ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΛΕΠΤΑ ΥΜΕΝΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1:
Να προσδιορίσετε το ελάχιστο δυνατό πάχος ενός αντιανακλαστικού λεπτού οπτικού υμενίου από φθοριούχο μαγνήσιο (M_gF_2) το οποίο έχει τοποθετηθεί πάνω στην επιφάνεια μιας επίπεδης γυάλινης πλάκας στην περίπτωση που το υμένιο αυτό ανακλά στον αέρα μόνο το μήκος το κύματος λ=550 nm. Δίνονται: οι δείκτες διάθλασης του γυαλιού n_g=1,52 του φθοριούχου μαγνησίου n_f=1,38.

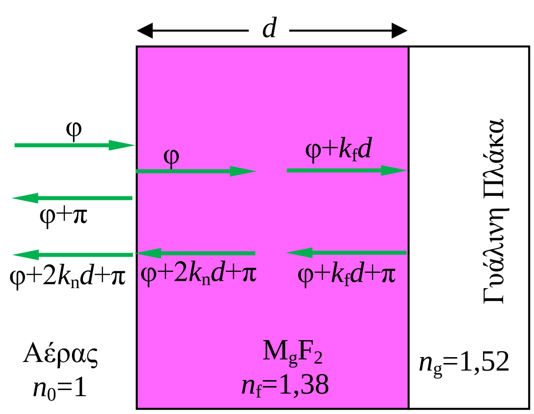
ΛΥΣΗ

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!
Όταν ένα κύμα μεταβαίνει από ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n_1 σε ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n_2, τότε το κύμα αυτό υφίσταται μερική ανάκλαση στο πρώτο υλικό και μερική μετάδοση στο δεύτερο υλικό. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α. $\boldsymbol{n_1>n_2}$: Το ανακλώμενο κύμα και το κύμα που μεταβαίνει στο δεύτερο υλικό έχουν την ίδια φάση με το προσπίπτον κύμα.

β. $\boldsymbol{n_1<n_2}$: Το ανακλώμενο κύμα έχει διαφορά φάσης π rad (180^0) με το προσπίπτον κύμα. Το κύμα που διέρχεται στο δεύτερο υλικό έχει την ίδια φάση με το προσπίπτον κύμα.

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα πολύ μικρό τμήμα του λεπτού υμενίου σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια του υμενίου προσπίπτει κάθετα ένα κύμα λευκού φωτός το οποίο αποτελείται από επί τα μέρους μήκη κύματος που αντιπροσωπεύουν τα γνωστά χρώματα του ουράνιου τόξου. Επειδή στο ανακλώμενο φως κυριαρχεί μόνο το πράσινο χρώμα με μήκος κύματος στον αέρα



λ=550 nm, τα υπόλοιπα μήκη κύματος υφίστανται είτε μερική ενισχυτική συμβολή ή ολική αποσβεστική συμβολή. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε μόνο το κύμα που έχει μήκος κύματος λ = 550 nm.

Αν το συγκεκριμένο αυτό κύμα προσπίπτει στην εξωτερική επιφάνεια του υμενίου με φάση φ, το κύμα αυτό εν μέρει εισέρχεται στο υμένιο με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλάται με φάση (φ+π).

Το κύμα που εισέρχεται στο υμένιο διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του υμενίου και φθάνει στη διαχωριστική επιφάνεια υμενίου-γυαλιού με φάση ($\varphi+k_f d$), όπου $k_f=2\pi/\lambda_f$ και $\lambda_f=\lambda/n_f$ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στο υμένιο (n_f = 1,38).

Στη διαχωριστική αυτή επιφάνεια το κύμα ανακλάται με αλλαγή φάσης κατά π rad ($\varphi+k_f d+\pi$).

Στη συνέχεια το κύμα που ανακλάται στη διαχωριστική επιφάνεια υμένιο-γυαλί διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του υμενίους και φθάνει στην εξωτερική επιφάνεια του υμενίου με φάση ($\varphi+k_f d+ k_f d+\pi = \varphi+2k_f d+\pi$).

