ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με πλάτος 4,0 cm και συχνότητα 4,0 Hz, και τη χρονική στιγμή t=0 s περνά από το σημείο ισορροπίας και κινείται προς τα δεξιά. Γράψτε την εξίσωση $x(t)$ που περιγράφει τη θέση του αντικειμένου.

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

(A=4,0 cm, f=4,0 Hz και t = 0 s → x_0 = 0 και υ>0) ⇒ $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = x_0 = 0 = A\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2} \\ &\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad \upsilon(0) = \upsilon_0 = -A\omega\sin(\varphi) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) < 0 \end{aligned}\right\} \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(2\pi f t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad x(t) = (4{,}0cm)\cos\left(2\pi\times(4{,}0\text{s}^{-1})t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = (4{,}0cm)\cos\left((8{,}0s^{-1})\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Πάνω σε μια αεροτροχιά ένα αντικείμενο που είναι στερεωμένο σε ένα ελατήριο ταλαντώνεται με περίοδο T=1,5 s. Τη χρονική στιγμή t=0 s το αντικείμενο είναι 5,0 cm αριστερά από το σημείο ισορροπίας και κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 36,3 cm/s. Να υπολογίσετε

α. Την αρχική φάση φ;

β. Τη φάση μετά από χρόνο t=0 s, t=0,5 s, t=1,0 s και t=1,5 s;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

T=1,5 s, t=0 s → (x_0 = – 5,0 cm και υ_0 = 36,3 m/s) ⇒ φ = ?? και $\varphi(t)$ = ???

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3{,}14}{1{,}5s} = 4{,}19s^{-1}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = x_0 = A\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{A} \\ &\upsilon(0) = \upsilon_0 = -A\omega\sin(\varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = -\frac{\upsilon_0}{A\omega} < 0 \end{aligned}\right\} \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega} = -\frac{36{,}3cm/s}{(-5{,}0cm)(4{,}19s^{-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\varphi) = 1{,}73 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan(1{,}73) \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \;\; ή \;\; \varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}.$$ Επειδή όμως

$$\sin(\varphi) = -\frac{\upsilon_0}{A\omega} < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{3} = 2\pi\times\left(\frac{t}{1{,}5s} - \frac{1}{3}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια μάζα 200 g είναι κολλημένη σε ένα οριζόντιο ελατήριο και ταλαντώνεται με συχνότητα 2,0 Hz. Όταν t=0 s η μάζα είναι στη θέση x=5,0 cm και έχει ταχύτητα υ_x=–30 cm/s. Να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο και τη γωνιακή συχνότητα.
β. Την αρχική φάση.
γ. Το πλάτος.
δ. Τη μέγιστη ταχύτητα.
ε. Τη μέγιστη επιτάχυνση.
στ. Την ολική ενέργεια.
ζ. Τη θέση όταν t=0,40 s.

ΛΥΣΗ

Δεδομένα

m=200 g, f = 2,0 Hz, t = 0 s ⇒ (x_0 = 5,0 cm και υ_0= –30 cm/s)

α) $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}0 s^{-1}} = 0{,}5 s$, και $\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 2{,}0 s^{-1} = 4\pi\, rad/s = 12{,}57\, rad/s$

β) $$\left.\begin{aligned} x(0) = x_0 = A\cos(\varphi) \quad &\Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{x_0}{A} \\ \upsilon(0) = \upsilon_0 = -A\omega\sin(\varphi) \quad &\Rightarrow \quad \sin(\varphi) = -\frac{\upsilon_0}{A\omega} < 0 \end{aligned}\right\} \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega} = -\frac{-30 cm/s}{(5{,}0 cm)(12{,}57 s^{-1})}$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = 0{,}477 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan(0{,}477) \Rightarrow \varphi = 0{,}445 rad \quad ή \quad \varphi = \pi + 0{,}445 rad .$$

Επειδή όμως $\sin(\varphi) = -\frac{\upsilon_0}{A\omega} = -\frac{-30 cm/s}{A \times 12{,}57 s^{-1}} = \frac{2{,}39}{A} > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0{,}445 rad$

