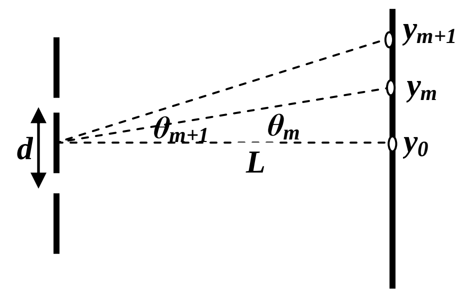
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Ένα οπτικό φράγμα με δυο σχισμές που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=0.20 mm είναι τοποθετημένο σε απόσταση L=1,20 m από μια οθόνη. Το οπτικό φράγμα με τις δυο σχισμές φωτίζεται με οπτική πηγή που έχει άγνωστο μήκος κύματος λ και πάνω στην οθόνη δημιουργείται μια εικόνα συμβολής στην οποία η απόσταση δυο διαδοχικών φωτεινών σημείων απέχουν μεταξύ τους απόσταση y=3,30 mm. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ της οπτικής ακτινοβολίας.

ΛΥΣΗ



Συνθήκη ενισχυτικής συμβολής:

$$d\sin\theta_m = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \; . \; . \; .$$

Επειδή η απόσταση της οθόνης είναι L = 1,20 m και οι σχετικές αποστάσεις των φωτεινών σημείων συμβολής είναι της τάξης των μερικών χιλιοστών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρών γωνιών σύμφωνα για τις γωνίες θ_m και θ_{m+1}:

$$\sin\theta_m \approx \tan\theta_m = \frac{y_m}{L} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \sin\theta_m \approx \tan\theta_{m+1} = \frac{y_{m+1}}{L}$$

Οπότε, η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής για τα δυο διαδοχικά φωτεινά σημεία γίνεται:

$$d\frac{y_m}{L} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad y_m = m\frac{L}{d}\lambda \qquad \text{και αντίστοιχα:} \quad y_{m+1} = (m+1)\frac{L}{d}\lambda$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις Εξισώσεις για το y_m και το y_{m+1}, όπου $y_m - y_{m+1} = y$ =3,30 mm, βρίσκουμε:

$$y_{m+1} - y_m = (m+1)\frac{L}{d}\lambda - m\frac{L}{d}\lambda \quad \Rightarrow \quad y = \frac{L}{d}\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d}{L}y = \frac{0{,}20\text{mm}}{1200\text{mm}} \times 3{,}30\text{mm} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = 0{,}00055 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 550 \text{ nm}$$

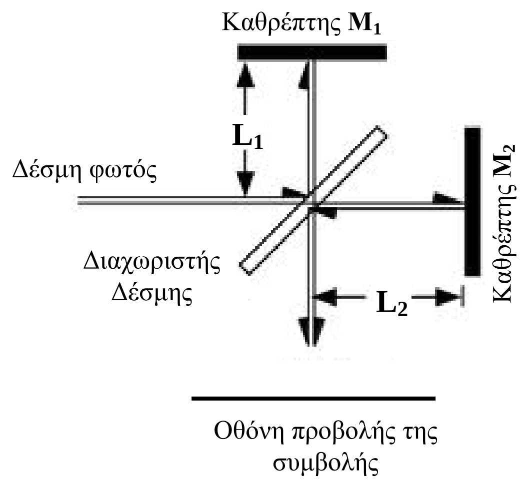
ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε ένα συμβολόμετρο Michelson χρησιμοποιείται φως που εκπέμπεται από μια λάμπα νατρίου. Τα άτομα νατρίου εκπέμπουν φως με μήκη κύματος 589,0 nm και 589,6 nm. Το συμβολόμετρο είναι αρχικά ρυθμισμένο έτσι ώστε οι δυο καθρέπτες του M_1 και M_2 να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από το διαχωριστή δέσμης φωτός (L_1 = L_2), δημιουργώντας έτσι μια φωτεινή κηλίδα στο κέντρο της εικόνας συμβολής. Πόσο πρέπει να μετακινηθεί ο καθρέπτης M_2 έτσι ώστε το πλήθος των εμφανίσεων του ενός από τα δυο μήκη κύματος στο κέντρο της εικόνας συμβολής να είναι κατά ένα μεγαλύτερο από ότι το άλλο μήκος κύματος

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής στο συμβολόμετρο του Michelson:

$L_2 - L_1 = m\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ . \ . \ .$



Επειδή η αρίθμηση των φωτεινών κηλίδων στο κέντρο της εικόνας συμβολής αρχίζει από τη θέση των καθρεπτών για την οποία $L_1 = L_2$, η διαφορά $L_1 - L_2$ στη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής θα είναι ίση με τη μετατόπιση d του καθρ΄πετη M2.

