ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ
ΜΑΖΑΣ – ΘΕΣΗΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ – ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Α. Υπολογισμός της θέσης του κέντρου μάζας συστημάτων που αποτελούνται από απλά διακριτά μέρη.

Τα απλά διακριτά μέρη μπορεί να είναι ομογενείς σφαίρες ή ομογενείς ράβδοι ή ομογενείς παραλληλόγραμμες επιφάνειες. Το σύστημα μπορεί να αποτελείται από ένα ή και περισσότερα διακριτά μέρη με μάζες m_1, m_2, m_3, m_4, ... Στις περιπτώσεις αυτές:

- Ορίζουμε ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y).
- Προσδιορίζουμε τα κέντα μάζας των διακριτών μερών τα οποία ταυτίζονται με τα γεωμετρικά μέση των μερών αυτών (στη σφαίρα είναι το κέντρο της σφαίρας, στη ράβδο είναι το μέσο της ράβδου και στο παραλληλόγραμμο είναι η τομή των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.
- Αναφορικά με το επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων, προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), . . . των αντίστοιχων κέντρων μαζών.
- Κάθε διακριτό μέρος i αντικαθίσταται με ένα υλικό σημείο το οποίο έχει μάζα ίση με τη μάζα m_i του αντίστοιχου διακριτού μέρους.
- Κάθε υλικό σημείο i τοποθετείται στη θέση όπου βρίσκεται το κέντρο μάζας του αντίστοιχου διακριτού μέρους. Η συνολική μάζα του συστήματος θα είναι ίση με:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n$$

- Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος, τότε χρησιμοποιούμε τις εξής σχέσεις:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n\right)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \frac{1}{m}\left(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots\ldots + m_ny_n\right)$$

Στην παραπάνω μεθοδολογία στηρίζεται η λύση των ασκήσεων 1 έως και 7.

Β. Υπολογισμός της μάζας, της θέσης του κέντρο μάζας και της ροπής αδράνειας μονοδιάστατων κατασκευών.

- Ως βολικό σύστημα συντεταγμένων επιλέγουμε εκείνο στο οποίο η αρχή ταυτίζεται με το αριστερό άκρο της κατασκευής και ο άξονας x συμπίπτει με αυτή καθεαυτή την κατασκευή.
- Διαιρούμε την κατασκευή σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dx και μάζας dm.
- Για να υπολογίσουμε τη μάζα m, τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) του διανύσματος της θέσης του κέντρου μάζας και τη ροπή αδράνειας I_y της κατασκευής, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$m = \int_m dm \qquad x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x\,dm \qquad I_y = \int_m x^2\,dm$$

- Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων πρέπει να εκφράσουμε τη στοιχειώδη μάζα dm συναρτήσει της διάστασης x. Για να γίνει αυτό πρέπει να μας δίνεται η γραμμική πυκνότητα μάζας μ της κατασκευής, η οποία εν γένει μπορεί να είναι μια γνωστή συνάρτηση του x, δηλαδή $\mu=\mu(x)$. Από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας μάζας:

  $$\mu(x) = \frac{dm}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad dm = \mu(x)\,dx$$

  οπότε τα παραπάνω ολοκληρώματα ανάγονται σε ολοκληρώματα μιας μεταβλητής:

  $$m = \int_{x1}^{x2} \mu(x)\,dx \qquad x_{cm} = \frac{1}{m}\int_{x1}^{x2} x\,\mu(x)\,dx \qquad I_y = \int_{x1}^{x2} x^2 \mu(x)\,dx$$

- Μόνο στην περίπτωση που η κατασκευή είναι ομογενής, το κέντρο μάζας της θα βρίσκεται στο μέσο αυτής.

Με τη μεθοδολογία λύνεται η άσκηση 8.

Γ. Υπολογισμός της μάζας, της θέσης του κέντρο μάζας και της ροπής αδράνειας δισδιάστατων κατασκευών.

(α) Επιλογή συστήματος συντεταγμένων:

- Αν η κατασκευή περιέχει δυο κάθετες πλευρές, τότε το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε ως βολικό ταυτίζεται με τις πλευρές αυτές.
- Αν η κατασκευή έχει άξονα συμμετρίας, τότε ο άξονας συμμετρίας πρέπει να επιλεγεί και ως ένας άξονας συντεταγμένων. Στην περίπτωση αυτή, το κέντρο μάζας θα βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας. Οπότε, αν ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας y τότε πρέπει να υπολογίσουμε μόνο τη συνιστώσα y_{cm} της θέσης του κέντρο μάζας. Ομοίως, αν ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας x, τότε πρέπει να υπολογίσουμε μόνο τη συνιστώσα x_{cm} της θέσης του κέντρο μάζας (Ασκήσεις 11 και 12).