Τέλος, το κύμα εξέρχεται από το υμένιο στον αέρα διατηρώντας τη φάση του ($\varphi+2k_f d+\pi$).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω δυο κύματα, το απευθείας ανακλώμενο με φάση ($\varphi_1 = \varphi + \pi$) και το κύμα το οποίο ανακλάστηκε από τη διαχωριστική επιφάνεια υμένιο-γυαλί και το οποίο έχει φάση ($\varphi_2 = \varphi +2k_f d+\pi$). Η διαφορά φάσης των δυο αυτών κυμάτων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi + 2k_\mathrm{f} d + \pi) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_\mathrm{f} d \qquad (1)$$

Για να συμβάλουν ενισχυτικά τα δυο ανακλώμενα κύματα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$$\Delta\varphi = 2k_\mathrm{f} d = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\mathrm{f} d = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad 2\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{f}} d = 2m\pi \quad \Rightarrow$$

$$d = 2m\frac{\lambda_\mathrm{f}}{4} \qquad (1)$$

Η ταχύτητα του κύματος φωτός με μήκος κύματος λ_p μέσα στο φθοριούχο μαγνήσιο (M_gF_2) είναι:

$$c_\mathrm{f} = \lambda_\mathrm{f} f = \frac{c}{n_\mathrm{f}} = \frac{\lambda f}{n_\mathrm{f}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\mathrm{f} = \frac{\lambda}{n_\mathrm{f}} \qquad (2)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και n_g είναι ο δείκτης διάθλασης του.

Από τις Σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$d = m\frac{\lambda}{2n_\mathrm{f}} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (3)$$

Το ελάχιστο δυνατό πάχος d_{min} του λεπτού υμενίου από M_gF_2 θα προκύψει από τη Σχέση (3) θέτοντας όπου m = 1, λ = 550 nm και n_f = 1,38:

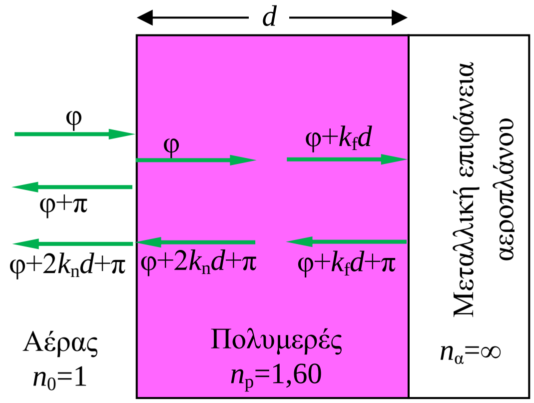
$$d_\mathrm{min} = \frac{\lambda}{2n_\mathrm{f}} = \frac{550\ \mathrm{nm}}{2 \times 1{,}38} \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{max} = 199\ \mathrm{nm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Κάποια στρατιωτική υπηρεσία σας ζήτησε να διερευνήσετε αν είναι δυνατόν τα αεροπλάνα της πολεμικής αεροπορίας να καταστούν αόρατα στα radar τα οποία εκπέμπουν κύματα με μήκος κύματος λ=2,5 cm. Εσείς ως καλός γνώστης της φυσικής των λεπτών υμενίων, σκεφτήκατε αμέσως ότι το ζητούμενο θα μπορούσε να υλοποιηθεί αν η επιφάνεια κάθε αεροπλάνου επικαλυπτότανε με ένα λεπτό στρώμα από ένα πολυμερές υλικό. Αν ο δείκτης διάθλασης του πολυμερούς υλικού είναι η=1,60, τότε να υπολογίσετε το απαιτούμενο πάχος του πολυμερούς υλικού που πρέπει να επικαλύψει την επιφάνεια του αεροπλάνου.

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα πολύ μικρό τμήμα της επιφάνειας του αεροπλάνου, μαζί με το πολυμερές υλικό, σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια του πολυμερούς υλικού προσπίπτουν κάθετα τα μικροκύματα που έχουν μήκος κύματος λ=2,5 cm.



Αν τα μικροκύματα προσπίπτουν στην εξωτερική επιφάνεια του πολυμερούς με φάση φ, το κύμα αυτό εν μέρει εισέρχεται στο υμένιο με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλάται με φάση (φ+π) (γιατί;).