Σύμφωνα με το δεδομένο της άσκησης, αν κατά την μετατόπιση του καθρέπτη M_2 κατά διάστημα d στο κέντρο της εικόνας συμβολής εμφανίζεται m φορές το μήκος κύματος με τιμή λ_2 = 589,6 nm, τότε το μήκος με τιμή λ_1 =589 nm θα πρέπει να εμφανιστεί m+1 φορές. Κατόπιν τούτου, θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$d = m\frac{\lambda_2}{2} = (m+1)\frac{\lambda_1}{2} \quad \Rightarrow \quad m\lambda_2 = m\lambda_1 + \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad m(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

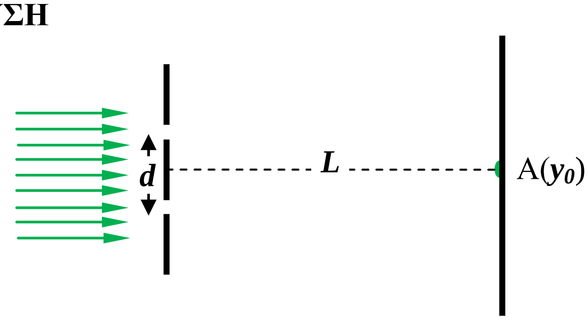
$$m = \frac{589{,}0 \text{ nm}}{589{,}6nm - 589{,}0 \text{ nm}} \approx 982$$

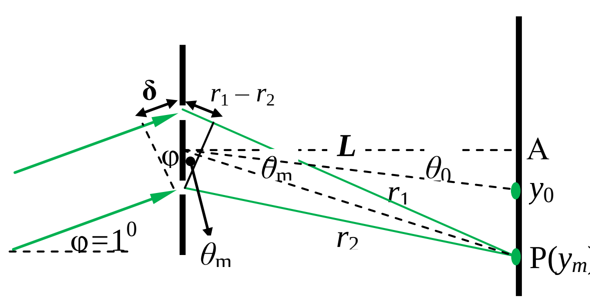
Οπότε: $d = m\frac{\lambda_2}{2} = 982 \times \frac{589 \times 10^{-6} \text{ mm}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d = 0{,}2892 \text{ mm}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια δέσμη LASER με μήκος κύματος 524 nm είναι προσπίπτει ακριβώς κάθετα σε ένα διάφραγμα που έχει δυο λεπτές σχισμές οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση 0,150 mm. Κροσσοί συμβολής, οι οποίοι περιλαμβάνουν μια κεντρική περιοχή με μέγιστη ένταση, παρατηρούνται πάνω σε μια οθόνη που βρίσκεται 1,00 m πέρα από το διάφραγμα. Η διεύθυνση της δέσμης LASER στρέφεται αργά κατά γωνιά $1{,}0^0$ γύρω από άξονα ο οποίος είναι παράλληλος με τις δυο σχισμές, έτσι ώστε η νέα διεύθυνση της δέσμης να σχηματίζει γωνία $89{,}0^0$ με το επίπεδο του διαφράγματος. Πόσο θα μετατοπιστεί το κεντρικό μέγιστο της εικόνας της συμβολής πάνω στην οθόνη;

ΛΥΣΗ





Για εποπτικούς λόγους πήραμε τα δυο κύματα που περνούν από τις δυο σχισμές και σχεδιάσαμε τη γωνία θ μεγαλύτερη

Μια δέσμη LASER συνίσταται από ένα επίπεδο κύμα. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σημεία της δέσμης LASER που βρίσκονται πάνω σε επίπεδο που είναι κάθετο στη διεύθυνση της δέσμης είναι συμφασικά.

Στο αριστερό σχήμα, η δέσμη LASER προσπίπτει κάθετα στο διάφραγμα με τις δυο σχισμές και ως εκ τούτου τα κύματα φωτός που διέρχονται από τις δυο σχισμές είναι συμφασικά. Το κεντρικό σημείο συμβολής θα είναι τότε πάνω στον άξονα συμμετρίας των δυο σχισμών (σημείο Α(y_0)).

Αντίθετα, στο δεξιό σχήμα, το κύμα φωτός που διέρχεται από την πάνω σχισμή φθάνει στη σχισμή αυτή αφού διανύσει διαδρομή μεγαλύτερη κατά διάστημα δ σε σχέση με το κύμα φωτός που φθάνει στην κάτω σχισμή. Αυτό σημαίνει ότι τα δυο αυτά κύματα φθάνουν στις δυο σχισμές με διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0 = k\delta$, όπου $\delta = d\sin\varphi$. Η γωνία φ είναι θετική αν αυτή βρίσκεται πάνω από την οριζόντια γραμμή και αρνητική αν αυτή βρίσκεται κάτ από την οριζόντια γραμμή. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, $\varphi>0$.