γ) $\sin(\varphi) = \frac{2{,}39}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2{,}39}{\sin(\varphi)} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2{,}39}{\sin(0{,}445)} \quad \Rightarrow \quad A = 5{,}55 cm$

δ) $\upsilon_{\max} = A\omega = (5{,}55 cm) \times (12{,}57 s^{-1}) = 69{,}7 cm/s$

ε) $a_{\max} = A\omega^2 = (5{,}55 cm) \times (12{,}57 s^{-1})^2 = 877 cm/s^2$

στ) $E_{\max} = \frac{1}{2} m \upsilon_{\max}^2 = \frac{1}{2}(0{,}20 kg) \times (0{,}697 m/s)^2 = 0{,}0485 J$

ζ) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad x(0{,}40 s) = (5{,}55 cm)\cos((12{,}57 s^{-1})(0{,}40 s) + 0{,}445) = 3{,}83 cm$

ΑΣΚΗΣΗ 4

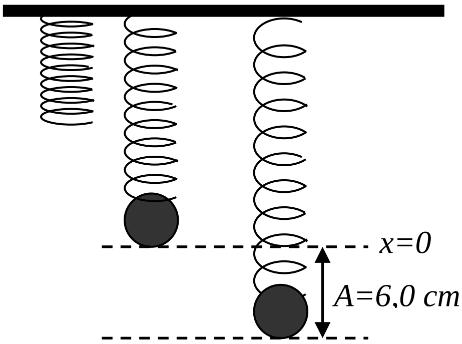
Ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 15,0 N/m κρέμεται από το ταβάνι. Μια μπάλα προσαρμόζεται στο ελατήριο και αφήνεται να ισορροπήσει. Τότε το ελατήριο τραβιέται προς τα κάτω κατά 6,0 cm και αφήνεται ελεύθερο. Αν η μπάλα κάνει 30 ταλαντώσεις σε 20 s Να υπολογίσετε (α) τη μάζα της μπάλας και (β) τη μέγιστη ταχύτητά της;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα

A = 6,0 cm,   k = 15,0 N/m   και   30 ταλαντώσεις σε 20 sec

$f = \frac{30}{20\,s} = 1{,}5\,Hz = 1{,}5\,s^{-1}$ και $\omega = 2\pi\, f = 2 \times 3{,}14 \times 1{,}5\,s^{-1} = 9{,}42\,s^{-1}$



α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{15N/m}{(9{,}42\,s^{-1})^2} = 0{,}169\,kg$

β) $\upsilon_{\max} = A\,\omega = (6{,}0\,cm) \times (9{,}42\,s^{-1}) = 56{,}5\,cm/s = 0{,}565\,m/s$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Η κίνηση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $x(t) = (25cm)\cos(10t)$ όπου *t* είναι σε *s*. Σε ποια χρονική στιγμή είναι η κινητική ενέργεια διπλάσια της δυναμικής;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

$x(t) = (25cm)\cos(10t)$, σε ποια χρονική t η κινητική ενέργεια K είναι διπλάσια της δυναμικής U.

Πρέπει: *K*=*2U* σε χρονική στιγμή τέτοια ώστε: $0 < t < \frac{T}{4}$

$$\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -250\sin(10t) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\max} = 250\,m/s$$

$$E_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = K + U = K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K = \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = \frac{3}{2}\frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm\upsilon_{\max}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \pm 204 \text{ m/s}$$

Επειδή η ταλάντωση αρχίζει από τη θετική απομάκρυνση *x*=25 c*m* στο πρώτο τέταρτο της περιόδου η ταχύτητα πρέπει να είναι αρνητική, οπότε:

υ= –204 m/s

$$\upsilon(t) = -250\sin(10t) \quad \Rightarrow \quad -204\,m/s = -(250\,m/s)\sin(10t) \quad \Rightarrow \quad \sin(10t) = \frac{204}{250} = 0{,}816$$

$$10t = \arcsin(0{,}816) = 0{,}95\,rad \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}095\,s$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

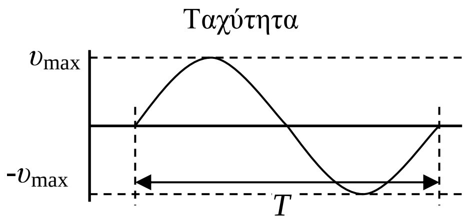
Για ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση, δείξτε ότι $\upsilon_{\max}=(\pi/2)\upsilon_{avg}$ όπου υ_{avg} είναι η μέση τιμή του μέτρου ταχύτητας στη διάρκεια μιας περιόδου.