Το κύμα που εισέρχεται στο πολυμερές υλικό διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του πολυμερούς και φθάνει στη μεταλλική επιφάνεια του αεροπλάνου με φάση ($\varphi+k_p d$), όπου $k_p=2\pi/\lambda_p$ και $\lambda_p=\lambda/n_p$ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στο πολυμερές υλικό (n_p = 1,60).

Στη μεταλλική επιφάνεια του αεροπλάνου το κύμα ανακλάται με αλλαγή φάσης κατά π rad ($\varphi+k_p d+\pi$) (γιατί;).

Στη συνέχεια το κύμα που ανακλάται στη μεταλλική επιφάνεια του αεροπλάνου διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του πολυμερούς και φθάνει στην εξωτερική επιφάνεια του πολυμερούς με φάση ($\varphi+k_p d+ k_p d+\pi = \varphi+2k_p d+\pi$).

Τέλος, το κύμα εξέρχεται από το πολυμερές υλικό στον αέρα διατηρώντας τη φάση του ($\varphi+2k_p d+\pi$).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω δυο κύματα, το απευθείας ανακλώμενο με φάση ($\varphi_1 = \varphi + \pi$) και το κύμα το οποίο ανακλάστηκε από τη μεταλλική επιφάνεια του αεροπλάνου και το οποίο έχει φάση ($\varphi_2 = \varphi +2k_p d+\pi$). Η διαφορά φάσης των δυο αυτών κυμάτων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\varphi + 2k_\mathrm{p} d + \pi\right) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_\mathrm{p} d \qquad (1)$$

Για να συμβάλουν αποσβεστικά τα δυο ανακλώμενα κύματα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι περιττό πολλαπλάσιο του π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$$\Delta\varphi = 2k_\mathrm{p} d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\mathrm{p} d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow$$

$$2\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{p}} d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad d = (2m+1)\frac{\lambda_\mathrm{p}}{4} \qquad m = 0, 1, 2, 3, .\ .\ .\ . \qquad (2)$$

Το λ_p είναι το μήκος κύματος των μικροκυμάτων μέσα στο πολυμερές υλικό που έχει δείχτη διάθλασης n_p=1,60.

Η ταχύτητα των μικροκυμάτων με μήκος κύματος λ_p μέσα στο πολυμερές υλικό είναι:

$$c_\mathrm{p} = \lambda_\mathrm{p} f = \frac{c}{n_\mathrm{p}} = \frac{\lambda f}{n_\mathrm{p}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\mathrm{f} = \frac{\lambda}{n_\mathrm{p}} \qquad (3)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και n_p είναι ο δείκτης διάθλασης του πολυμερούς υλικού. Από τις Σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$d = (2m+1)\frac{\lambda}{4n_{\mathrm{p}}} \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Το ελάχιστο δυνατό πάχος d_{min} του πολυμερούς υλικού με το οποίο πρέπει να καλυφθεί η επιφάνεια του αεροπλάνου θα προκύψει από την προηγούμενη σχέση θέτοντας όπου m=0, λ=2,5 cm και n_p = 1,6:

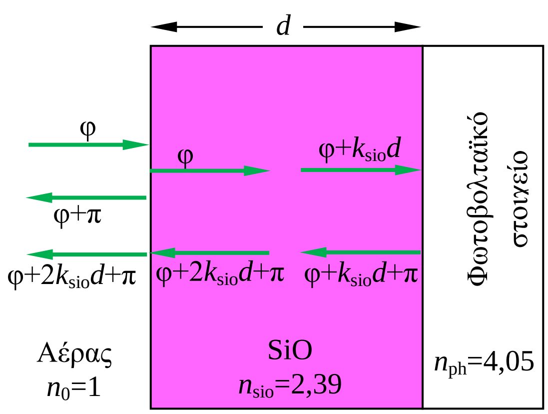
$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_{\mathrm{p}}} = \frac{2{,}5\ \mathrm{cm}}{4\times 1{,}60} \quad \Rightarrow \quad d_{\min} = 0{,}39\ \mathrm{cm} = 3{,}9\ \mathrm{mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Τα φωτοβολταϊκά στοιχεία που είναι κατασκευασμένα από άμορφο πυρίτιο είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ανάκλαση της ηλιακής ακτινοβολίας από αυτά. Για το σκοπό αυτό, η επιφάνεια των φωτοβολταϊκών στοιχείων επικαλύπτεται με λεπτό στρώμα οξειδίου του πυριτίου. Να υπολογίσετε το πάχος αυτού του λεπτού στρώματος δεδομένου ότι το μέσο μήκος κύματος της ηλιακής ακτινοβολίας είναι περίπου λ=550 nm. Δίνονται: δείκτης διάθλασης άμορφου πυριτίου η_{si}=4,05 και δείκτης διάθλασης οξειδίου του πυριτίου η_{sio}=2,39.