(β) Οι περισσότερες κατασκευές περιέχουν μια ευθύγραμμη πλευρά. Η πλευρά αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ένας άξονας συντεταγμένων, συνήθως ως άξονας x. Στη γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει καμιά ευθύγραμμη πλευρά, μπορούμε να διαιρέσουμε την κατασκευή σε επιμέρους τμήματα στα οποία θα υπάρχουν ευθύγραμμες πλευρές.

(γ) Συνήθως δίνονται, η επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ και η γεωμετρία της κατασκευής η οποία μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση y=f(x). Στην περίπτωση αυτή, αντιστρέφοντας τη συνάρτηση y=f(x) προσδιορίζουμε τη συνάρτηση x=g(y):

(δ) Για να υπολογίσουμε τη μάζα, τη συνιστώσα x_{cm} του διανύσματος της θέσης του κέντρου μάζας και τη ροπή αδράνειας I_y της κατασκευής, χρησιμοποιούμε τις εξής σχέσεις:

$$m = \int_m dm \qquad x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x\,dm \qquad I_y = \int_m x^2\,dm$$

- Στα παραπάνω ολοκληρώματα πρέπει η στοιχειώδης μάζα να εκφραστεί συναρτήσει του x. Για να γίνει αυτό διαιρούμε την επίπεδη κατασκευή σε στοιχειώδεις λωρίδες παράλληλες προς τον άξονα y που έχουν πάχος dx. Το στοιχειώδες εμβαδό dA_x κάθε στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_x = y\,dx \quad \Rightarrow \quad dA_x = f(x)\,dx$$

Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας μάζας έχουμε:

$$dm = \sigma dA_x \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma\, f(x)\,dx$$

Οπότε, τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται:

$$m = \int_{x1}^{x2} \sigma\, f(x)\,dx \qquad x_{cm} = \frac{1}{m}\int_{x1}^{x2} x\sigma\, f(x)\,dx \qquad I_y = \int_{x1}^{x2} x^2\sigma\, f(x)\,dx$$

- Μόνο στην περίπτωση που η κατασκευή είναι ομογενής, η επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ έχει σταθερή τιμή και ως εκ τούτου η παράμετρος αυτή βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα.

(ε) Για να υπολογίσουμε τη συνιστώσα y_{cm} του διανύσματος της θέσης του κέντρου μάζας και τη ροπή αδράνειας I_{x} της κατασκευής ως προς τον άξονα y, χρησιμοποιούμε τις εξής σχέσεις:

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_m y\,dm \qquad I_x = \int_m y^2\,dm$$

- Στα παραπάνω ολοκληρώματα πρέπει η στοιχειώδης μάζα να εκφραστεί συναρτήσει του y. Για να γίνει αυτό διαιρούμε την επίπεδη κατασκευή σε στοιχειώδεις λωρίδες παράλληλες προς τον άξονα x που έχουν πάχος dy. Το στοιχειώδες εμβαδό dA_y κάθε στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_y = x\,dy \quad \Rightarrow \quad dA_y = g(y)\,dy$$

Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας μάζας έχουμε:

$$dm = \sigma dA_y \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma\, g(y)\,dy$$

Οπότε, τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται:

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_{y1}^{y2} y\sigma\, g(y)\,dy \qquad I_y = \int_{y1}^{y2} y^2\sigma\, g(y)\,dy$$

- Μόνο στην περίπτωση που η κατασκευή είναι ομογενής, η επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ έχει σταθερή τιμή και ως εκ τούτου η παράμετρος αυτή βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα.

Με τη μεθοδολογία Γ λύνονται οι όλες οι ασκήσεις που ακολουθούν εκτός της Άσκησης 8.

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Τρεις μάζες m_1=200 g, m_2=100 g και m_3=150 g οι οποίες βρίσκονται πάνω σε μια επίπεδη οριζόντια επιφάνεια με συντεταγμένες (*x*, *y*). Οι συντεταγμένες των μαζών είναι:

Συντεταγμένες μαζών m_1: (x_1, y_1)= (10.0cm, 5.0cm)
m_2: (x_2, y_2)= (5.0cm, 6.0cm)
m_3: (x_3, y_3)= (15.0cm, 10.0cm)

Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες (x_{cm}, y_{cm}) του κέντρου μάζας του συστήματος των τριών μαζών.

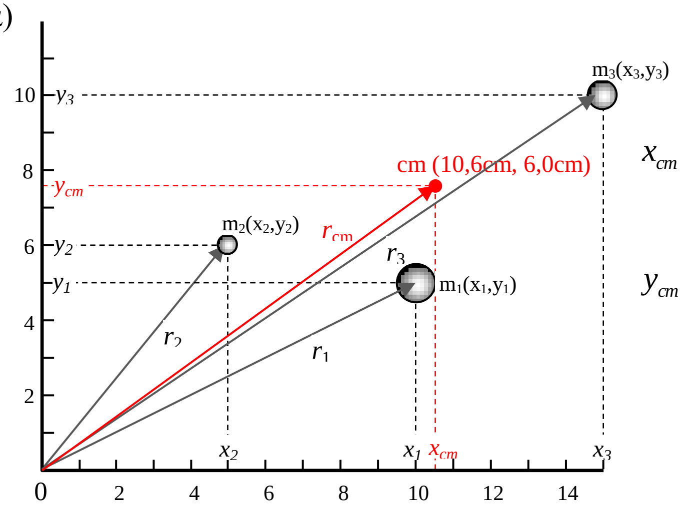
β) Τη ροπή αδράνειας I_z του συστήματος των τριών μαζών όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένος και είναι κάθετος στο επίπεδο (*x*, *y*). Ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα *z* του συστήματος συντεταγμένων.