Οπότε τα κύματα φωτός θα εκπέμπονται από τις δυο σχισμές προς την οθόνη με διαφορά φάσης:

$$\Delta\varphi_0 = kd\sin\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\varphi \qquad (1)$$

Οι εξισώσεις κύματος των δυο κυμάτων σε ένα σημείο που απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δυο σχισμές είναι:

$$D_1 = A\sin(kr_1 - \omega t + \Delta\varphi_0) \qquad \text{και} \qquad D_1 = A\sin(kr_1 - \omega t)$$

Στο συγκεκριμένο σημείο, το συνιστάμενο κύμα θα έχει εξίσωση κύματος:

$$D_{net} = D_1 + D_2 = A\sin(kr_1 - \omega t + \Delta\varphi_0) + A\sin(kr_1 - \omega t) \qquad \Rightarrow$$

$$D_{net} = 2A\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \times \sin\left(k\frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \qquad (2)$$

Από την Εξίσωση (2) προκύπτει ότι το πλάτος του συνιστάμενου κύματος εξαρτάται από τη θέση του σημείου σε σχέση με τις θέσεις των δυο σχισμών (δηλαδή από τη διαφορά $r_1 - r_2$) καθώς και από την αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0$ των δυο κυμάτων που συμβάλλουν.

$$A_0 = 2A\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \qquad (3)$$

Συγκεκριμένα, στο σημείο αυτό θα συμβαίνει ενισχυτική συμβολή αν,

$$\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2} = m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \ldots \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{2\pi d\sin\varphi}{2\lambda} = m\pi \qquad \Rightarrow \qquad (r_1 - r_2) + d\sin\varphi = m\lambda \qquad (4)$$

Επειδή η απόσταση L της οθόνης από το διάφραγμα με τις δυο σχισμές είναι πάρα πολλές φορές μεγαλύτερο από την απόσταση d των δυο σχισμών (η πληροφορία αυτή δεν αποτυπώνεται στο σχήμα της άσκησης επειδή για πρακτικούς λόγους, η απόσταση L είναι συγκρίσιμη με την απόσταση d των δυο σχισμών), οι διευθύνσεις των r_1 και r_2 είναι πρακτικά παράλληλες και ως εκ τούτου η διαφορά $r_1 - r_2$ είναι ίση με:

$$r_1 - r_2 = d\sin\theta_m \qquad (4)$$

Από τις εξισώσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$d\sin\theta_m + d\sin\theta_1 = m\lambda \quad \Rightarrow \quad d(\sin\theta_m + \sin\varphi) = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \ldots \qquad (5)$$

Το κεντρικό σημείο συμβολής θα συμβαίνει όταν $m = 0$, οπότε η Εξίσωση (5) γίνεται:

$$\sin\theta_0 + \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_0 = -\sin\varphi = -\sin 1^0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_0 = -0{,}0175$$

Η γωνία εκτροπής του κεντρικού σημείου συμβολής είναι πολύ μικρή και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρών γωνιών:

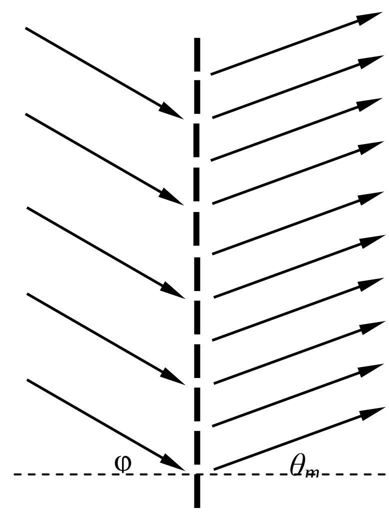
$$\sin\theta_0 \approx \tan\theta_0 = \frac{y_0}{L}$$

Οπότε, το κεντρικό σημείο συμβολής θα μετατοπιστεί κατά διάστημα:

$$y_0 = L\sin\theta_0 = (1{,}00\ \text{m}) \times (-0{,}0174) \quad \Rightarrow \quad y_0 = -0{,}0174\ \text{m} = -17{,}4\ \text{mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η ανάλυση της περίθλασης του φωτός σε φράγμα περίθλασης γίνεται συνήθως με την προϋπόθεση ότι τα κύματα φωτός προσπίπτουν κάθετα στην επιφάνεια του φράγματος, Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα επίπεδο κύμα το οποίο προσπίπτει σε ένα φράγμα περίθλασης υπό γωνία φ.