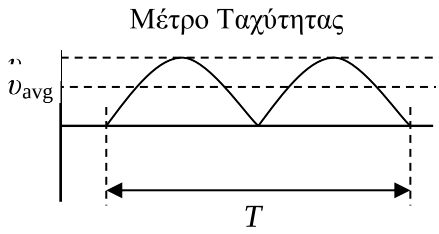
ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

Να αποδείξετε ότι $\upsilon_{max}=(\pi/2)\upsilon_{avg}$, όπου υ_{avg} είναι η μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας ενός αρμονικού ταλαντωτή σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

Η ταχύτητα ενός αρμονικού ταλαντωτή σε χρονικό διάστημα μιας ημιπεριόδου μπορεί να είναι θετική ή αρνητική οπότε στην αμέσως επόμενη ημιπερίοδο θα είναι αρνητική ή θετική. Αντίθετα, το μέτρο της ταχύτητας του αρμονικού ταλαντωτή είναι πάντα θετικό και σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου T μεταβάλλεται δυο φορές από τη τιμή 0 μέχρι τη τιμή υ_{max}.





Η εξίσωση ταλάντωσης είναι: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Η ταχύτητα του ταλαντωτή είναι: $\upsilon(t) = -\upsilon_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$

Μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ταλαντωτή :

$$\upsilon_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \upsilon(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \left|-\upsilon_{\max}\sin(\omega t + \varphi)\right| dt \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_{avg} = \frac{2\upsilon_{\max}}{\omega T}\int_0^{T/2} \sin(\omega t + \varphi)\, d(\omega t + \varphi)$$

Θέτω όπου: $\omega t+\varphi=\theta$. Η γωνία θ μεταβάλλεται κατά π σε χρονικό διάστημα $T/2$. Οπότε:

$$\upsilon_{avg} = \frac{2\upsilon_{\max}}{\frac{2\pi}{\mathrm{T}}T}\int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta = \frac{\upsilon_{\max}}{\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{\upsilon_{\max}}{\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\frac{\upsilon_{\max}}{\pi}(-2) = \frac{2\upsilon_{\max}}{\pi} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_{avg} = \frac{2\upsilon_{\max}}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\max} = \frac{\pi}{2}\upsilon_{avg}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Μια μπάλα με μάζα 100 g προσαρμόζεται σε ένα οριζόντιο ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 2,5 N/m και ταλαντώνεται οριζόντια σε ένα τραπέζι χωρίς τριβή. Η ταχύτητά της είναι 20 cm/s όταν x=–5,0 cm

α. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης;

β. Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση της μπάλας;

γ. Ποια είναι η θέση της μπάλας όταν η επιτάχυνση είναι μέγιστη;

δ. Ποια είναι η ταχύτητα της μπάλας όταν x=3,0 cm;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

m =100 g, σταθερά ελατηρίου k=2,5 N/m, όταν x=-5,0 cm τότε υ=+20 cm/s.

Γωνιακή συχνότητα: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2{,}5\,N/m}{0{,}10kg}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 5{,}0\,s^{-1}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

α) $x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad x^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

$\dfrac{\upsilon}{\omega} = -A\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$ Προσθέτουμε κατά μέλη:

$x^2 + \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2\left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 \quad \Rightarrow$

$A^2 = (-5{,}0cm^2) + \dfrac{(20cm/s)^2}{(5{,}0s^{-})} = 41cm^2 \quad A = 6{,}4\ cm$

β) $a_{\max} = A\omega^2 = (6{,}4cm)\times(5{,}0s^{-1})^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = 160cm/s^2$