γ) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών μαζών όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *x*.

δ) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών μαζών όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *y*.

ΛΥΣΗ

(α)



Σχήμα 1

$m = m_1+m_2+m_3$ = 200g+100g+150g

m =450 g

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\right)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{1}{m}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3\right)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{450g}\left[(200g)(10{,}0cm) + (100g)(5{,}0cm) + (150g)(15{,}0cm)\right] \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = 10{,}6\,cm$$

$$y_{cm} = \frac{1}{450g}\left[(200g)(5{,}0cm) + (100g)(6{,}0cm) + (150g)(10{,}0cm)\right] \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 6{,}9\,cm$$

(β) $$I_0 = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2\right) \qquad (1.1)$$

Όπου, r_1, r_2 και r_3 είναι οι αποστάσεις των μαζών m_1, m_2 και m_3 από τον άξονα περιστροφής ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι κάθετος στο επίπεδο (*x*, *y*) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Από το σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = (10{,}0cm)^2 + (5{,}0cm)^2 = 125{,}0\,cm^2$$

$$r_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = (5{,}0cm)^2 + (6{,}0cm)^2 = 61{,}0\,cm^2$$

$$r_3^2 = x_3^2 + y_3^2 = (15{,}0cm)^2 + (10{,}0cm)^2 = 325{,}0\,cm^2$$

Οπότε η Σχέση (1.1) δίνει:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2\right) = (200g)(125{,}0cm^2) + (100g)(61{,}0cm^2) + (150g)(325{,}0cm^2)$$

$$I_0 = 79800\, g\, cm^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = 0{,}798\, kg\, m^2$$

(γ) Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ενός συστήματος μαζών ως προς άξονα περιστροφής πρέπει να γνωρίζουμε την απόσταση κάθε μάζας από τον συγκεκριμένο άξονα. Στην προκειμένη περίπτωση, ο άξονας περιστροφής είναι ο άξονας x και οι αποστάσεις των μαζών m_1, m_2 και m_3 από τον άξονα αυτό είναι αντίστοιχα οι τεταγμένες $r_1=y_1$, $r_2=y_2$ και $r_3=y_3$. Οπότε, η Σχέση (1,1) δίνει:

$$I_x = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2\right) = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_x = (200g)(5{,}0cm)^2 + (100g)(6{,}0cm)^2 + (150g)(10{,}0cm)^2 \quad \Rightarrow \quad I_x = 3100\, g\, cm^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_x = 0{,}31 kg\, m^2$$

(δ) Στην προκειμένη περίπτωση, ο άξονας περιστροφής είναι ο άξονας y και οι αποστάσεις των μαζών m_1, m_2 και m_3 από τον άξονα αυτό είναι αντίστοιχα οι τεταγμένες $r_1=x_1$, $r_2=x_2$ και $r_3=x_3$. Οπότε, η Σχέση (1,1) δίνει:

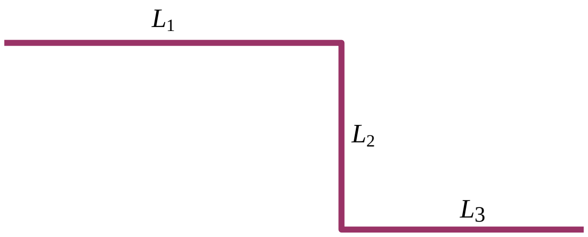
$$I_y = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2\right) = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_y = (200g)(10{,}0cm)^2 + (100g)(5{,}0cm)^2 + (150g)(15{,}0cm)^2 \quad \Rightarrow \quad I_y = 475\, g\, cm^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_y = 0{,}475 kg\, m^2$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2:</u>

Τρεις ομογενείς μεταλλικοί ράβδοι με μήκη L_1=1.0m, L_2=0.50m και L_3=0.75m και με διατομή σχετικά πολύ μικρή, έχουν γραμμική πυκνότητα μάζας μ=1.56 kg/m και είναι συναρμολογημένοι όπως το παρακάτω σχήμα:



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της παραπάνω μεταλλικής κατασκευής.

