και οι οδηγοί είναι αναγκασμένοι να ανεβάσουν τις στροφές για να μη σβήσει η μηχανή. Αυτό σημαίνει ότι ο οδηγός πατάει περισσότερο το γκαζ και το αυτοκίνητο επιταχύνεται μέχρι να φθάσει την επιθυμητή ταχύτητα. Ως υπεύθυνος μηχανικός πρέπει να υποδείξετε στους οδηγούς των φορτηγών να προσέξουν να μην υπερβούν μια μέγιστη επιτάχυνση a_{max} γιατί θα υπάρξει κίνδυνος να ολισθήσουν οι μαρμάρινοι όγκοι προς το πίσω μέρος της καρότσα. Να υπολογίσετε τη μέγιστη αυτή επιτάχυνση.

ΛΥΣΗ



Στο χρονικό διάστημα που το φορτηγό επιταχύνεται στην ανηφόρα, οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο μάρμαρο είναι:

Το βάρος $w = mg$ (1)

Η κάθετη δύναμη n που ασκεί η καρότσα του φορτηγού.

Η στατική τριβή ολίσθησης f_s.

Το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε έχει το θετικό άξονα x προς την κατεύθυνση που το φορτηγό κινείται Στο σύστημα αυτό, ο άξονας y σχηματίζει γωνία $\theta = 35^0$ με τη κατακόρυφη. Αναλύουμε τη δύναμη του βάρους στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων:

$w_x = +mg\ \sin\theta$ (2)

$w_y = +mg\ \cos\theta$ (3)

Στον άξονα y ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα δίνει : $n = +w_y = mg\ \cos\theta$ (3)

Στον άξονα x ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει : $f_s - w_x = ma$ ή $f_s - mg\ \sin\theta = ma$ (4)

όπου m και a είναι η μάζα και η επιτάχυνση του μαρμάρου η οποία, όσο το μάρμαρο δεν ολισθαίνει πάνω στη καρότσα, είναι ίση με την επιτάχυνση του φορτηγού.
Από την Εξίσωση (4) και με δεδομένο ότι η ποσότητα $mg\,\sin\theta$ είναι σταθερή, προκύπτει ότι όσο μεγαλώνει η επιτάχυνση α του φορτηγού τόσο θα μεγαλώνει και η στατική τριβή ολίσθησης f_s μέχρι αυτή γίνει ίση με τη μέγιστη στατική τριβή ολίσθησης $f_{s,\max}$ η οποία είναι ίση με:

$f_{s,\max} = \mu_s n = \mu_s mg\ \cos\theta$ (5)

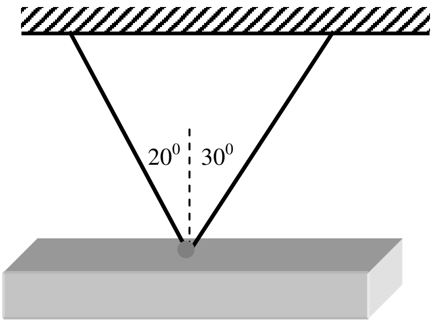
και η οποία αντιστοιχεί σε μέγιστη επιτάχυνση $a_{\max}$ Καταλήξαμε στην Εξίσωση (5) χρησιμοποιώντας και την Εξίσωση (3). Οπότε, από τις Εξισώσεις (4) και (5) έχουμε:

$f_{s,\max} - mg\ \sin\theta = ma_{\max} \quad \rightarrow \quad \mu_s \mathrm{mg}\ cos\theta - mg\ \sin\theta = ma_{max} \quad \rightarrow$

$a_{max} = (\mu_s \cos\theta - \sin\theta)g = [0{,}85 \cos(35^0) - \sin(35^0)](9{,}80 m/s_2) \quad \rightarrow \quad a_{max} = 1{,}2\ m/s^2$

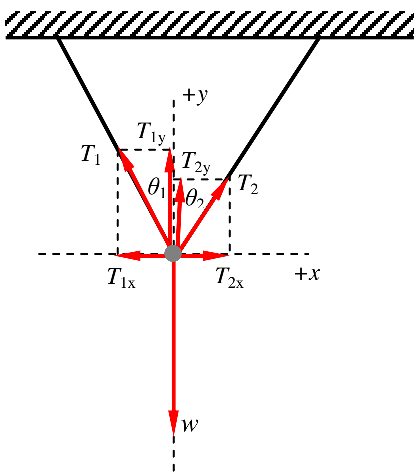
ΑΣΚΗΣΗ 5

Θέλετε να κρεμάσετε μια ατσάλινη δοκός που έχει μάζα m=1000 kg σε δυο σκοινιά με τον τρόπο που δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Το σχοινί ή τα σχοινιά που θα χρησιμοποιήσετε για το κρέμασμα της δοκού σε ποιες δυνάμεις πρέπει να αντέχουν για να μη σπάσουν;

ΛΥΣΗ



Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στα σκοινιά εξαιτίας του βάρους w της δοκού είναι οι T_1 και η T_2. Το πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό με τον οριζόντιο άξονα x και τον κατακόρυφο άξονα y.

Η δύναμη του βάρους της δοκού βρίσκεται πα΄νω στον άξονα y και έχει μέτρο

$w = m\ g$ ($g = 9{,}80\ m/s^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Τις δυνάμεις T_1 και T_2 αναλύουμε στις συνιστώσες T_{1x}, T_{1y} και T_{2x}, T_{2y}, όπου:

$T_{1x} = T_1 \sin\theta_1$

$T_{1y} = T_1 \cos\theta_1$

$T_{2x} = T_2 \sin\theta_2$

$T_{2y} = T_2 \cos\theta_2$

Από τις συνθήκες ισορροπίας:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{2x} - T_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{2x} = T_{1x} \quad \Rightarrow \quad T_2 \sin\theta_2 = T_1 \sin\theta_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{2y} + T_{1y} = w \quad \Rightarrow \quad T_2 \cos\theta_2 + T_1 \cos\theta_1 = mg \qquad (2)$$