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα πολύ μικρό τμήμα της επιφάνειας του φωτοβολταϊκού στοιχείου, μαζί με το πολυμερές υλικό, σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια του πολυμερούς υλικού προσπίπτει κάθετα το ηλιακό φως με ένα μέσο μήκος κύματος στον αέρα λ=550 nm.



Αν το ηλιακό φως προσπίπτει στην επιφάνεια του SiO_2 με φάση φ, το κύμα αυτό εν μέρει εισέρχεται στο υμένιο με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλάται με φάση (φ+π) (γιατί;).

Το κύμα που εισέρχεται στο SiO_2 διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του SiO_2 και φθάνει στην επιφάνεια του φωτοβαολταϊκού στοιχείου με φάση ($\varphi+k_{sio}d$), όπου $k_{sio}=2\pi/\lambda_p$ και $\lambda_{sio}=\lambda/n_{sio}$ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στο SiO_2 (n_{sio} = 2,39).

Στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου το κύμα ανακλάται με αλλαγή φάσης κατά π rad ($\varphi+k_{sio}d+\pi$) (γιατί;).

Στη συνέχεια το κύμα που ανακλάται στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του SiO_2 και φθάνει στην εξωτερική επιφάνεια του SiO_2 με φάση ($\varphi+k_{sio}d+ k_{sio}d+\pi$ = $\varphi+2k_{sio}d+\pi$).

Τέλος, το κύμα εξέρχεται από το SiO_2 στον αέρα διατηρώντας τη φάση του ($\varphi+2k_{sio}+\pi$).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω δυο κύματα, το απευθείας ανακλώμενο με φάση ($\varphi_1 = \varphi + \pi$) και το κύμα, το οποίο ανακλάστηκε από την επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου, με φάση ($\varphi_2 = \varphi + 2k_{sio}d+\pi$). Η διαφορά φάσης των δυο αυτών κυμάτων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi + 2k_{\text{sio}}d + \pi) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_{\text{sio}}d \qquad (1)$$

Για να συμβάλουν αποσβεστικά τα δυο ανακλώμενα κύματα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι περιττό πολλαπλάσιο του π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$$\Delta\varphi = 2k_{\text{sio}}d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_{\text{sio}}d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow$$

$$2\frac{2\pi}{\lambda_{\text{sio}}}d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \qquad d = (2m+1)\frac{\lambda_{\text{sio}}}{4} \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (2)$$

Το λ_{sio} είναι το μήκος κύματος των μικροκυμάτων μέσα στο SiO_2 που έχει δείχτη διάθλασης n_{sio}=2,39.

Η ταχύτητα του κύματος φωτός με μήκος κύματος λ_{sio} μέσα στο SiO_2 είναι:

$$c_{\text{sio}} = \lambda_{\text{sio}}f = \frac{c}{n_{\text{sio}}} = \frac{\lambda f}{n_{\text{sio}}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\text{sio}} = \frac{\lambda}{n_{\text{sio}}} \qquad (3)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και n_{sio} είναι ο δείκτης διάθλασης του SiO_2. Από τις Σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$d = (2m+1)\frac{\lambda}{4n_{\text{sio}}} \qquad m = 0, 1, 2, 3, ...$$