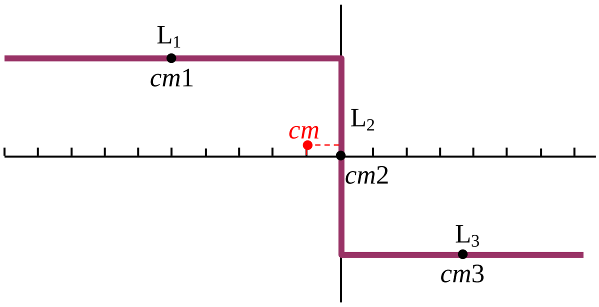
<u>ΛΥΣΗ</u>

<u>1ος Τρόπος</u>

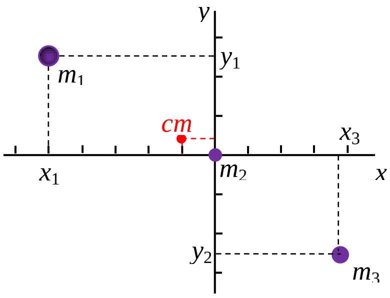
Αν m_1, m_2 και m_3 είναι οι μάζες των ράβδων με μήκη L_1, L_2 και L_3, αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας μάζας υπολογίζουμε τη μάζα κάθε ράβδους:

$$
\left.\begin{aligned}
m_1 &= \mu L_1 = (1{,}56 kg/m)(1{,}0 m) \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1{,}6\, kg \\
m_2 &= \mu L_2 = (1{,}56 kg/m)(0{,}50 m) \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0{,}78\, kg \\
m_3 &= \mu L_3 = (1{,}56 kg/m)(0{,}75 m) \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1{,}2\, kg
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{m=3,58 kg}
$$

Η κάθε μια από τις τρεις ράβδους μπορεί να αντικατασταθεί με ένα υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας της και του οποίου η μάζα είναι ίση με τη μάζα της αντίστοιχης ράβδου. Επειδή οι ράβδοι είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο μέσο αυτών. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των τριών ράβδων χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων. Από τα άπειρα συστήματα συντεταγμένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση του προβλήματος επιλέγουμε το πιο βολικό. Στην προκειμένη περίπτωση, ένα σύστημα συντεταγμένων θεωρείται βολικό όταν η αρχή των αξόνων του βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας μιας εκ των τριών ράβδων, π.χ. της δεύτερης ράβδου (βλέπε Σχήμα 2α).



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

Οι συντεταγμένες της μάζας m$_1$ είναι: (x_1, y$_1$)=(–0,50m, 0,25m)
Οι συντεταγμένες της μάζας m$_2$ είναι: (x_2, y$_2$)=(0,00m, 0,00m)
Οι συντεταγμένες της μάζας m$_1$ είναι: (x_3, y$_3$)=(0,375m, –0,25m)
Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3{,}58 kg}\left((1{,}6 kg)(-0{,}50 m) + (0{,}78 kg)(0{,}0 m) + (1{,}2 kg)(0{,}375 m)\right) \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = -0{,}10\, m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3\right) =$$

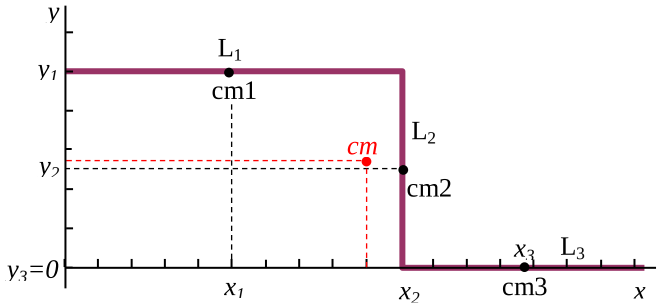
$$= \frac{1}{3{,}58 kg}\left((1{,}6 kg)(0{,}25 m) + (0{,}78 kg)(0{,}0 m) + (1{,}2 kg)(-0{,}25 m)\right) \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 0{,}028\, m$$

<u>2^{ος} Τρόπος</u>

Παίρνουμε ως σύστημα συντεταγμένων το σύστημα στο οποίο *x*-άξονας εφάπτεται στη ράβδο που έχει μήκος L_3=0,75 m και ο *y*-άξονας διέρχεται από το αριστερό άκρο της ράβδου που έχει μήκος L_1=1,0 m (βλέπε Σχήμα 2γ):

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων:
Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας *cm*1 της μάζας m_1 είναι: (x_1, y$_1$)=(0,50m, 0,50m)
Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας *cm*2 της μάζας m_2 είναι: (x_2, y$_2$)=(1,0m, 0,25m)

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας cm3 της μάζας m_1 είναι: (x_3, y_3)=(1,375m, 0,00m)



Σχήμα 2γ

Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) =$$

$$= \frac{1}{3{,}58kg}\left((1{,}6kg)(0{,}50m) + (0{,}78kg)(1{,}0m) + (1{,}2kg)(1{,}375m)\right) \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = 0{,}90\,m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) =$$

$$= \frac{1}{3{,}58kg}\left((1{,}6kg)(0{,}50m) + (0{,}78kg)(0{,}25m) + (1{,}2kg)(0{,}00m)\right) \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 0{,}278\,m$$