α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες θ_m στις οποίες συμβαίνει ενισχυτική συμβολή δίνονται από τη σχέση:

$$d(\sin\theta_m + \sin\varphi) = m\lambda$$

όπου m = 0, ±1, ±2, ±3, . . . οι γωνίες φ και θ θεωρούνται θετικές αν είναι κάτω από την οριζόντια γραμμή και αρνητικές αν αυτές είναι πάνω από την οριζόντια γραμμή.

β. Το δυο πρώτης τάξης μέγιστα, με m = +1 και m = –1, δεν είναι συμμετρικά ως προς το κεντρικό σημείο συμβολής. Να βρείτε τις γωνίες θ_1 και θ_{-1} στην περίπτωση που το φως που συμβάλλει έχει μήκος κύματος 500 nm, το φράγμα περίθλασης έχει 600 σχισμές ανά χιλιοστό και η γωνία πρόσπτωσης του φωτός είναι $\varphi = 30^0$.

ΛΥΣΗ

α. Στην περίπτωση που το φράγμα περίθλασης περιλαμβάνει N σχισμές και η δέσμη φωτός προσπίπτει υπό γωνία φ πάνω σε αυτό, τότε ανά δυο διαδοχικές σχισμές θα ισχύει η Εξίσωση (5) της Άσκησης 3, δηλαδή, για να συμβαίνει ενισχυτική συμβολής στη γωνία εκτροπής θ_m θα πρέπει:

$$d(\sin\theta_m + \sin\varphi) = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \ldots$$

Αυτό σημαίνει ότι όλα τα κύματα φωτός που εξέρχονται από το φράγμα περίθλασης με γωνία εκτροπής θ_m θα συμβάλουν ενισχυτικά πάνω. Κατά συνέπεια, η παρά πάνω εξίσωση ισχύει και στην περίπτωση ενισχυτικής συμβολής όταν τα κύματα που προσπίπτουν πάνω στο φράγμα περίθλασης με γωνία πρόσπτωσης φ.

β. Το φράγμα περιλαμβάνει 600 σχισμές ανά χιλιοστό, οπότε οι διαδοχικές σχισμές θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = (1/600) mm = 0,00167 mm. Όταν τα κύματα φωτός με μήκος κύματος 500 nm = 5×10^{-4} mm προσπίπτουν στο φράγμα υπό γωνία φ = –30^0, οι γωνίες εκτροπής θ_1 και θ_{-1} οι οποίες δίνουν τις δυο ενισχυτικές συμβολές πρώτης τάξης (m=1) θα είναι ίσες με:

$$\beta1.\ d(\sin\theta_1 + \sin\varphi) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} - \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_1 = \frac{5\times10^{-4}\ \mathrm{mm}}{0{,}00167\ \mathrm{mm}} - \sin(-30^0)$$

$$\sin\theta_1 = -0{,}201 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -11{,}6^0$$

$$\beta2.\ d(\sin\theta_{-1} + \sin\varphi) = -\lambda \ \Rightarrow \sin\theta_{-1} = -\frac{\lambda}{d} - \sin\varphi \ \Rightarrow$$

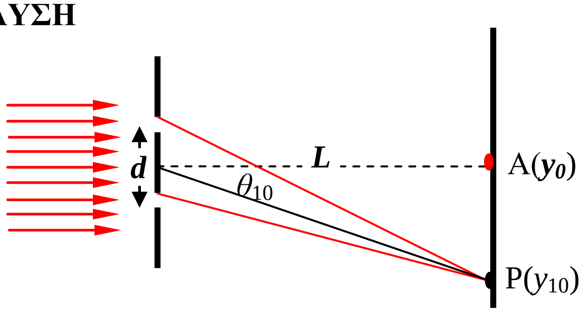
$$\sin\theta_1 = -\frac{5\times10^{-4}\ \mathrm{mm}}{0{,}00167\ \mathrm{mm}} - \sin(-30^0) =$$

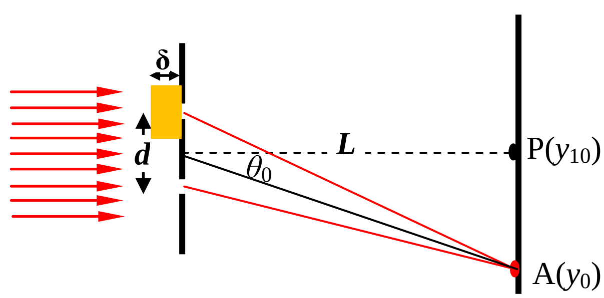
$$\sin\theta_1 = -0{,}799 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -53{,}1^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σε ένα πείραμα συμβολής φωτός από δυο σχισμές χρησιμοποιείται LASER HeNe το οποίο εκπέμπει φωτεινή δέσμη μήκους κύματος 633 nm. Κατά τη διάρκεια του πειράματος, στη μια σχισμή τοποθετείται ένα λεπτό γυαλί του οποίου ο δείχτης διάθλασης είναι 1,50. Με την προσθήκη του λεπτού γυαλιού στη μια σχισμή η εικόνα της συμβολής μετατοπίζεται τόσο, ώστε στο κεντρικό σημείο συμβολής να υπάρχει πλέον ο σκοτεινός κροσσός συμβολής που αντιστοιχεί στον ακέραιο αριθμό *m*=10. Να υπολογίσετε το πάχος του γυαλιού.