Το ελάχιστο δυνατό πάχος d_{min} του SiO_2 με το οποίο πρέπει να καλυφθεί η επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου θα προκύψει από την προηγούμενη σχέση θέτοντας όπου m = 0, λ = 550 nm και n_{sio} = 2,39:

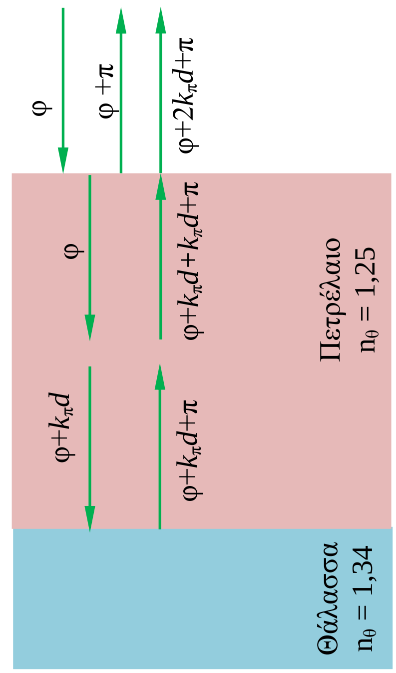
$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_{\text{sio}}} = \frac{550\ \text{nm}}{4 \times 2{,}39} \qquad \Rightarrow \quad d_{\min} = 57{,}5\ \text{nm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Μια κυκλική πετρελαιοκηλίδα που έχει ακτίνα R=0,50 km καλύπτει την επιφάνεια της θάλασσας. Η υπηρεσία προστασία του περιβάλλοντος σας ζήτησε να υπολογίσετε την ποσότητα πετρελαίου σε κυβικά μέτρα (σε m^3) της πετρελαιοκηλίδας. Μετά από μελέτη σκεφτήκατε ότι το στρώμα της πετρελαιοκηλίδας θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα λεπτό υμένιο και ότι θα είναι δυνατή η μέτρηση του πάχους της συμβολομετρικά. Για το λόγο αυτό ναυλώσατε ένα ελικόπτερο και έχοντας στη διάθεσή σας ένα φασματόμετρο κατευθυνθήκατε πάνω από την πετρελαιοκηλίδα. Μεταβάλλοντας το μήκος κύματος του φασματόμετρου διαπιστώσατε ότι το πρώτο μέγιστο που καταγράφει αυτό είναι στο μήκος κύματος λ=650 nm. Από τη βιβλιογραφία βρήκατε ότι οι δείκτες διάθλασης του πετρελαίου και του θαλασσινού νερού είναι η_π=1,25 και η_θ=1,34, αντίστοιχα. Ποιος είναι ο όγκος του πετρελαίου που υπάρχει στην πετρελαιοκηλίδα;

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα πολύ μικρό τμήμα της επιφάνειας της θάλασσας, μαζί με την πετρελαιοκηλίδα, σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια της πετρελαιοκηλίδας προσπίπτει κάθετα το ηλιακό φως. Αν το ηλιακό φως προσπίπτει στην επιφάνεια της πετρελαιοκηλίδας με φάση φ, το κύμα αυτό εν μέρει εισέρχεται στην πετρελαιοκηλίδα με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλάται με φάση (φ+π) (γιατί;).



Το κύμα που εισέρχεται στην πετρελαιοκηλίδα διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d αυτής και φθάνει στην επιφάνεια της θάλασσας με φάση (φ+$k_\theta d$), όπου k_θ=2π/λ_θ και λ_θ=λ/n_θ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στην πετρελαιοκηλίδα (n_θ = 1,25).

Στην επιφάνεια της θάλασσας το κύμα ανακλάται με αλλαγή φάσης κατά π rad (φ+$k_\pi d$+π) (γιατί;).

Στη συνέχεια το κύμα που ανακλάται στην επιφάνεια θάλασσας διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d της πετρελαιοκηλίδας και

φθάνει στην εξωτερική επιφάνεια αυτής με φάση:

(φ+$k_\pi d$+ $k_\pi d$+π = φ+2$k_\pi d$+π).