Λύνουμε την Εξίσωση (1) ως προς T_2: $T_2 = T_1 \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ (3)

Αντικαθιστούμε την Εξίσωση (3) στην Εξίσωση (2):

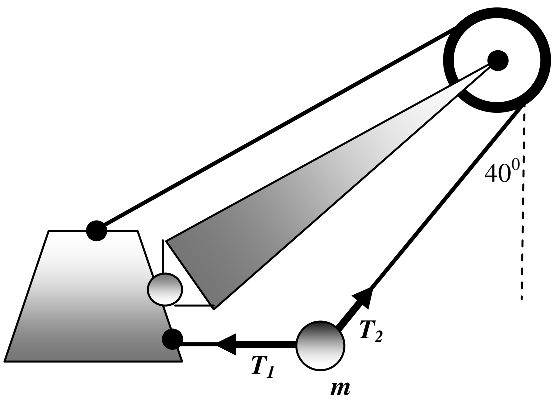
$$T_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_2 + T_1\cos\theta_1 = mg \quad \Rightarrow \quad T_1 \frac{\sin\theta_1}{\tan\theta_2} + T_1\cos\theta_1 = mg \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{mg}{\dfrac{\sin\theta_1}{\tan\theta_2} + \cos\theta_1} \quad \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{(1000kg)(9{,}80 m/s^2)}{\dfrac{\sin 20^0}{\tan 30^0} + \cos 20^0} = 6400\,N$$

$$T_2 = T_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = (6400\,N)\frac{\sin 20^0}{\sin 30^0} = 4400\,N$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια σφαίρα κατεδαφίσεων συγκρατείται στη θέση της από δυο ελαφρά ατσάλινα συρματόσχοινα, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:



Εάν η μάζα m=45 kg, τότε να υπολογίσετε τις δυνάμεις T_1 και T_2 που ασκούνται πάνω στα δυο συρματόσχοινα εξαιτίας του βάρους της μάζας m. Δίνονται: το συρματόσκοινο πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη T_1 είναι οριζόντιο, το συρματόσκοινο με τη δύναμη T_2 σχηματίζει γωνία $\theta=40^0$ με την κατακόρυφο. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g=9,80 m/s^2

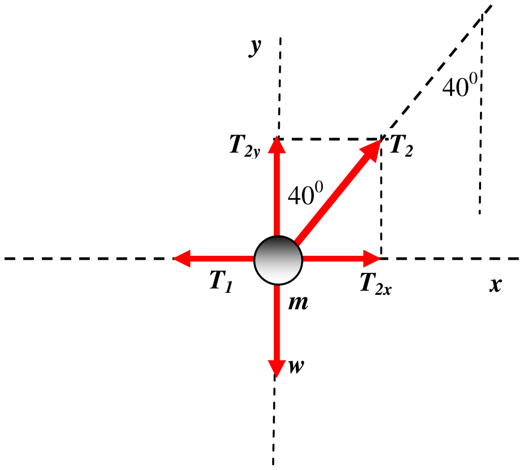
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος το οποία αφορά τη μάζα m. Το διάγραμμα αυτό περιλαμβάνει τη μάζα *m* μαζί με τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε αυτή. Οι δυνάμεις αυτέ είναι:

Το βάρος της μάζα: $w = mg$

Η δύναμη T_1 της τάσης πάνω στο οριζόντιο σκοινί.

Η δύναμη T_2 της τάση πάνω στο άλλο σκοινί.



Το πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό που έχει τον x-άξονα οριζόντιο και τον y-άξονα κατακόρυφό. Αναλύω τη δύναμη T_2 στις συνιστώσες:

$T_{2x}=T_2 \sin 40^0$

$T_{2y}=T_2 \cos 40^0$

Νόμος Νεύτωνα στον x-άξονα:

$\Sigma F_x=0 \;\rightarrow\; T_{2x} - T_1 = 0 \;\rightarrow\; T_2 \sin 40^0 = T_1 \quad (1)$

Νόμος Νεύτωνα στον y-άξονα:

$\Sigma F_y=0 \;\rightarrow\; T_{2y} - w = 0 \;\rightarrow\; T_2 \cos 40^0 = mg \quad (2)$

Διαιρώντας κατά μέλη της Εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

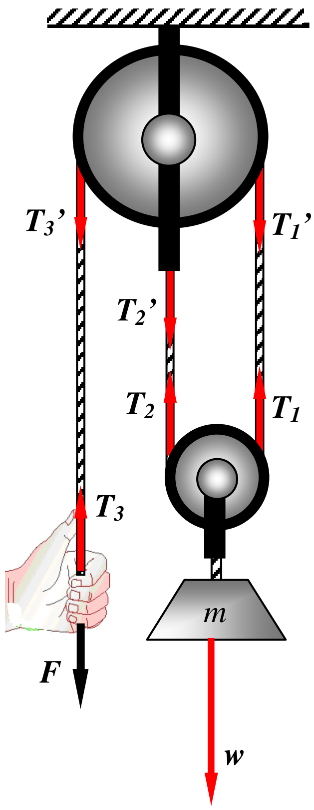
$$\frac{T_2 \sin 40^0}{T_2 \cos 40^0} = \frac{T_1}{mg} \;\Rightarrow\; T_1 = mg \tan 40^0 = (45kg)(9{,}80m/s^2)(0{,}84) \;\Rightarrow\; T_1 = 370\,N$$

Οπότε, από την Εξίσωση (1) προκύπτει:

$$T_2 = \frac{T_1}{\sin 40^0} = \frac{370\,N}{0{,}64} \;\Rightarrow\; T_2 = 580\,N$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Μια μάζα M=150 kg ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα όπως δείχνει το σύστημα τροχαλιών του παρακάτω σχήματος:



Αν οι τροχαλίες είναι αβαρείς, τότε να υπολογίσετε τη δύναμη F που κρατά σε ισορροπία τη μάζα m. Τι συμπέρασμα εξάγετε από την τιμή του μέτρου της δύναμης αυτής;