ΛΥΣΗ





Η ταχύτητα της ακτινοβολίας LASER μέσα στη γυάλινη πλάκα είναι:

$$c_g = \frac{c}{n_g} = \frac{\lambda f}{n_g} \qquad (1)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενός και n_g είναι ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού.

Η διάδοση του φωτός μέσα στη γυάλινη πλάκα διαρκεί χρονικό διάστημα:

$$t_g = \frac{\delta}{c_g} = \frac{n_g \delta}{c} = \frac{n_g \delta}{\lambda f} \qquad (2)$$

όπου λ είναι το μήκος κύματος του φωτός στο κενό. Το φως διανύει το ίδιο διάστημα δ σε χρονικό διάστημα:

$$t_0 = \frac{\delta}{c} = \frac{\delta}{\lambda f} \qquad (3)$$

Το φως καθυστερεί μέσα στη γυάλινη πλάκα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_g - t_0$ το οποίο είναι ίσο με:

$$\Delta t = t_g - t_0 = \frac{n_g \delta}{\lambda f} - \frac{\delta}{\lambda f} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\delta}{\lambda f}(n_g - 1) \qquad (4)$$

Η χρονική αυτή καθυστέρηση προκαλεί μια διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0$ μεταξύ των κυμάτων που περνούν μέσα από τις δυο σχισμέ:

$$\Delta\varphi_0 = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = 2\pi\frac{\delta}{\lambda f T}(n_g - 1) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_0 = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}(n_g - 1) \qquad (5)$$

(Η συχνότητα *f* είναι ίση με το αντίστροφο της περιόδου *T*. Για το λόγο αυτό $f\,T$=1)

Στην Άσκηση 3 βρήκαμε τη σχέση με την οποία υπολογίζουμε το πλάτος του κύματος σε μια συμβολή:

$$A_0 = 2A\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) \qquad (6)$$

Διάφραγμα χωρίς τη γυάλινη πλάκα στη μια σχισμή. Στην περίπτωση αυτή $\Delta\varphi_0 = 0$ και δέκατος σκοτεινός κροσσός θα προσδιορίζεται με τη σχέση:

$$\cos\left(k\frac{\Delta r}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k\frac{\Delta r_m}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta r_{10}}{2} = (2\times 10 + 1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$|\Delta r_{10}| = \frac{21}{2}\lambda \qquad (7) \qquad \text{(10ος σκοτεινός κροσσός συμβολής χωρίς γυάλινη πλάκα)}$$

Διάφραγμα με τη γυάλινη πλάκα στη μια σχισμή. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά αρχικής φάσης δίνεται από τη Σχέση (5) και η μηδενική τάξης συμβολής θα προκύπτει από τη Σχέση (6):

$$\cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad k\frac{\Delta r_m}{2} + \frac{\Delta\varphi_0}{2} = m\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta r_0}{2} + 2\pi\frac{\delta}{2\lambda}(n_g - 1) = 0\times\pi \quad \Rightarrow$$

$$|\Delta r_0| = \delta(n_g - 1) \qquad (8) \qquad \text{(θέση κεντρικού σημείου συμβολής με γυάλινη πλάκα)}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης: $|\Delta r_{10}| = |\Delta r_0|$, οπότε από τις Εξισώσεις (7) και (8) παίρνουμε:

$$\delta(n_g - 1) = \frac{21}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{21\lambda}{2(n_g - 1)} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{21\times 633\times 10^{-6}\ \text{mm}}{2\times(1{,}5 - 1)} \quad \Rightarrow$$