Τέλος, το κύμα εξέρχεται από την πετρελαιοκηλίδα στον αέρα διατηρώντας τη φάση του (φ+2k_π+π).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω δυο κύματα, το απευθείας ανακλώμενο με φάση (φ_1 = φ + π) και το κύμα, το οποίο ανακλάστηκε από την επιφάνεια της θάλασσας, με φάση (φ_2 = φ +2$k_\pi d$+π). Η διαφορά φάσης των δυο αυτών κυμάτων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi + 2k_\pi d + \pi) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_\pi d \qquad (1)$$

Επειδή το φασματοφωτόμετρο μετρά μέγιστη ένταση στο μήκος κύματος λ = 550 nm, σε αυτό το μήκος κύματος η διαφορά των δυο ανακλώμενων κυμάτων πρέπει να είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$$\Delta\varphi = 2k_\pi d = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\pi d = 2m\pi \quad \Rightarrow$$

$$2\frac{2\pi}{\lambda_\pi} d = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad d = m\frac{\lambda_\pi}{2} \quad m = 1, 2, 3, .\ .\ .\ . \qquad (2)$$

Το λ_π είναι το μήκος κύματος του κύματος φωτός μέσα στην πετρελαιοκηλίδα που έχει δείκτη διάθλασης n_π=1,25.

Η ταχύτητα του κύματος φωτός με μήκος κύματος λ_π μέσα στην πετρελαιοκηλίδα είναι:

$$c_\pi = \lambda_\pi f = \frac{c}{n_\pi} = \frac{\lambda f}{n_\pi} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pi = \frac{\lambda}{n_\pi} \qquad (3)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και n_π είναι ο δείκτης διάθλασης της πετρελαιοκηλίδας. Από τις Σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$d = m\frac{\lambda}{2n_\pi} \quad m = 1, 2, 3, .\ .\ .\ .$$

Το ελάχιστο δυνατό πάχος $d_{\min}$ της πετρελαιοκηλίδας θα προκύψει από την προηγούμενη σχέση θέτοντας όπου m=1, λ = 650 nm και n_π = 1,25:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n_\pi} = \frac{650\ \text{nm}}{2 \times 1{,}25} \quad \Rightarrow \quad d_{\min} = 260\ \text{nm} = 2{,}60 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

Ο ελάχιστος όγκος V της πετρελαιοκηλίδας είναι:

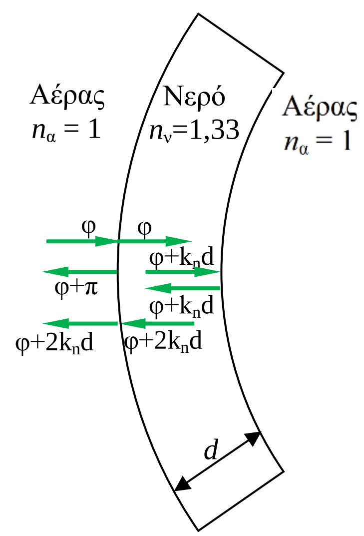
$$V_{min} = \pi R^2 d_{min} = 3{,}14 \times (15500\ m)^2 (2{,}60 \times 10^{-7} m) \quad \Rightarrow \quad V_{min} = 196\ m^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Λευκό φως προσπίπτει κάθετα πάνω στην επιφάνεια μιας σαπουνόφουσκας. Παρατηρούμε ότι η σαπουνόφουσκα αποκτά χρώμα πράσινο του οποίου το μήκος κύματος είναι λ=533 nm. Δεδομένου ότι ο δείκτη διάθλασης της σαπουνόφουσκας n_σ είναι περίπου ίσος με το δείκτη διάθλασης του νερού n_ν, δηλαδή $n_\sigma \approx n_\nu = 1{,}33$, να υπολογίσετε το πάχος του τοιχώματος της σαπουνόφουσκας σε nm και σε mm.