γ) $a_{\max} = +160cm/s^2$ όταν $x = -A = -6{,}4cm$

δ) $x^2 + \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = \left(A^2 - x^2\right)\omega^2 = \left((6{,}4cm)^2 - (3{,}0cm)^2\right)\times(5{,}0s^{-1})^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 28{,}3cm/s$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ένας ταλαντωτής με μάζα 300 g έχει ταχύτητα 95,4 cm/s όταν η μετατόπισή του είναι 3,0 cm και ταχύτητα 71,4 cm/s όταν η μετατόπιση του είναι 6,0 cm. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα του ταλαντωτή;

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιείς την Εξίσωση (1.26) δυο φορές για τις τιμές x_1, υ_1 και x_2, υ_2.

$\upsilon_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$ και $\upsilon_2 = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2}$

Έχετε ένα σύστημα δυο (2) εξισώσεων με δυο (2) αγνώστους, τη γωνιακή συχνότητα ω και το πλάτος A της ταλάντωσης.

Αφού βρείτε τις τιμές των ω και A, υπολογίζεις και τη μέγιστη ταχύτητα από τη σχέση:

$\upsilon_{\max} = \omega A$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ένα αντικείμενο με μάζα 5,0 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 2000 N/m. Τη χρονική στιγμή t=0 s, το αντικείμενο τραβιέται προς τα κάτω κατά 5,0 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα 1,0 m/s να κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας. Να υπολογίσετε:

(α) Τη συχνότητα της ταλάντωση.

(β) Το πλάτος της ταλάντωσης

(γ) Την αρχική φάση της ταλάντωσης έχοντας δεδομένη την εξίσωση κίνησης $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ της μάζας που ταλαντώνεται.

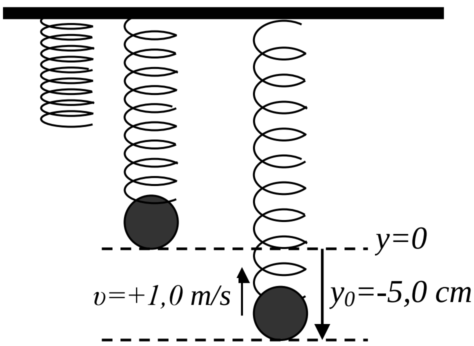
(δ) Την ολική μηχανική ενέργεια της κίνησης;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

m = 5,0 kg, σταθερά ελατηρίου k=2000 N/m.

Αρχικές συνθήκες: t=0 s, $y_0 = -5{,}0$ cm, υ_0=+1,0 m/s



(α) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2000\,N/m}{5{,}0\,kg}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 20{,}0\,s^{-1}$

$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{20{,}0\,s^{-1}}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = 3{,}18\,s^{-1}$

(β) $E_{\max} = K + U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 \quad \Rightarrow$

α $A = \sqrt{\dfrac{m\upsilon_0^2 + k\,y_0^2}{k}} = \sqrt{\dfrac{(5{,}0kg)(1{,}0m/s)^2 + (2000N/m)(0{,}05m)^2}{2000N/m}} \quad \Rightarrow$

$A = 0{,}0707\,\text{m} = 7{,}07\,\text{cm}$

(γ) $y_0 = A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \dfrac{y_0}{A} = \dfrac{-0{,}05m}{7{,}07m} = -0{,}707 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -0{,}707 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm 2{,}36\,\text{rad}$

$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi$

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι υ_0=+1,0 m/s >0. Οπότε:

$\upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi < 0 \quad \Rightarrow \quad -\pi < \varphi < 0$

Τελικά, από τις δυο αντίθετες τιμές της φάσης φ που υπολογίσαμε πιο πάνω επιλέγουμε την αρνητική τιμή φ= – 2,35 rad

Από τα ευρήματα των ερωτήσεων (α), (β) και (γ), η εξίσωση κίνησης της μάζας του ταλαντωτή γράφεται με τη μορφή:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad y = (7{,}07cm)\cos\left[(20{,}0rad/s)t - 2{,}35rad\right]$$

δ) $E_{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(2000N/m)(0{,}0707m)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\max} = 5{,}0\,\text{J}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένα αντικείμενο που έχει μάζα 200 g κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 10 N/m. Τη χρονική στιγμή t=0 s το αντικείμενο βρίσκεται 20 cm κάτω από το σημείο ισορροπίας και κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα 100 cm/s. Να υπολογίσετε:

α. Τη συχνότητα ταλάντωσης του αντικειμένου.