Και με τους δύο τρόπους υπολογισμού της θέσης του κέντρου μάζας, η σχετική θέση του κέντρο μάζας σε σχέση με το σύστημα των τριών μαζών είναι η ίδια.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Τρεις μεταλλικές ράβδοι με μήκη L_1=40cm, L_2=30cm και L_3=50cm και με διατομή σχετικά πολύ μικρή, είναι ομογενείς και έχουν γραμμική πυκνότητα μάζας μ=1.56 kg/m και είναι συναρμολογημένοι σε σχήμα ορθογωνίου τριγώνου. Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

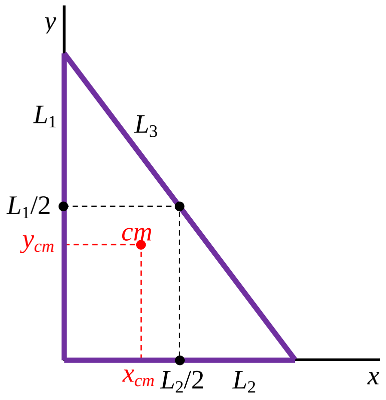
β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΛΥΣΗ

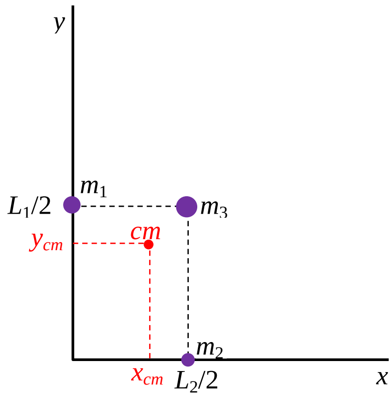
(α)
$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \mu L_1 = (1{,}56kg/m)(0{,}400m) &&\Rightarrow\quad m_1 = 0{,}624\,kg \\ m_2 &= \mu L_2 = (1{,}56kg/m)(0{,}300m) &&\Rightarrow\quad m_1 = 0{,}468\,kg \\ m_3 &= \mu L_3 = (1{,}56kg/m)(0{,}500m) &&\Rightarrow\quad m_1 = 0{,}780\,kg \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{m=1,872 kg}$$

(β) Από τις τιμές μήκους των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζουν οι τρεις ράβδοι και από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι οι κάθετες πλευρές είναι αυτές που έχουν μήκος L_1=0,400 m και L_2=0,300 m.

Το πλέον κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό στο οποίο οι άξονες είναι παράλληλοι με τις κάθετες πλευρές L_1 και L_2 του ορθογωνίου τριγώνου και η αρχή του ταυτίζεται με την κορυφή του τριγώνου που αντιστοιχεί στην ορθή γωνία (βλέπε Σχήμα 3α).



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

Η κάθε μια από τις τρεις ράβδους μπορεί να αντικατασταθεί με ένα υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας της και του οποίου η μάζα είναι ίση με τη μάζα της αντίστοιχης ράβδου. Επειδή οι ράβδοι είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο μέσο αυτών. Στο σύστημα συντεταγμένων (x, y):

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας cm1 της μάζας m_1 είναι: (x_1, y_1)=(0,000m, 0,200m)
Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας cm2 της μάζας m_2 είναι: (x_2, y_2)=(0,150m, 0,000m)
Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας cm3 της μάζας m_1 είναι: (x_3, y_3)=(0,150m, 0,200m)
Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\right) =$$

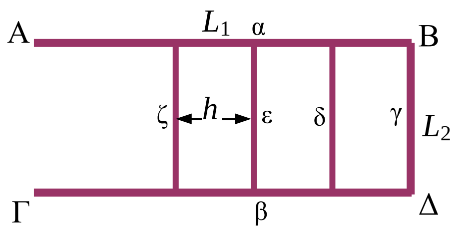
$$= \frac{1}{1{,}872kg}\left((0{,}624kg)(0{,}000m) + (0{,}468kg)(0{,}150m) + (0{,}780kg)(0{,}150m)\right) \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = 0{,}100\,m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3\right) =$$

$$= \frac{1}{1{,}872kg}\left((0{,}624kg)(0{,}200m) + (0{,}468kg)(0{,}000m) + (0{,}780kg)(0{,}200m)\right) \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 0{,}150\,m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4:</u>

Στην παρακάτω μεταλλική κατασκευή (αλουμινοκατασκευή) οι ράβδοι ΑΒ και ΓΔ που χρησιμοποιούνται έχουν γραμμική πυκνότητα μάζας μ=1,000 kg/m και μήκος L_1=1,000 m. Η ράβδος ΒΔ έχει γραμμική πυκνότητα μάζας μ=1,000 kg/m και μήκος L_2=40,0 cm. Οι υπόλοιποι τρεις ράβδοι έχουν γραμμική πυκνότητα μάζας μ=0.540 kg/m, μήκος L_2=40,0 cm. Οι τέσσερις ράβδοι που έχουν μήκος L_2=40,0 cm απέχουν μεταξύ τους απόσταση h=20,0 cm.