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τμήμα της σαπουνόφουσκας σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας προσπίπτει κάθετα ένα κύμα λευκού φωτός το οποίο αποτελείται από επί μέρους μήκη κύματος που αντιπροσωπεύουν τα γνωστά χρώματα του ουράνιου τόξου. Επειδή στο ανακλώμενο φως κυριαρχεί το πράσινο χρώμα, τα υπόλοιπα μήκη κύματος υφίστανται είτε μερική ενισχυτική συμβολή ή ολική αποσβεστική συμβολή. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε μόνο το κύμα που έχει μήκος κύματος λ = 533 nm.



Αν το συγκεκριμένο αυτό κύμα προσπίπτει στην εξωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας με φάση φ, το κύμα αυτό εν μέρει εισέρχεται στο τοίχωμα της σαπουνόφουσκας με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλάται με φάση (φ+π) (γιατί;).

Το κύμα που εισέρχεται στο τοίχωμα διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d και φθάνει στην εσωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας με φάση ($\varphi+k_\nu d$), όπου $k_\nu=2\pi/\lambda_\nu$ και $\lambda_\nu=\lambda/n_\nu$ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στο τοίχωμα της σαπουνόφουσκας (n_ν = 1.33).

Το κύμα ανακλάται στην εσωτερική επιφάνεια του τοιχώματος διατηρώντας τη φάση του ($\varphi+k_\nu d$) (γιατί;).

Στη συνέχεια το κύμα διανύει διαδρομή ίση με το πάχος d του τοιχώματος και φθάνει στην εξωτερική επιφάνεια με φάση ($\varphi+k_\nu d+ k_\nu d = \varphi+2k_\nu d$).

Τέλος, το κύμα εξέρχεται από το τοίχωμα της σαπουνόφουσκας διατηρώντας τη φάση του ($\varphi+2k_\nu d$) (γιατί;).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω δυο κύματα, το απευθείας ανακλώμενο με φάση $\varphi_1 = \varphi + \pi$ και το κύμα το οποίο ανακλάστηκε από την εσωτερική επιφάνεια του τοιχώματος και το οποίο έχει φάση $\varphi_2 = \varphi +2k_\nu d$. Η διαφορά φάσης των δυο αυτών κυμάτων είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi + 2k_\nu d) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_\nu d - \pi \qquad (1)$$

Για να συμβάλουν ενισχυτικά τα δυο ανακλώμενα κύματα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$\Delta\varphi = 2k_\nu d - \pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\nu d = 2m\pi + \pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\nu d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow$

$$2\frac{2\pi}{\lambda_\nu}d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad d = (2m+1)\frac{\lambda_\nu}{4} = (2m+1)\frac{\lambda}{4n_\nu} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Το ελάχιστο δυνατό πάχος $d_{\min}$ του τοιχώματος της σαπουνόφουσκας θα προκύψει θέτοντας m=0:

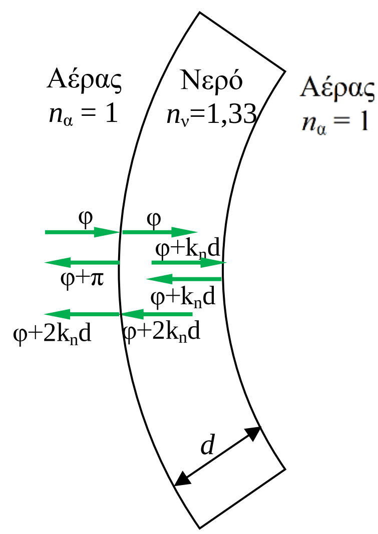
$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_\nu} = \frac{533\ nm}{4 \times 1{,}33} \quad \Rightarrow \quad d_{\min} = 100 \text{ nm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6:

Λευκό φως προσπίπτει κάθετα πάνω στην επιφάνεια μιας σαπουνόφουσκας της οποοίας το τοίχωμα χει πάχος d = 625 nm. Δεδομένου ότι ο δείκτη διάθλασης της σαπουνόφουσκας n_σ είναι περίπου ίσος με το δείκτη διάθλασης του νερού n_ν, δηλαδή $n_\sigma \approx n_\nu = 1{,}33$, να προσδιορίσετε τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος τα οποία ανακλώνται από την επιφάνεια της σαπουνόφουσκας.