β. Τη μετατόπιση του αντικειμένου από την ισορροπία όταν αυτό έχει ταχύτητα 50 cm/s.

γ. Τη θέση του αντικειμένου τη χρονική στιγμή t=1,0 s.

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

m =200 g, σταθερά ελατηρίου k=10 N/m, όταν t=0 s τότε x_0 = –20 cm και υ_0 = +100 cm/s.

α. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10N/m}{0{,}2kg}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 7{,}07s^{-1} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}07s^{-1}}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = 1{,}125s^{-1}$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad x^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$\frac{\upsilon}{\omega} = -A\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$ Προσθέτω κατά μέλη:

$$x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2\left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 \quad \Rightarrow$$

$$A^2 = (-0{,}20m)^2 + \frac{(1{,}0m/s)^2}{(7{,}07s^{-1})^2} = 0{,}060m^2 \qquad A = 0{,}245m = 24{,}5cm$$

β) $x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = A^2 - \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = (0.245m)^2 - \frac{(0{,}50m/s)^2}{(7{,}07s^{-1})^2} = 0{,}055m^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}235m$

γ) Υπολογισμός αρχικής φάσης: $x(0) = x_0 = A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{x_0}{A} = \frac{-0{,}20m}{0{,}245m} = -0{,}816 \quad \Rightarrow$

$$\varphi = \pm 2{,}52rad$$

Επειδή όμως: $\upsilon(0) = \upsilon_0 > 0$ και $\upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = -\frac{\upsilon_0}{A\omega} < 0$, οπότε:

$$\varphi = -2{,}52rad$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad x = (0{,}245\text{m})\cos[(7{,}07\text{s}^{-1})(1{,}0\text{s}) - 2{,}52\text{rad}] \quad \Rightarrow \quad x = -0{,}040\text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ένα μικρό αυτοκίνητο έχει μάζα 1200 kg. Υποθέστε ότι το αυτοκίνητο έχει ένα ελατήριο σε κάθε τροχό, και ότι τα ελατήρια είναι πανομοιότυπα, και η μάζα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη πάνω στα τέσσερα ελατήρια.

α. Ποια είναι η σταθερά ελατηρίου των τεσσάρων ελατηρίων αν το άδειο αυτοκίνητο ταλαντώνεται 2,0 φορές κάθε δευτερόλεπτο;

β. Ποια θα είναι η συχνότητα ταλάντωσης του αυτοκινήτου ενώ μεταφέρει τέσσερα άτομα με μάζα 70 kg το καθένα;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα

Αυτοκίνητο μάζας M =1200 kg. Το αυτοκίνητο στηρίζεται πάνω στους τέσσερις τροχούς με τέσσερα πανομοιότυπα ελατήρια. Το αυτοκίνητο ταλαντώνεται με 2,0 φορές το δευτερόλεπτο. α) πόσο είναι η σταθερά k κάθε ελατηρίου, β) αν στο αυτοκίνητο υπάρχουν 4 τέσσερα άτομα με μάζα m=80 kg το κάθε ένα ποια θα είναι η συχνότητα ταλάντωσης του αυτοκινήτου

Τα τέσσερα παράλληλα και όμοια ελατήρια ισοδυναμούν με ένα ελατήριο με σταθερά $k_t=4k$ (γιατί???)