ΛΥΣΗ

Από τη συνθήκη ότι η μάζα m ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα προκύπτει ότι: $w=T_1+T_2$ (1)

Το γεγονός ότι μια αβαρής τροχαλία αλλάζει μόνο την κατεύθυνση της δύναμης μας δηλώνει ότι στη μικρή και στη μεγάλη τροχαλία θα ισχύουν οι σχέσεις:

$T_1=T_2=T$ και $T_1'=T_3'$ (2)

οπότε η Σχέση (1) γίνεται

$w=2T$ (3)

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα (δράση ίση και αντίθετη με την αντίδραση) προκύπτει ότι:

$T_1=T_1'=T$ $T_2=T_2'=T$ $T_3'=T_3$ και $T_3=F$ (4)

Από τις Σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι: $T_1=T_1'=T_2=T_2'=T_3'=T_3=T=F$ (5)

Από τις Σχέσεις (3) και (5) προκύπτει: $w=2F \rightarrow \boldsymbol{F=w/2}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

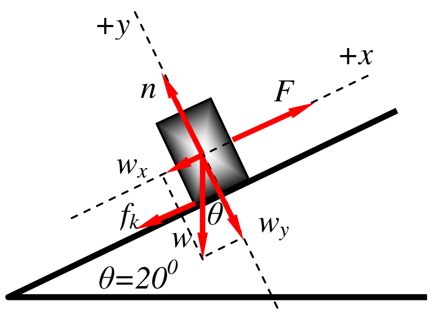
1. Θέλετε να τοποθετήσετε ένα κιβώτιο με μάζα m=100 kg πάνω στην καρότσα ενός φορτηγού σπρώχνοντας αυτό κατά μήκος μιας ράμπας η οποία σχηματίζει γωνία θ=20^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Οι συντελεστές τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και ράμπας είναι μ_s=0,90 και μ_k=0,60. Η μέγιστη δύναμη που μπορείτε να ασκήσετε πάνω στο κιβώτιο είναι F=1000 N. Διαπιστώνετε ότι στο οριζόντιο επίπεδο πριν εισέλθετε στη ράμπα μπορείτε να μετακινήσετε το κιβώτιο. Παίρνετε λοιπό φόρα σπρώχνοντας το κιβώτιο στο οριζόντιο επίπεδο και εισέρχεστε με κίνηση στη ράμπα.

   Α. Θα τα καταφέρετε μόνο σας να ανεβάσετε το κιβώτιο στην καρότσα του φορτηγού ή θα χρειαστείτε βοήθεια;

   Β. Αν για κάποιο λόγο σταματήσετε το κιβώτιο να ολισθαίνει πάνω στη ράμπα, θα είστε τότε σε θέση να θέσετε το κιβώτιο σε κίνηση σπρώχνοντάς το;

ΛΥΣΗ

Α. Αυτό που είναι δεδομένο είναι ότι το κιβώτιο εισέρχεται στη ράμπα κινούμενο. Αυτό σημαίνει ότι πάνω στο κιβώτιο θα ασκείται κινητική τριβή ολίσθησης f_k με αντίστοιχο συντελεστή μ_k=0,60. Εκτός από την κινητική τριβή ολίσθησης f_k ασκείται και το βάρος του κιβωτίου καθώς και η κάθετη δύναμη n (βλέπε Σχήμα)



Το πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό που έχει το θετικό ημιάξονα $+x$ παράλληλο με την κατεύθυνση της κίνησης κιβωτίου πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο κιβώτιο είναι:

Το βάρος: $w=mg$ (1)

Η κάθετη δύναμη : n

Η κινητική τριβή ολίσθησης: $f_k=\mu_k n$ (2)

Η δύναμη με την οποία σπρώχνουμε το κιβώτιο: F.

Επειδή δεν δίνεται το μήκος της ράμπας, για να μεταφερθεί το κιβώτιο πάνω στην καρότσα του φορτηγού πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει

$\Sigma F_x \geq 0$ (3)

$\Sigma F_x=F-w_x-f_k=F-mg\sin\theta-\mu_k n$ (4)

Επίσης, στον άξονα y πρέπει να ισχύει:

$\Sigma F_y=0$ ή ισοδύναμα: $n-w_y=0 \rightarrow n=mg\cos\theta$ (5)

Από τις Εξισώσεις (4) και (5) προκύπτει: $\Sigma F_x=F-mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta \rightarrow$

$\Sigma F_x=1000N-(100kg)(9{,}80m/s^2)\sin 20^0-(0{,}60)(100kg)(9{,}80m/s^2)\cos 20^0=112\ N \rightarrow$

$\Sigma F_x=112\ N\geq 0$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (3), θα μπορέσετε να ωθήσετε το κιβώτιο στην καρότσα του φορτηγού.

B. Αν για κάποιο λόγο σταματήσετε να ωθείτε το κιβώτιο πάνω στη ράμπα, τότε για να αρχίσετε να ωθείτε και πάλι το κιβώτιο πρέπει:

$\Sigma F_x>0$ (6)

$\Sigma F_x=F-w_x-f_s=F-mg\sin\theta-\mu_s n$ (7)

Η Εξίσωση (7) διαφέρει από την Εξίσωση (4) μόνο στη δύναμη τριβής. Στην Εξίσωση (4) το κιβώτιο είναι σε κίνησης, οπότε πάνω στο κιβώτιο δρα η κινητική τριβή ολίσθησης f_k. Στην Εξίσωση (7) το κιβώτιο είναι ακίνητο, οπότε στην προσπάθειά μας να το μετακινήσουμε πάνω σε αυτό ασκείται η στατική τριβή ολίσθησης f_s. Εξίσωση (7) σε συνδυασμό την Εξίσωση (5) δίνει:

$\Sigma F_x=F-mg\sin\theta-\mu_s mg\cos\theta \rightarrow$

$\Sigma F_x=1000N-(100kg)(9{,}80m/s^2)\sin 20^0-(0{,}90)(100kg)(9{,}80m/s^2)\cos 20^0=-164\ N \rightarrow$