ΛΥΣΗ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τμήμα της σαπουνόφουσκας σε πολύ μεγάλη μεγέθυνση. Στην εξωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας προσπίπτει κάθετα ένα κύμα λευκού φωτός το οποίο αποτελείται από επί μέρους μήκη κύματος που αντιπροσωπεύουν τα γνωστά χρώματα του ουράνιου τόξου.



Τα επί μέρους κύματα προσπίπτουν στην εξωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας με φάση φ, τα κύμα αυτά εν μέρει εισέρχονται στο τοίχωμα της σαπουνόφουσκας με την ίδια φάση φ και εν μέρει ανακλώνται με φάση (φ+π) (γιατί;).

Τα κύματα που εισέρχονται στο τοίχωμα διανύουν διαδρομή ίση με το πάχος d και φθάνουν στην εσωτερική επιφάνεια της σαπουνόφουσκας με φάση ($\varphi + k_\nu d$), όπου $k_\nu = 2\pi/\lambda_\nu$ και $\lambda_\nu = \lambda/n_\nu$ είναι ο κυματαριθμός και το μήκος κύματος του κύματος μέσα στο τοίχωμα της σαπουνόφουσκας ($n_\nu = 1{,}33$).

Τα κύματα ανακλώνται στην εσωτερική επιφάνεια του τοιχώματος διατηρώντας τη φάση τους ($\varphi + k_\nu d$) (γιατί;).

Στη συνέχεια τα κύματα διανύουν διαδρομή ίση με το πάχος d του τοιχώματος και φθάνουν στην εξωτερική επιφάνεια με φάση ($\varphi + k_\nu d + k_\nu d = \varphi + 2k_\nu d$).

Τέλος, τα κύματα εξέρχονται από το τοίχωμα της σαπουνόφουσκας διατηρώντας τη φάση τους ($\varphi + 2k_\nu d$) (γιατί;).

Από την εξωτερική επιφάνεια φεύγουν προς τα έξω τα κύματα, που ανακλάστηκαν απευθείας με φάση $\varphi_1 = \varphi + \pi$ και τα κύματα τα οποία ανακλάστηκαν από την εσωτερική επιφάνεια του τοιχώματος και τα οποία έχουν φάσεις $\varphi_2 = \varphi + 2k_\nu d$. Η διαφορά φάσης των δυο ανακλώμενων ομάδων κυμάτων φωτός είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi + 2k_\nu d) - (\varphi + \pi) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2k_\nu d - \pi \qquad (1)$$

Για να συμβάλουν ενισχυτικά τα ανακλώμενα κύματα πρέπει η διαφορά φάσης να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (1) γίνεται:

$\Delta\varphi = 2k_\nu d - \pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\nu d = 2m\pi + \pi \quad \Rightarrow \quad 2k_\nu d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow$

$2\dfrac{2\pi}{\lambda_\nu} d = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{\lambda_m/n_\nu} d = (2m+1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = \dfrac{4n_\nu d}{2m+1} \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$

$\lambda_m = \dfrac{4 \times 1{,}33 \times 625\text{nm}}{2m+1} = \dfrac{3325\text{ nm}}{2m+1} \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$

Τα ανακλώμενα μήκη κύματος που υφίστανται ενισχυτική συμβολή είναι:

$\lambda_0 = \dfrac{3325\text{ nm}}{2 \times 0 + 1} = 3325\text{ nm}$ (είναι στο υπέρυθρο και απορίπτεται)

$\lambda_1 = \dfrac{3325\text{ nm}}{2 \times 1 + 1} = 1108\text{ nm}$ (είναι στο υπέρυθρο και απορίπτεται)

$\lambda_2 = \dfrac{3325\text{ nm}}{2 \times 2 + 1} = 665\text{ nm}$ (κόκκινο χρώμα)

$\lambda_3 = \dfrac{3325\text{ nm}}{2 \times 3 + 1} = 475\text{ nm}$ (μπλε χρώμα)

$\lambda_4 = \dfrac{3325\text{ nm}}{2 \times 1 + 1} = 369\text{ nm}$ (είναι στο υπεριώδες και απορίπτεται)