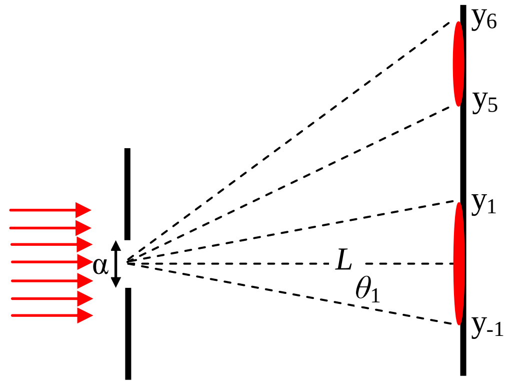
$$\delta = 0{,}0133\ \text{mm} \qquad \text{ή} \qquad \delta = 13{,}3\ \mu\text{m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6:
Σύμφωνο φως με μήκος κύματος λ=633 nm προσπίπτει σε μια μονή οπτική σχισμή που έχει εύρος b=0,25 mm. Η οθόνη πάνω στην οποία θα δημιουργηθεί η φωτεινή εικόνα της περίθλασης βρίσκεται σε απόσταση L=2,0 m από τη σχισμή.
α. Να υπολογίσετε το εύρος της κεντρικής φωτεινής περιοχής.
β. Να υπολογίσετε το εύρος της φωτεινής κηλίδας που οριοθετείται μεταξύ της $5^{ης}$ και της $6^{ης}$ σκοτεινής περιοχής.

ΛΥΣΗ

Στην περίθλαση σε σχισμή, τα σκοτεινά σημεία αντιστοιχούν σε γωνίες εκτροπής θ_m ως προς την αρχική διεύθυνση της δέσμης του LASER η οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\alpha \sin\theta_m = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$



όπου α είναι το εύρος της σχισμής. Επειδή το εύρος της σχισμής είναι πολλές φορές μεγαλύτερο από το μήκος κύματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρής γωνίας για τις γωνίες θ_m:

Αν γωνία $\theta \ll 1$ rad τότε $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ (σε rad)

Οπότε, από το διπλανό σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε την οποιαδήποτε γωνία θ_m:

$$\sin\theta_m \approx \tan\theta_m = \frac{y_m}{L}$$

Οπότε, η Σχέση (1) γίνεται: $\alpha \frac{y_m}{L} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad y_m = m\frac{\lambda L}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (1)$

α. Λόγω συμμετρίας, η απόσταση των δυο πρώτων συμμετρικών σκοτεινών σημείων της περίθλασης, η οποία είναι ίση με το εύρος της κεντρικής φωτεινής περιοχής, θα είναι ίση με $w_{11} = 2y_1$. Οπότε αν στη Σχέση (1) θέσουμε m = 1, τότε το εύρος της κεντρικής φωτεινής περιοχής θα είναι ίσο με:

$$w_{11} = 2y_1 = \frac{2\lambda L}{a} = \frac{2 \times (633 \times 10^{-9}\mathrm{m}) \times (2{,}0\mathrm{m})}{0{,}25 \times 10^{-3}\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad w_{11} = 0{,}010\ \mathrm{m} = 1{,}0\ \mathrm{cm}$$

β. Το εύρος Δy_m κάθε φωτεινής περιοχής θα είναι ίσο με: $\Delta y_m = y_m - y_{m-1}$. Οπότε:

$$\Delta y_m = m\frac{\lambda L}{a} - (m-1)\frac{\lambda L}{a} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_m = \frac{\lambda L}{a}$$

Το εύρος κάθε φωτεινής περιοχή, με εξαίρεση την κεντρική φωτεινή περιοχή, είναι σταθερό και ίσο με:

$$\Delta y_m = \frac{\lambda L}{a} = \frac{(633 \times 10^{-9} m) \times (2{,}0 m)}{0{,}25 \times 10^{-3} m} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_m = 0{,}0051\ m = 5{,}1\ cm$$

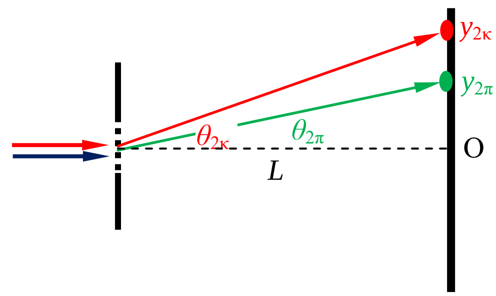
ΑΣΚΗΣΗ 7:
Ένας σπουδαστής έχει στη διάθεσή του ένα οπτικό φράγμα το οποίο περιλαμβάνει 5000 σχισμές ανά εκατοστό. Στο πείραμα συμβολής που θέλει να κάνει ο σπουδαστής χρησιμοποιούνται δυο δέσμες LASER, η μια στο κόκκινο χρώμα με μήκος κύματος λ_κ=632,9 nm και η άλλη στο μπλε με μήκος κύματος λ_π=420,0 nm. Η εικόνα συμβολής προβάλλεται σε οθόνη που βρίσκεται σε απόσταση L=1,00 m από το οπτικό φράγμα.