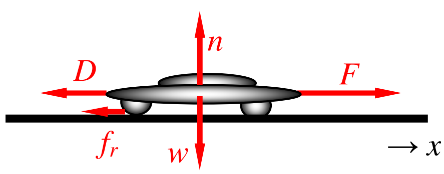
$\Sigma F_x=-164\ N<0$

Στην περίπτωση που το κιβώτιο σταματήσει να ολισθαίνει πάνω στη ράμπα, τότε δεν θα έχετε τη δυνατότητα μόνος σας να θέσετε σε κίνηση το κιβώτιο.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Η μέγιστη δύναμη με την οποία ένας κινητήρας ωθεί σε κίνηση ένα sport αυτοκίνητο σε οριζόντιο δρόμο είναι F=3500 N. Διατηρώντας τη δύναμη αυτή σταθερή, να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} την οποία θα μπορούσε να αποκτήσει το αυτοκίνητο αυτό όταν είναι γνωστά: η μάζα του αυτοκινήτου m=1000 kg, ο συντελεστής τριβής κύλισης μ_r=0,02 των τροχών του αυτοκινήτου πάνω στο οδόστρωμα, ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης (αεροδυναμικός συντελεστής) του αυτοκινήτου C_D=0,25 και η ενεργός διατομή του αυτοκινήτου $A=(1{,}5\text{x}1{,}0)\ m^2=1{,}5\ m^2$. Δίνονται επίσης, η πυκνότητα του αέρα $\rho_\alpha=1{,}23\ kg/m^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=9{,}80\ m/s^2$.

ΛΥΣΗ



Εκτός από τη δύναμη F=3500 N η οποία επιταχύνει το αυτοκίνητο, πάνω σε αυτό ασκούνται και οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος του αυτοκινήτου: $w=mg=(1000kg)(9{,}80m/s^2)=9800\ N$ (1)

Η κάθετος δύναμη που ασκεί το οδόστρωμα στο αυτοκίνητο: $n=w=mg=9800\ N$ (2)

Η δύναμη της τριβής κύλισης η οποία είναι αντίθετη της ταχύτητας: $f_r=\mu_r n=\mu_r mg$ $\rightarrow$ $f_r=(0{,}02)(9800\ N)=196\ N$ (3)

Η οπισθέλκουσα δύναμη: $D=\frac{1}{2}AC_D\rho\upsilon^2=\frac{1}{2}(1{,}5m^2)(0{,}25)(1{,}23kg/m^3)\upsilon^2=0{,}23\upsilon^2\ (N)$ (4)

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα πάνω στο αυτοκίνητο δίνει:

$\Sigma F_x=F-f_r-D=3500N-196\ N-0{,}19\ \upsilon^2$ $\rightarrow$ $\Sigma F_x=3304N-0{,}23\ \upsilon^2$ (5)

Από την Εξίσωση (5) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου τόσο θα μειώνεται η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο αυτοκίνητο. Θα υπάρχει λοιπόν μια ταχύτητα υ_0 η οποία ονομάζεται οριακή ταχύτητα για την οποία η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο αυτοκίνητο θα είναι μηδέν (0). Οπότε από την Εξίσωση (5) προκύπτει ότι:

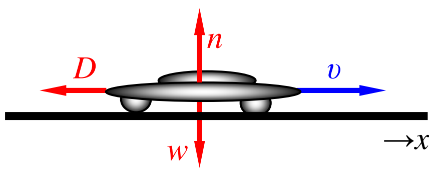
$3304\ N-0{,}23\ \upsilon_0^2=0$ $\rightarrow$ $\upsilon_0=\sqrt{\frac{3304N}{0{,}23}}$ $\rightarrow$ $\upsilon_0=120\ m/s=430\ km/h$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Και λίγα μαθηματικά!! Ένα αυτοκίνητο με μάζα m=1500 kg και με εγκάρσια διατομή A=2,20 m^2 εκτοξεύεται οριζόντια πάνω σε πάγο χωρίς τριβή. Τη χρονική στιγμή t=0 s, η αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι υ_0=25 m/s

Να δείξετε ότι η ταχύτητα υ(t) συναρτήσει του χρόνου t δίνεται από τη σχέση: $\upsilon(t)=\dfrac{\upsilon_0}{1+\dfrac{AC_D\rho\upsilon_0 t}{2m}}$ όπου C_D=0,31 είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης του αυτοκινήτου στον αέρα. Σε πόσο χρόνο το αυτοκίνητο θα έχει ταχύτητα υ=5,0 m/s;

ΛΥΣΗ



Πάνω στο αυτοκίνητο ασκείται μόνο η οπισθέλκουσα δύναμη: $D=\frac{1}{2}AC_D\rho\upsilon^2$ (1)

η οποία έχει αντίθετη διεύθυνση σε σχέση με την ταχύτητα υ και η οποία θα επιβραδύνει το αυτοκίνητο.

Η εφαρμογή του Β' Νόμου του Νεύτωνα πάνω στο αυτοκίνητο δίνει:

$\Sigma F_x=-m\,a_x$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}AC_D\rho\upsilon^2=-ma_x$ $\rightarrow$ $a_x=-\frac{AC_D\rho}{2m}\upsilon^2$ $\rightarrow$ $\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{AC_D\rho}{2m}\upsilon^2$ $\rightarrow$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{AC_C\rho}{2m}dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon^{-2}d\upsilon = -\frac{AC_C\rho}{2m}dt \qquad (2)$$

Παίρνουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της Εξίσωσης (2) στο χρονικό διάστημα (0, t) στο οποίο η ταχύτητα μεταβάλλεται από υ_0 σε υ, όπου $\upsilon < \upsilon_0$.