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.
β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

<u>ΛΥΣΗ</u>

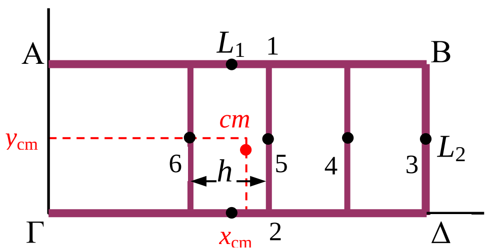
(α) $m_1 = m_2 = \mu_1 L_1 = (1{,}000 kg/m)(1{,}000 m) \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 = 1{,}000\,kg$

$m_3 = \mu_2 L_2 = (1{,}00 kg/m)(0{,}400 m) = 0{,}400\,kg$

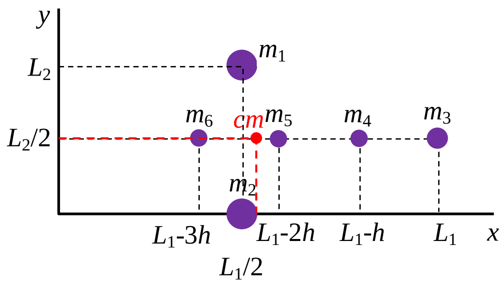
$m_4 = m_5 = m_6 = \mu_2 L_2 = (0{,}540 kg/m)(0{,}400 m) = 0{,}216\,kg$

$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 3{,}048\,kg$

(β) Η κάθε μια από τις έξι ράβδους μπορεί να αντικατασταθεί με ένα υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας της και του οποίου η μάζα είναι ίση με τη μάζα της αντίστοιχης ράβδου. Επειδή οι ράβδοι είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο μέσο αυτών. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των έξι ράβδων χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων. Από τα άπειρα συστήματα συντεταγμένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση του προβλήματος επιλέγουμε το πιο βολικό. Στην προκειμένη περίπτωση, επιλέγουμε το σύστημα εκείνο στο οποίο ό άξονας x εφάπτεται με τη ράβδο β και ο άξονας υ διέρχεται από τα σημεία Γ και Α (βλέπε Σχήμα 4α).



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

Οι μάζες και οι αντίστοιχες συντεταγμένες των κέντρων μάζας των έξι ράβδων είναι:
Ράβδος 1: m_1=1,000 kg, $(x_1, y_1)=(L_1/2, L_2)$=(0,500m, 0,400m)
Ράβδος 2: m_2=1,000 kg, $(x_2, y_2)=(L_1/2, 0)$=(0,500m, 0,000m)
Ράβδος 3: m_3=0,400 kg, $(x_3, y_3)=(L_1, L_2/2)$=(1,000m, 0,200m)
Ράβδος 4: m_4=0,22 kg, $(x_4, y_4)=(L_1-h, L_2/2)$=(0,800m, 0,200m)
Ράβδος 5: m_5=0,216 kg, $(x_5, y_5)=(L_1-2h, L_2/2)$=(0,600m, 0,200m)
Ράβδος 6: m_6=0,216 kg, $(x_6, y_6)=(L_1-3h, L_2/2)$=(0,400m, 0,200m)

Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{6} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 + m_6x_6\right) =$$

$$= \frac{1}{3{,}048kg}\big((1{,}000kg)(0{,}500m) + (1{,}000kg)(0{,}500m) + (0{,}400kg)(1{,}000m) + (0{,}216kg)(0{,}800m) +$$

$$+ (0{,}216kg)(0{,}600m) + (0{,}216)(0{,}400m)\big) \quad \Rightarrow$$

$$x_{cm} = 0{,}514\,m$$

$$y_{cm}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{6}m_i y_i=\frac{1}{m}\left(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4+m_5y_5+m_6y_6\right)=$$

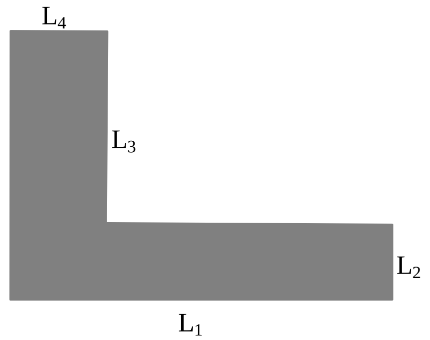
$$=\frac{1}{3{,}048kg}\Big((1{,}000kg)(0{,}400m)+(1{,}000kg)(0{,}000m)+(0{,}400kg)(0{,}200m)+(0{,}216kg)(0{,}200m)+$$

$$+(0{,}2216kg)(0{,}200m)+(0{,}216)(0{,}200m)\Big)\ \Rightarrow$$

$$y_{cm}=0{,}200\,m$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Δυο ορθογώνιες παραλληλόγραμμες αλουμινένιες πλάκες έχουν διαστάσεις L_1=2,000 m, L_2=0,400 m το ένα και L_3=1,000 m, L_4=0,500 m το άλλο. Οι αλουμινένιες αυτές πλάκες είναι ομογενείς, έχουν επιφανειακή πυκνότητα σ=8,10 kg/m^2 και είναι συναρμολογημένα έτσι ώστε αυτά να σχηματίζουν ορθή γωνία, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