α. Να υπολογίσετε τη σταθερά του οπτικού φράγματος.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες εκτροπής θ_2 της δεύτερης τάξης συμβολής για το κόκκινο και για το μπλε χρώμα.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση (σε cm) των φωτεινών σημείων (κόκκινου και πράσινου) τα οποία αντιστοιχούν στη δεύτερη τάξη συμβολής.

ΛΥΣΗ



α. Με απλή μέθοδο των τριών: Αφού σε 1 cm υπάρχουν 5000 σχισμές, η κάθε σχισμή απέχει από τη γειτονική της απόσταση:

$$d = \frac{1}{5000}\ \text{cm} = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{cm} = 2{,}00 \times 10^{-6}\ \text{m} \quad \Rightarrow$$

β. Στη συμβολή από φράγμα, τα φωτεινά σημεία αντιστοιχούν σε γωνίες εκτροπής θ_m ως προς την αρχική διεύθυνση της δέσμης του LASER τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$d\sin\theta_m = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο που κάθετες πλευρές το διάστημα L και το διάστημα εκτροπής y_m (δηλαδή το $y_{2\kappa}$ ή το $y_{2\pi}$) βρίσκουμε το ημίτονο της γωνίας εκτροπής κάθε ακτίνας:

$$sin\theta_m = \frac{y_m}{\sqrt{y_m^2 + L^2}}$$

Οπότε, η Σχέση (1) γίνεται:

$$d\frac{y_m}{\sqrt{y_m^2 + L^2}} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad d^2\frac{y_m^2}{y_m^2 + L^2} = m^2\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 y_m^2 = m^2\lambda^2 y_m^2 + m^2\lambda^2 L^2 \quad \Rightarrow$$

$$d^2 y_m^2 - m^2\lambda^2 y_m^2 = m^2\lambda^2 L^2 \quad \Rightarrow \quad (d^2 - m^2\lambda^2) y_m^2 = m^2\lambda^2 L^2$$

$$y_m^2 = \frac{m^2\lambda^2 L^2}{d^2 - m^2\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad y_m = \sqrt{\frac{m^2\lambda^2 L^2}{d^2 - m^2\lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad y_m = \frac{m\lambda L}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}$$

Θέση $y_{2\kappa}$ του δεύτερου φωτεινού σημείου συμβολής του κόκκινου μήκους κύματος λ_κ = 632,9 nm:

$$y_{2\kappa} = \frac{2\lambda_\kappa L}{\sqrt{\alpha^2 - 2^2\lambda_\kappa^2}} = \frac{2 \times (632{,}9 \times 10^{-9}\text{m}) \times (1{,}00\ \text{m})}{\sqrt{(2{,}00 \times 10^{-6}\text{m})^2 - 4 \times (632{,}9 \times 10^{-9}\text{m})^2}} \quad \Rightarrow y_{2\kappa} = 0{,}82\ \text{m} = 82\ \text{cm}$$

Θέση $y_{2\kappa}$ του δεύτερου φωτεινού σημείου συμβολής του κόκκινου μήκους κύματος λ_κ = 420,0 nm:

$$y_{2\pi} = \frac{2\lambda_\pi L}{\sqrt{\alpha^2 - 2^2\lambda_\pi^2}} = \frac{2 \times (420{,}0 \times 10^{-9}\text{m}) \times (1{,}00\ \text{m})}{\sqrt{(2{,}00 \times 10^{-6}\text{m})^2 - 4 \times (420{,}0 \times 10^{-9}\text{m})^2}} \quad \Rightarrow y_{2\pi} = 0{,}42\ \text{m} = 42\ \text{cm}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!

Αν χρησιμοποιούσαμε την προσέγγιση μικρής γωνίας τότε η γωνία θ_m θα δίνονταν από τη σχέση:

$$\sin\theta_{\mathrm{m}} \approx \tan\theta_{\mathrm{m}} \approx \frac{y_{\mathrm{m}}}{L}$$

Οπότε, η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής θα έδινε για το διάστημα εκτροπής $y_{2\kappa}$ του δεύτερου φωτεινού σημείου του κόκκινου μήκους κύματος:

$$d\frac{y_{\mathrm{m}}}{L} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad y_m = m\frac{\lambda L}{d} \quad \Rightarrow \quad y_{2\kappa} = 2 \times \frac{(633{,}2 \times 10^{-9}m) \times (1{,}00m)}{2{,}00 \times 10^{-6}m} = 0{,}63\ \mathrm{m}$$

Όμως:

$$\tan\theta_{2k} = \frac{y_m}{L} = \frac{0{,}63\ \mathrm{m}}{1{,}00\ \mathrm{m}} = 0{,}63 \quad \Rightarrow \quad \theta_{2\kappa} = \arctan(0{,}63) = 32^0$$

Η γωνία $\theta_{2\kappa}$ είναι μια πολύ μεγάλη γωνία και ως εκ τούτου δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρής γωνίας.