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon^{-2}d\upsilon = -\int_0^t \frac{AC_C\rho}{2m}dt = -\frac{AC_C\rho}{2m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\upsilon^{-2+1}}{-2+1}\right|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{AC_C\rho}{2m}\left. t\right|_0^t \quad \Rightarrow \quad -\left.\frac{1}{\upsilon}\right|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{AC_C\rho}{2m}\left. t\right|_0^t \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\upsilon_0} = -\frac{AC_C\rho}{2m}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\upsilon} = \frac{AC_C\rho}{2m}t + \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{1}{\upsilon_0}\left(\frac{AC_C\rho\upsilon_0}{2m}t + 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0}{\frac{AC_D\rho\upsilon_0}{2m}t + 1} \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην Εξίσωση (3) και έχουμε:

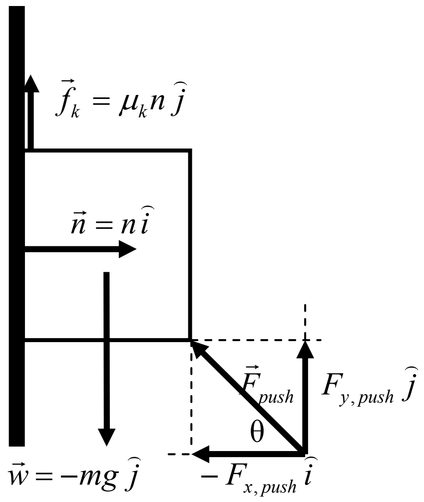
$$5{,}0m/s = \frac{25m/s}{\frac{(2{,}20m^2)(0{,}31)(1{,}23kg/m^3)(25m/s)}{2(1500kg)}t + 1} \quad \Rightarrow \quad 5{,}0m/s = \frac{25m/s}{(0{,}0070/s)t + 1} \quad \Rightarrow$$

$(0{,}035m/s^2)\ t + 5{,}0\ m/s = 25\ m/s \quad \Longrightarrow \quad (0{,}035\ m/s^2)\ t = 20\ m/s \quad \Longrightarrow \quad t = 570\ s$ ή $t = 9{,}5\ min$

Το αυτοκίνητο θα μειώσει την ταχύτητά του στα 5,0 *m/s* σε χρονικό διάστημα t=9,5 *min*.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ένα ξύλινο κουτί που έχει μάζα m=2,0 kg γλιστράει προς τα κάτω πάνω σε ένα κατακόρυφο ξύλινο τοίχο, ενώ το σπρώχνετε υπό γωνία θ=45^0 όπως δείχνει το παρακάτω Σχήμα. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκήσετε πάνω στο κουτί ώστε αυτό να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα;



ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα δεν αναφέρει αν το σώμα ολισθαίνει προς τα κάτω ή προς τα πάνω

Οι πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη μάζα είναι οι:
Η δύναμη του βάρους: $\vec{w} = -mg\hat{j}$
Η δύναμη που ασκούμε εμείς: $\vec{F}_{push} = -F_{x,push}\hat{i} + F_{y,push}\hat{j}$
$F_{x,push}=F_{push}\cos\theta$ και
$F_{y,push}=F_{push}\sin\theta$
Η κάθετη δύναμη που ασκείται από το κατακόρυφο ξύλο : $\vec{n} = n\hat{i}$
Θεωρούμε ότι η μάζα ολισθαίνει προς τα κάτω, οπότε πάνω στο σώμα ασκείται και η δύναμη κινητικής τριβής που έχει φορά προς τα πάνω: $\vec{f}_k = \mu_k n\hat{j}$
Αφού η μάζα ολισθαίνει προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε αυτή να είναι ίση με το μηδέν:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{push} + \vec{w} + \vec{n} + \vec{f}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$-F_{x,push}\hat{i} + F_{y,push}\hat{j} - mg\hat{j} + n\hat{i} + \mu_k n\hat{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow$$ (βγάζω κοινούς παράγοντες τα $\hat{i}$ και $\hat{j}$)

$$(-F_{x,push} + n)\hat{i} + (F_{y,push} - mg + \mu_k n)\hat{j} = \vec{0}$$

Προκύπτει το σύστημα:

$$-F_{x,push} + n = 0$$

$$F_{y,push} - mg + \mu_k n = 0$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος βρίσκετε την κάθετη δύναμη $n=F_{x,push}$ την οποία αντικαθιστάτε στην δεύτερη εξίσωση. Οπότε έχουμε:

$$F_{y,push} - mg + \mu_k F_{x,push} = 0$$

$F_{x,push}=F_{push}\cos\theta$ και
$F_{y,push}=F_{push}\sin\theta$

$$F_{push}\sin\theta + \mu_k F_{push}\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad F_{push} = \frac{mg}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}$$

Στην περίπτωση που το σώμα ολίσθαινε προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα, τότε θα ακολουθούσατε την ίδια διαδικασία με τη διαφορά ότι η κινητική τριβή ολίσθησης θα είχε φορά προς τα κάτω, δηλαδή: $\vec{f}_k = -\mu_k n \hat{j}$

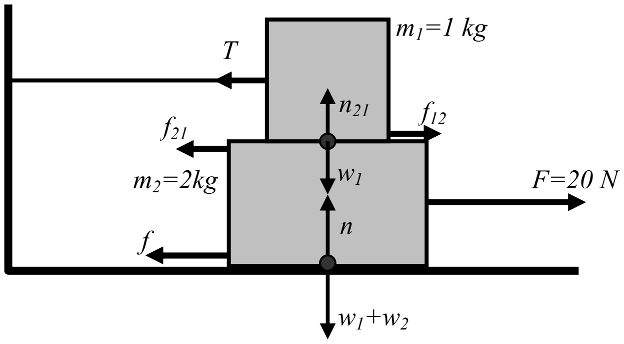
Ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_k=0,2 (βλέπε πίνακα 5.1 σελίδας 136)

ΑΣΚΗΣΗ 12

Το σώμα μάζας 1,0 kg στο παρακάτω Σχήμα είναι δεμένο στον τοίχο με ένα σκοινί και είναι τοποθετημένο στην πάνω επιφάνεια ενός σώματος που έχει μάζα 2,0 kg. Το από κάτω σώμα έλκεται προς τα δεξιά με μια δύναμη τάσης 20 N. Ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης και στην κάτω και στην πάνω επιφάνεια του σώματος των 2,0 kg είναι μ_k=0,4.