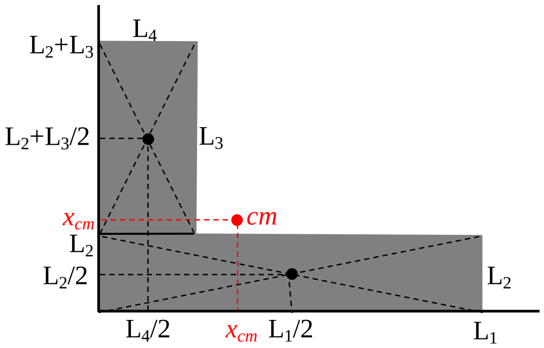


Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

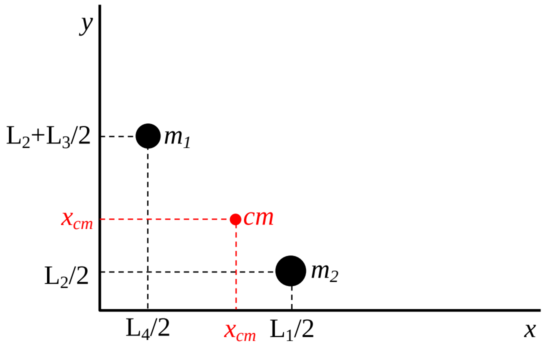
α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΛΥΣΗ



Σχήμα 5α



Σχήμα 5β

(α) Εφόσον δίνεται η επιφανειακή πυκνότητα σ=8,10 kg/m^2, για να υπολογίσουμε τη μάζα κάθε πλάκας αλουμινίου πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα εμβαδά των πλακών.

Εμβαδό πλάκας με διαστάσεις (L_1, L_2): $A_1=L_1L_2=(2{,}000\text{m})(0{,}400\text{m})\ \Rightarrow\ A_1=0{,}800\ \text{m}^2$

Εμβαδό πλάκας με διαστάσεις (L_3, L_4): $A_2=L_3L_4=(1{,}000\text{m})(0{,}500\text{m})\ \Rightarrow\ A_2=0{,}500\ \text{m}^2$

Μάζα 1^{ης} πλάκας: $m_1=\sigma A_1=(8{,}10\ \text{kg/m}^2)(0{,}800\text{m}^2)\ \Rightarrow\ m_1=6{,}48\ \text{kg}$

Μάζα 2ης πλάκας: $m_2=\sigma A_2 = (8{,}10\ \text{kg/m}^2)(0{,}500\text{m}^2) \quad \Rightarrow \quad m_2=4{,}05\ \text{kg}$

Μάζα κατασκευής: $m=m_1+m_2 \quad \Rightarrow \quad m=10{,}53\ \text{kg}$

(β) Η κάθε μια από τις δυο αλουμινένιες πλάκες μπορεί να αντικατασταθεί με ένα υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας της και του οποίου η μάζα είναι ίση με τη μάζα της αντίστοιχης πλάκας. Επειδή οι ορθογώνιες πλάκες είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο γεωμετρικό μέσο αυτών, δηλαδή στην τομή των διαγωνίων τους. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των δυο πλακών χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων. Από τα άπειρα συστήματα συντεταγμένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση του προβλήματος επιλέγουμε το πιο βολικό. Στην προκειμένη περίπτωση, επιλέγουμε το σύστημα εκείνο στο οποίο οι άξονες x, y εφάπτονται στις εξωτερικές πλευρές της αλουμινένιας κατασκευής (βλέπε Σχήματα 5α). Στο σύστημα αυτό, οι συντεταγμένες των δυο κέντρων μάζας είναι:

Κέντρο μάζας 1ης πλάκας: $(x_1,y_1)=(L_1/2,\ L_2/2)=(1{,}000\text{m},\ 0{,}200\text{m})$

Κέντρο μάζας 2ης πλάκας: $(x_2,y_2)=(L_4/2,\ L_2+L_3/2)=(0{,}250\text{m},\ 0{,}900\text{m})$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{1}{m}\left(m_1x_1+m_2x_2\right) = \frac{1}{10{,}53kg}\left((6{,}48kg)(1{,}000m)+(4{,}05kg)(0{,}250m)\right) \Rightarrow$$