γ. Απόσταση (σε cm) των φωτεινών σημείων (κόκκινου και πράσινου) τα οποία αντιστοιχούν στη δεύτερη τάξη συμβολής:

$$\Delta y_2 = y_{2\kappa} - y_{2\pi} = 82\ \mathrm{cm} - 42\ \mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta y_2 = 40\ \mathrm{cm}$$

ΑΚΗΣΗ 8

Επειδή ο ήχος είναι ένα κύμα, μπορούμε να φτιάξουμε ένα φράγμα περίθλασης από υλικό που απορροφά έντονα τον ήχο. Σε μια μεγάλου εμβαδού επίπεδη κατακόρυφη πλάκα από το υλικό αυτό ανοίγουμε μερικές κατακόρυφες παραλληλόγραμμες σχισμές. Όταν ηχητικά κύματα συχνότητας 10 kHz περνούν μέσα από το συγκεκριμένο φράγμα, ένας παρατηρητής που βρίσκεται 10 m μακριά από φράγμα περίθλασης και κινείται παράλληλα με αυτό ακούει ήχο σε απόσταση 1,4 m από το κεντρικό σημείο του φράγματος. Να υπολογίσετε την απόσταση των παραλληλόγραμμων εγκοπών του ηχητικού φράγματος. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s.

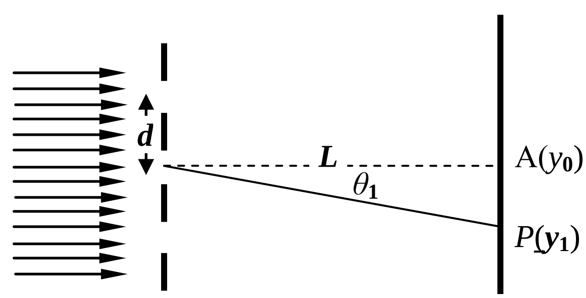
ΛΥΣΗ

Η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής σε φράγμα περίθλασης είναι:

$$d\sin\theta_m = m\lambda \qquad (1)$$

όπου d είναι η ζητούμενη απόσταση μεταξύ των διαδοχικών σχισμών, θ είναι η γωνία στην οποία συμβαίνει η ενισχυτική συμβολή m τάξης και $\lambda = \upsilon_{sound}/f$ = (340 m/s)/(10000 Hz) = 0,034 m.

Ο πρώτος δυνατός ήχος αντιστοιχεί την τάξης συμβολής m = 1 και θα ακούγεται στο σημείο P το οποίο αντιστοιχεί σε γωνία θ_1. Θα ισχύει:



$d\sin\theta_1 = \lambda \qquad (2)$

Στο σημείο P ο παρατηρητής ακούει τον πρώτο έντονο ήχο. Οπότε (AP) = y_1 = 1,4 m. Από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει κάθετες πλευρές τις αποστάσεις L = 10 m και (AP) =y_1 =1,4 m έχουμε:

$$sin\theta_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + L^2}}$$

Οπότε, η Εξίσωση (2) γράφεται:

$$d\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + L^2}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{y_1^2 + L^2}}{y_1}\lambda = \frac{\sqrt{(1{,}4\ \mathrm{m})^2 + (10\ \mathrm{m})^2}}{1{,}4\ m} \times (0{,}034\ \mathrm{m}) \quad \Rightarrow$$

$$d = 0{,}245\ \mathrm{m} = 24{,}5\ \mathrm{cm}$$

Προσέγγιση μικρής γωνίας

Επειδή $y_1 << L$ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μικρής γωνίας σύμφωνα με την οποία:

$$sin\theta_1 \approx tan\theta_1 = \frac{y_1}{L} = 0{,}14$$

Οπότε η Εξίσωση (2) γράφεται:

$$d\frac{y_1}{L} = \lambda \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{y_1}\lambda = \frac{10\ m}{1{,}4\ m} \times (0{,}034\ \mathrm{m}) = 0{,}243\ m = 24{,}3\ \mathrm{cm}$$

Η σχετική απόκλιση της τιμής που προέκυψε με την προσέγγιση μικρής γωνίας από την πραγματική τιμή d=24,5 είναι:

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{24{,}5cm - 24{,}3cm}{24{,}5cm} = 0{,}008 \quad ή \quad 0{,}8\%. \quad \text{Η απόκλιση αυτή είναι πολύ μικρή.}$$