α. Ποια είναι η τάση στο σκοινί που κρατάει στον τοίχο το σώμα του 1,0 kg;

β. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος των 2,0 kg;



ΛΥΣΗ

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τα μέτρα των δυνάμεων. Τα πρόσημα των δυνάμεων αυτών προκύπτουν από το παραπάνω σχήμα.

Πάνω στη μάζα m_1 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος $w_1=m_1g$, η κάθετη δύναμη n_{21} που ασκεί η μάζα m_2 πάνω στη μάζα m_1. Ισχύει:

$n_{21}=w_1=m_1g$ (1)

Επειδή η μάζα m_2 ολισθαίνει και η μάζα m_1 είναι ακίνητη, στην επιφάνεια επαφής των δυο μαζών αναπτύσσεται δύναμη τριβής ολίσθησης f_{21} η οποία ασκείται πάνω στη μάζα m_2 και η οποία εξ ορισμού είναι ίση με:

$f_{21}=\mu n_{21}=\mu m_1 g$ (2)

όπου μ=0,40 είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης. Εξαιτίας όμως του Γ' Νόμου του Newton (δράση ίση με αντίδραση) και η μάζα m_2 ασκεί μια δύναμη f_{12} πάνω στην μάζα m_1 η οποία είναι ίση και αντίθετη με την f_{21}:

$f_{12}=f_{21}=\mu m_1 g$ (3)

Πάνω στη μάζα m_1 ασκείται επίσης και η τάση T του νήματος το οποίο κρατά τη μάζα αυτή ακίνητη.

Συνθήκη ισορροπίας της μάζας m_1: $T=f_{12}=\mu m_1 g=0{,}4\text{x}(1{,}0kg)\text{x}(9{,}80m/s^2)$ → $T=3{,}92\ N$

Πάνω στη μάζα m_2 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Η f_{21} την οποία ορίσαμε με την εξίσωση (2),

$f_{21}= \mu m_1 g$

Το βάρος της μάζας $w_2=m_2g$ και η δύναμη του βάρους $w_1=m_1g$ που ασκεί η μάζα m_1 πάνω στη μάζα m_2.

Η κάθετη δύναμη n που ασκεί η οριζόντια επιφάνεια πάνω στη μάζα m_2 είναι ίση με

$$n = w_1 + w_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)\,g$$

Επειδή η μάζα m_2 ολισθαίνει πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,40 πάνω στη μάζα m_2 θα ασκείται τριβή ολίσθησης:

$$f = \mu n \quad \Rightarrow \quad f = \mu (m_1 + m_2)\,g$$

Η δύναμη F=20 N που έλκει τη μάζα.

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m_2 είναι ίση με: $F - f - f_{21}$

Δεύτερος Νόμος του Newton για τη μάζα m_2:

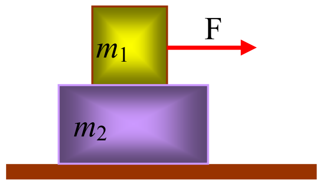
$$F - f - f_{21} = m_2\,a \qquad \Rightarrow \qquad F - \mu m_1 g - \mu (m_1 + m_2)\,g = m_2\,a \qquad \Rightarrow$$

$$a = \frac{F - \mu m_1 g - \mu (m_1 + m_2)}{m_2} = \frac{20N - 0{,}40 \times 1{,}0kg \times 9{,}80m/s^2 - 0{,}40 \times (1{,}0kg + 2{,}0kg) \times 9{,}80m/s^2}{2{,}0kg}\ a$$

$=2,16\ m/s^2$

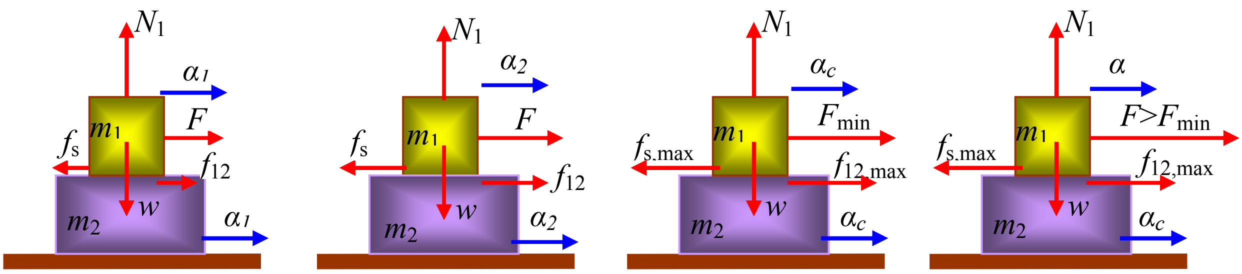
ΑΣΚΗΣΗ 13

Δυο σώματα με μάζες m_1=1,0 kg και m_2=2,0 kg είναι τοποθετημένα πάνω σε μια ατριβή οριζόντια επιφάνεια όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Ο συντελεστής στατικής τριβής ολίσθησης στην κοινή επιφάνεια των δυο σωμάτων είναι μ_s=0,80. Μια δύναμη οριζόντια δύναμη F ασκείται στο σώμα με μάζα m_1. Όταν η δύναμη F είναι σχετικά μικρή, τα δυο σώματα κινούνται ταυτόχρονα (το πάνω σώμα παρασύρει το κάτω εξ αιτίας της στατικής τριβής ολίσθησης που υπάρχει μεταξύ των σωμάτων).



Όταν η δύναμη F είναι σχετικά μεγάλη, τότε το σώμα m_1 αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στη μάζα m_2. Να υπολογίσετε το μέτρο F_{min} της ελάχιστης δύναμης που πρέπει να έχει η δύναμη F για να αρχίσει η μάζα m_1 να ολισθαίνει σε σχέση με τη μάζα m_2.