α) Αφού το αυτοκίνητο εκτελεί 2,0 ταλαντώσεις το δευτερόλεπτο, η συχνότητα των ταλαντώσεων θα είναι:

$$f = 2{,}0\, s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \times 2{,}0 s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega = 12{,}57\, rad/s$$

$$\omega^2 = \frac{k_t}{M} \quad \Rightarrow \quad k_t = \omega^2 M = (12{,}57 rad/s)^2\,(1200kg) \quad \Rightarrow \quad k_t = 189500 kg/s \quad \Rightarrow$$

$$k = \frac{k_t}{4} = \frac{189500 kg/s}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 47400 kg/s \quad (N/m)$$

β) $$\omega_1^2 = \frac{k_t}{M+4m} = \frac{189500 N/m}{1200kg + 4\times 70kg} \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = 128{,}0 rad\, s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 11{,}31 rad\, s^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{11{,}31 rad\, s^{-1}}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = 1{,}80\, s^{-1}\ (Hz)$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

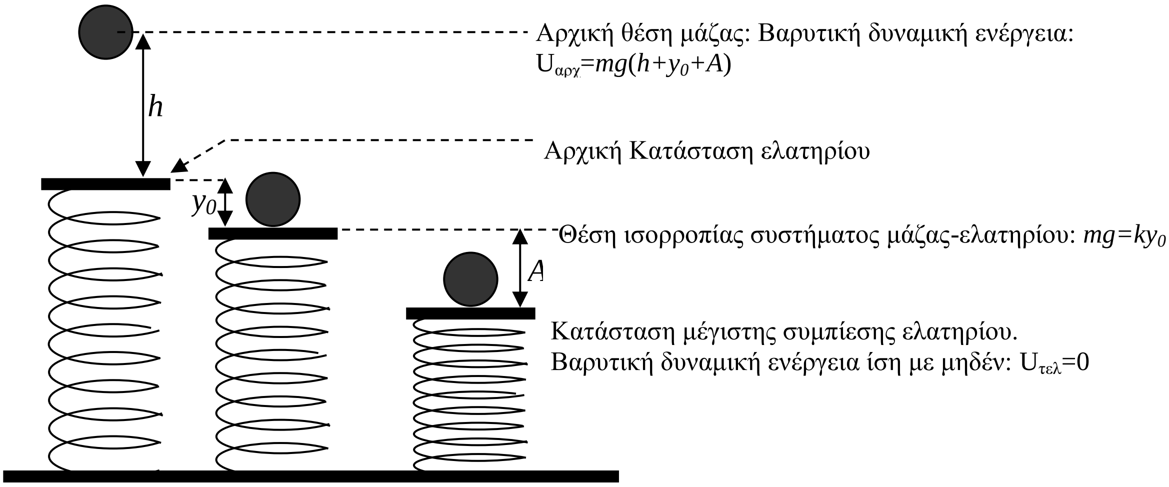
Η κάτω άκρη ενός κατακόρυφου ελατηρίου είναι στερεωμένη πάνω σε ένα τραπέζι. Ένα αντικείμενο ρίχνεται από ύψος h=0,75 m πάνω από την κορυφή του ελατηρίου. Το αντικείμενο κολλά στο πάνω άκρο του ελατηρίου και ύστερα ταλαντώνεται με πλάτος A=12,5 cm. Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης;

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω Σχήμα διακρίνουμε τέσσερις χαρακτηριστικές καταστάσεις του συστήματος ελατήριο-μάζα:

Η μάζα m βρίσκεται σε απόσταση h=0,75 m πάνω από το απαραμόρφωτο ελατήριο. Στην κατάσταση αυτή, η μάζα έχει αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{g,αρχ}$, ενώ η αρχική δυναμική ενέργεια του απαραμόρφωτου ελατηρίου είναι μηδέν, $U_{sp,αρχ.}$=0. Η αρχική κινητική ενέργεια της μάζας είναι μηδέν: $K_{αρχ}$=0

Όταν η μάζα τοποθετηθεί πάνω στο ελατήριο, τότε το ελατήριο συμπιέζεται κατά διάστημα y_0 και ισορροπεί. Στη θέση αυτή ισχύει η σχέση: $mg = k\,y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{m}{k}g$ (12.1)