ΛΥΣΗ



Για να αντιληφθείτε τη συμπεριφορά της στατικής τριβής ολίσθησης παραθέτουμε το παραπάνω σχήμα. Παρατηρούμε ότι όταν η δύναμη F είναι σχετικά μικρή (βλέπε δυο πρώτες εικόνες), η στατική τριβής ολίσθησης f_s που ασκείται πάνω στη μάζα m_1 είναι τέτοια ώστε η συνισταμένη δύναμη $F - f_s$ να προσδίδει στη μάζα m_1 επιτάχυνση α η οποία σύμφωνα με το 2^o νόμο του Νεύτωνα προκύπτει από τη σχέση:

$$F - f_s = m_1\,a \qquad (1)$$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα (δράση ίση με αντίδραση) προκύπτει ότι, αφού η δύναμη f_s ασκείται από τη μάζα m_2 πάνω στη μάζα m_1, και η μάζα m_1 θα ασκεί μια δύναμη f_{12} πάνω στη μάζα m_2 που θα είναι ίση και αντίθετη με την f_s (f_{12}= $-f_s$). Αυτή δύναμη είναι η αιτία που παρασύρεται σε κίνηση η μάζα m_2 ακόμα και αν η δύναμη F ασκείται πάνω στη μάζα m_1. Για σχετικά μικρές δυνάμεις F, η δύναμη $f_{12}=f_s$, ως η μοναδική οριζόντια δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m_2, θα προσδίδει σε αυτή την ίδια επιτάχυνση α. Και για τη μάζα m_2, ο 2[ος] Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$f_s = m_2\, a \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις Σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$F = (m_1 + m_2)\, a \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Όσο μεγαλώνει η δύναμη F μεγαλώνει και η στατική τριβή ολίσθησης f_s. Επειδή όμως η στατική τριβή ολίσθησης f_s έχει ένα ανώτατο όριο τιμής, την $f_{s,max}$, που μπορεί να λάβει, οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν μέχρις ότου η δύναμη F λάβει μια ελάχιστη τιμή F_{min} για την οποία το σύστημα των δυο μαζών θα έχει οριακά την ίδια επιτάχυνση $α_c$ η οποία θα προκύπτει από τη Σχέση (3) αν σε αυτή θέσουμε $F=F_{min}$:

$$a_c = \frac{F_{\min}}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

Στην οριακή αυτή κατάσταση (βλέπε εικόνα 3) η μάζα m_2 θα έχει την ίδια επιτάχυνση $α_c$ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$f_{s,\max} = m\, a_c \qquad (5)$$

όπου η $f_{s,max}$ είναι εξ ορισμού ανάλογη της κάθετης δύναμης N την οποία ασκεί η μάζα m_2 πάνω στη μάζα m_1. Και επειδή η επιφάνεια επαφής είναι οριζόντια, η κάθετη δύναμη N είναι ίση με το βάρος w_1 της μάζα m_1: Συγκεκριμένα:

$$N_1 = m_1\, g \quad \text{και} \quad f_{s,\max} = \mu_s\, N_1 \quad \Rightarrow \quad f_{s,\max} = \mu_s\, m_1\, g \qquad (6)$$

Οι Σχέσεις (5) και (6) σε συνδυασμό με τη Σχέση (4) δίνουν:

$$m_2\, a_c = \mu_s\, m_1\, g \quad \Rightarrow \quad m_2 \frac{F_{\min}}{m_1 + m_2} = \mu_s\, m_1\, g \quad \Rightarrow \quad F_{\min} = \frac{\mu_s\, m_1\, g\,(m_1 + m_2)}{m_2} \quad \Rightarrow$$

$$F_{\min} = \frac{0{,}80 \times (1{,}0kg)(9{,}80m/s^2)(1{,}0kg + 2{,}0kg)}{2{,}0kg} \quad \Rightarrow \quad F_{\min} = 12\, N$$

Στην περίπτωση που η δύναμη F γίνει μεγαλύτερη από την F_{min} ($F>F_{min}$), η συνισταμένη των δυνάμεων που θα ασκούνται πάνω στη μάζα m_1, δηλαδή η δύναμη $F - f_s$ θα είναι μεγαλύτερη από την συνισταμένη $F_{min} - f_s$ με αποτέλεσμα η επιτάχυνση που θα αποκτήσει η μάζα m_1 να είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη επιτάχυνση $α_c$, ενώ η μάζα m_2 θ συνεχίζει να έχει επιτάχυνση $α_c$. Αυτό σημαίνει ότι σε ίδιο χρονικό διάστημα, το πάνω σώμα με μάζα m_1 θα έχει αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα από το κάτω σώμα με μάζα m_2 ή με άλλα λόγια το πάνω σώμα θα κινείται πιο γρήγορα από το κάτω σώμα. Αυτό σημαίνει ότι το πάνω σώμα θα ολισθαίνει στην πάνω επιφάνεια του σώματος με μάζα m_2.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Στο πάτωμα ενός ανελκυστήρα βρίσκεται ένας ζυγός. Αν πάνω στο ζυγό τοποθετηθεί ένα αντικείμενο το οποίο έχει μάζα m=85,0 kg και ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή επιτάχυνση της οποίας το μέτρο είναι α = 2,50 m/s^2, να υπολογίσετε την ένδειξη του ζυγού στις περιπτώσεις που ο ανελκυστήρας:

(α) ανέρχεται επιταχυνόμενος,

(β) κατέρχεται επιταχυνόμενος,

(γ) ανέρχεται επιβραδυνόμενος, και

(δ) κατέρχεται επιβραδυνόμενος.

Δίνεται g = 9,80 m/s^2.

ΛΥΣΗ

Η κίνηση του ανελκυστήρα είναι κατακόρυφη με θετική φορά προς τα πάνω.