Από τη θεωρία, η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο-μάζα είναι: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ οπότε η σχέση (12.1) γίνεται:

$$y_0 = \frac{g}{\omega^2} \qquad (12.2)$$

Όταν η μάζα m πέσει ελεύθερα πάνω στο ελατήριο από την απόσταση h, τότε το ελατήριο υφίσταται τη μέγιστη συμπίεση y, η οποία είναι ίση με

$$y = y_0 + A = \frac{g}{\omega^2} + A \qquad (12.3)$$

όπου το A είναι η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο-μάζα. Αυτό σημαίνει ότι μετά τη μέγιστη αυτή παραμόρφωση, το ελατήριο μαζί με τη μάζα m θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=12,5 cm. Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_{sp,τελ} = \frac{1}{2}k(y_0 + A)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{g}{\omega^2} + A\right)^2 \qquad (12.4)$$

Εξορισμού, θεωρούμε ότι στη θέση αυτή της μέγιστης παραμόρφωσης η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν: $U_{g,τελ}=0$. Τελική κινητική ενέργεια της μάζα είναι μηδέν: $K_{τελ}=0$.

Σε σχέση με το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στην κατάσταση της μέγιστης παραμόρφωσης του ελατηρίου, η αρχική βαρυτικη δυναμική ενέργεια της μάζα θα είναι ίση με:

$$U_{g,αρχ.} = mg(h + y_0 + A) = mg\left(h + \frac{g}{\omega^2} + A\right) \qquad (12.5)$$

Από το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και από τις Σχέσεις (12.4) και (12.5) έχουμε:

Αρχική Μηχανική Ενέργεια = Τελική Μηχανική Ενέργεια $\rightarrow$

$$U_{g,\alpha\rho\chi} = U_{sp,\tau\varepsilon\lambda} \quad \Rightarrow \quad mg\left(h + \frac{g}{\omega^2} + A\right) = \frac{1}{2}k\left(\frac{g}{\omega^2} + A\right)^2 \qquad (12.6)$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\left(h + \frac{g}{\omega^2} + A\right) = \frac{1}{2}\frac{k}{mg}\left(\frac{g}{\omega^2} + A\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h + \frac{g}{\omega^2} + A = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{g}{\omega^2} + A\right)^2$$

Για απλούστευση των πράξεων, αντικαθιστούμε στην τελευταία σχέση τη σχέση (12.2) οπότε έχουμε:

$$h + y_0 + A = \frac{1}{2}\frac{1}{y_0}(y_0 + A)^2 \quad \Rightarrow \quad h + y_0 + A = \frac{y_0}{2} + \frac{A^2}{2y_0} + A \quad \Rightarrow \quad y_0^2 + 2h\,y_0 - A^2 = 0$$

Η ζητούμενη λύση για το y_0 είναι η θετική ρίζα του παραπάνω τριωνύμου:

$$y_0 = -h + \sqrt{h^2 + A^2} = -(0{,}75m) + \sqrt{(0{,}75m)^2 + 0{,}125m)^2} \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0{,}0103m \quad ή \quad y_0 = 1{,}03cm$$

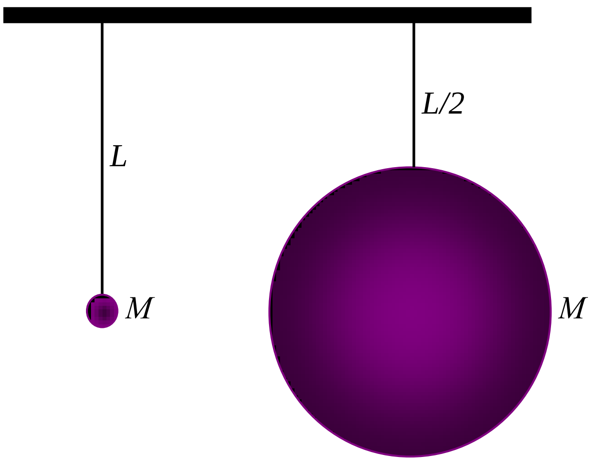
Τέλος, από τη Σχέση (12.2) υπολογίζουμε τη συχνότητα της ταλάντωσης:

$$y_0 = \frac{g}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{y_0}} = \sqrt{\frac{9{,}80m/s^2}{0{,}0103m}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 30{,}8rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{30{,}8rad/s}{6{,}28rad} \qquad f = 4{,}9\ s^{-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Το κάθε ένα από τα δυο εκκρεμή που φαίνονται στο σχήμα της άσκησης αποτελούνται από μια στερεά σφαίρα μάζας *M* η οποία είναι αναρτημένη σε αβαρές νήμα. Όπως δείχνει το σχήμα στο ένα εκκρεμές η μάζα είναι σημειακή και το νήμα έχει μήκος *L*, ενώ στο άλλο εκκρεμές η συμπαγής σφαίρα έχει ακτίνα *L*/2 και το νήμα έχει μήκος *L*/2. Να υπολογίσετε την περίοδο των δυο εκκρεμών.



Λύση

Το αριστερό εκκρεμές είναι ένα απλό εκκρεμές επειδή οι διαστάσεις της μάζας *M* είναι πολλές φορές μικρότερες από το μήκος του νήματος (μάζα σημειακή). Η περίοδος του εκκρεμούς αυτού είναι: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (1)

Στο άλλο εκκρεμές η μάζα M, αν και είναι ίση με τη μάζα του πρώτου εκκρεμούς, αυτή δεν είναι σημειακή. Για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο εκκρεμές είναι ένα φυσικό εκκρεμές και η περίοδός του είναι: $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgL}}$ (2)

όπου I είναι η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα περιστροφή το σημείο εξάρτησης του εκκρεμούς. Η ροπής αδράνειας I_{cm} της σφαίρας με μάζα M και ακτίνα R ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι: $I_{cm} = \dfrac{2}{5}MR^2$ όπου R=L/2. Οπότε, από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (θεώρημα Steiner) η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από τη σημείο εξάρτησης του εκκρεμούς θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_{cm} + ML^2 = \frac{2}{5}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + ML^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{11}{10}ML^2 \quad (3)$$

Από τις Σχέσεις (2) και (3) προκύπτει η περίοδος του αριστερού εκκρεμούς:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{11}{10}ML^2}{MgL}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{11L}{10g}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14:

Ένα αντικείμενο που έχει μάζα m=1.50 kg ταλαντώνεται στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου πάνω σε μια οριζόντια ατριβή επιφάνεια. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k=515 N/m και η μέγιστη ταχύτητα την οποία αποκτά η μάζα είναι υ_0=70,0 cm/s. Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m.

ΑΣΚΗΣΗ 15:

Ένα αντικείμενο που έχει μάζα m=3,00 kg ταλαντώνεται στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου πάνω σε μια οριζόντια ατριβή επιφάνεια. Το πλάτος και η συχνότητα της ταλάντωσης είναι A=10,0 cm και f=2,40 Hz. Να υπολογίσετε:

α. Τη σταθερά k του ελατηρίου.

β. Τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση του αντικειμένου

ΑΣΚΗΣΗ 16:

(α) Ένα σώμα που έχει μάζα m είναι προσαρμοσμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου, του οποίου η σταθερά είναι k, και ταλαντώνεται με πλάτος A. Την χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκετια στη θέση x=A, ένα άλλο σώμα με μάζα m/2 πέφτει κατακόρυφα προς το σώμα με τη μάζα m και προσκολάται σε αυτό. Μετά την αύξηση της μάζας του αρχικού σώματος κατά m/2, να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολης:

- Του πλάτους της ταλάντωσης
- Της ολικής ενέργειας της ταλάτωσης.
- Της περιόδου της ταλάντωσης.
- Της αρχικής φάσης της ταλάντωσης.

(β) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Είναι γνωστό από την εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή ότι το σώμα που ταλαντώνεται χρειάζεται χρονικό διάστημα ίσο με $T/4$ για να μεταβεί αυτό από τη θέση $x= -A$ στη θέση $x=0$. Οχρόνος που απαιτείται για να πάει το σώμα που ταλαντώνεται από τη θέση $x= -A/2$ στη θέση $x=A/2$ είναι μικρότερος, μεγαλύτερος ή ίσος με το χρονικό διάστημα $T/4$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.