Σε κάθε περίπτωση, το αντικείμενο που βρίσκεται πάνω στο ζυγό θα κινείται με την επιτάχυνση την οποία θα έχει ο ανελκυστήρας. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο αντικείμενο είναι:

Το βάρος του αντικειμένου: $\vec{w} = -mg\hat{j}$ (1)

και η αντίδραση του ζυγού: $\vec{F} = F\hat{j}$ (2)

Το πραγματικό βάρος του αντικειμένου είναι $w = mg$ = (85,0kg)(9,80m/s^2) = 833 N

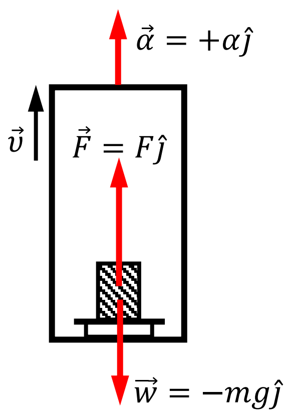
Το μέτρο F της δύναμης αντίδρασης του ζυγού είναι ίσο με την ένδειξη που δείχνει ο ζυγός όταν ο ανελκυστήρας κινείται με επιτάχυνση. Η ένδειξη αυτή του ζυγού ονομάζεται φαινόμενο βάρος του αντικειμένου.

Η συνισταμένη δύναμη F_{net} που ασκείται πάνω στο αντικείμενο θα πρέπει να ικανοποιεί το Β' νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{w} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F\hat{j} - mg\hat{j} = m\vec{a} \qquad (3)$$

(α) Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha} = +(2,50\ \mathrm{m}/s^2)\hat{j}$

Το πρόσημο (+) μπήκε επειδή η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα πάνω. Για να είναι θετική η επιτάχυνση α, το μέτρο F της δύναμης αντίδραση του ζυγού πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο w του βάρους του αντικειμένου. Σύμφωνα με το διπλανό Σχήμα, η Εξίσωση (3) γίνεται:



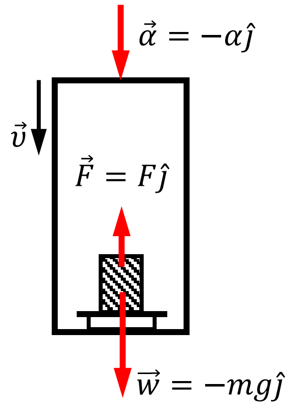
$$F\hat{j} - mg\hat{j} = +ma\hat{j} \quad \Rightarrow \quad F - mg = ma \quad \Rightarrow$$

$$F = m(g + a) \quad \Rightarrow$$

F = (85,0 kg)[(9,80m/s^2) + (2,50m/s^2)] $\Rightarrow$ ***F* = 1050 N**

(β) Ο ανελκυστήρας κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha} = -(2,50\ \mathrm{m}/s^2)\hat{j}$

Το πρόσημο (-) μπήκε επειδή η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα κάτω (οι ταχύτητες είναι αρνητικές και η τελική ταχύτητα είναι αρνητικότερη της αρχικής ταχύτητας). Για να είναι αρνητική η επιτάχυνση α, το μέτρο F της δύναμης αντίδραση του ζυγού πρέπει να είναι μικρότερο από το μέτρο w του βάρους του αντικειμένου. Σύμφωνα με το διπλανό Σχήμα, η Εξίσωση (3) γίνεται:

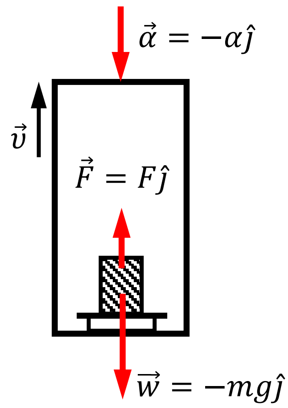


$$F\hat{j} - mg\hat{j} = -ma\hat{j} \quad \Rightarrow \quad F - mg = -ma \quad \Rightarrow \quad F = m(g-a)$$

F = (85,0 kg)[(9,80m/s^2) – (2,50m/s^2)] $\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ **= 620 N**

(γ) Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με σταθερή επιβράδυνση $\vec{\alpha} = -(2,50\ \mathrm{m}/s^2)\hat{j}$

Το πρόσημο (-) μπήκε επειδή η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα κάτω (οι ταχύτητες είναι θετικές και η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη από την αρχική ταχύτητα). Για να είναι αρνητική η επιτάχυνση α, το μέτρο F της δύναμης αντίδραση του ζυγού πρέπει να είναι μικρότερο από το μέτρο w του βάρους του αντικειμένου. Σύμφωνα με το διπλανό Σχήμα, η Εξίσωση (3) γίνεται:



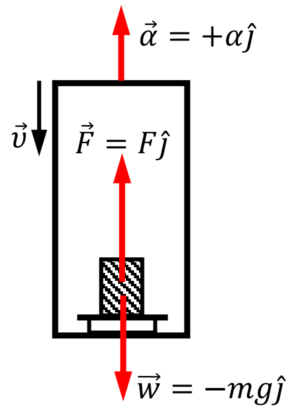
$$F\hat{j} - mg\hat{j} = -ma\hat{j} \quad \Rightarrow \quad F - mg = -ma \quad \Rightarrow$$

$$F = m(g-a) \quad \Rightarrow$$

F = (85,0 kg)[(9,80m/s^2) – (2,50m/s^2)] $\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ **= 620 N**

(δ) Ο ανελκυστήρας κατέρχεται με σταθερή επιβράδυνση $\vec{\alpha} = +(2,50\ \mathrm{m}/s^2)\hat{j}$

Το πρόσημο (+) μπήκε επειδή η επιτάχυνση έχει κατεύθυνση προς τα πάνω (οι ταχύτητες είναι αρνητικές και το μέτρο της τελικής ταχύτητας είναι μικρότερο του μέτρου της αρχικής ταχύτητας). Για να είναι θετική η επιτάχυνση α, το μέτρο F της δύναμης αντίδραση του ζυγού πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο w του βάρους του αντικειμένου. Σύμφωνα με το διπλανό Σχήμα, η Εξίσωση (3) γίνεται:



$$F\hat{j} - mg\hat{j} = -ma\hat{j} \quad \Rightarrow \quad F - mg = +ma \quad \Rightarrow$$

$$F = m(g+a) \quad \Rightarrow$$

F = (85,0 kg)[(9,80m/s^2) + (2,50m/s^2)] $\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}$ **= 1050 N**