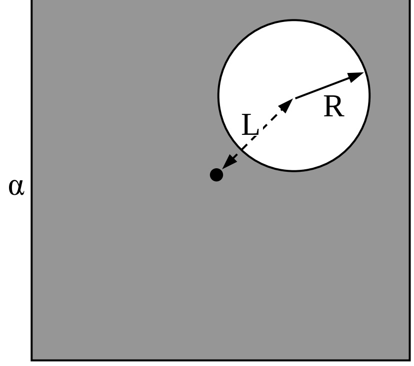
$$x_{cm} = 0{,}712m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{1}{m}\left(m_1y_1+m_2y_2\right) = \frac{1}{10{,}53kg}\left((6{,}48kg)(0{,}200m)+(4{,}05kg)(0{,}900m)\right) \Rightarrow$$

$$y_{cm} = 0{,}469m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 6:</u>

Μια τετράγωνη και επίπεδη μεταλλική κατασκευή που έχει πλευρά α=1,000 m έχει μια κυκλική οπή ακτίνας R=20,0 cm της οποίας το κέντρο βρίσκεται πάνω σε μια διαγώνιο και σε απόσταση L=30,0 cm από το γεωμετρικό μέσο. Η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής πλάκας που χρησιμοποιήθηκε είναι σ=31,20 kg/m^2.



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΛΥΣΗ

Η ολική μάζα m_1 της τετράγωνης πλάκας (χωρίς την κυκλική οπή) είναι ίση με:

$$m_1 = (\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, \sigma) \times (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \pi\lambda\acute{\alpha}\kappa\alpha\varsigma) = \sigma(\alpha^2) \quad \Rightarrow$$

$$m_1 = (31{,}20 kg/m^2)(1{,}000 m)^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = 31{,}20 kg$$

Κατασκευαστικά, η κυκλική οπή πάνω στην μεταλλική πλάκα δημιουργείται μηχανικά με αφαίρεση ποσότητας μάζας m_2 ίσης με:

$$m_2 = (\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, \sigma) \times (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ o\pi\acute{\eta}\varsigma) = \sigma(\pi R^2) \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = (31{,}20 kg/m^2)(3{,}14)(0{,}200 m)^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_2 = 3{,}92 kg$$

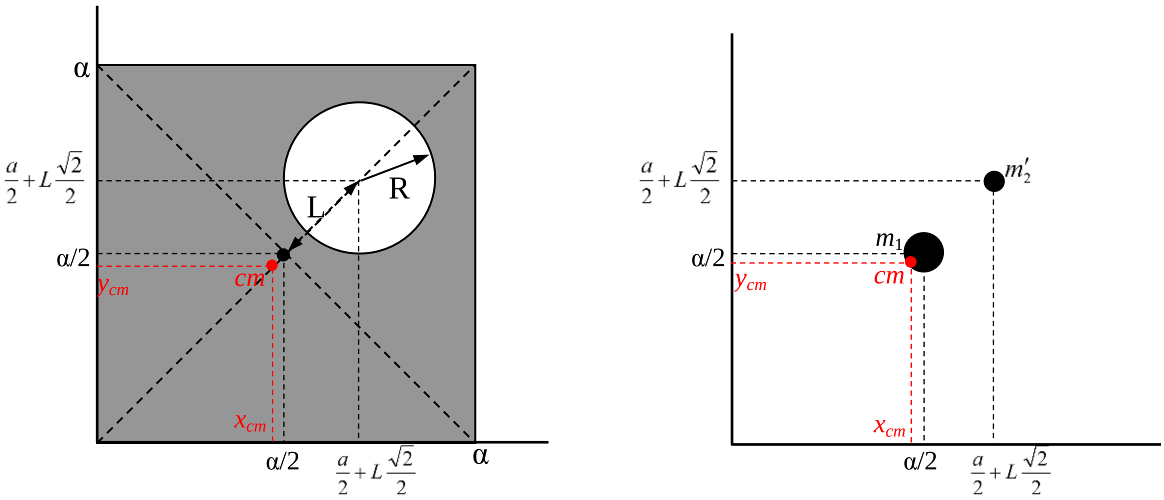
Υπολογιστικά, η συγκεκριμένη κυκλική οπή μπορεί να δημιουργηθεί, αν πάνω στη διαγώνιο της τετράγωνης πλάκας και σε απόσταση L=30 cm από το κέντρο της τοποθετήσουμε ένα υποθετικό κυκλικό δίσκο ο οποίος έχει ακτίνας R και αρνητική μάζα $m'_2 = -3{,}92 kg$. Και πάλι υπολογιστικά, η τοποθέτηση του υποθετικού δίσκου ακτίνας R και αρνητικής μάζας $m'_2 = -3{,}92 kg$ στη συγκεκριμένη θέση θα «εξουδετερώσει» πάνω στην τετράγωνη πλάκα αντίστοιχη μάζα προκαλώντας με αυτό τον τρόπο υπολογιστικά την κυκλική οπή. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της θέσης του κέντρου μάζας δυο σωμάτων: της τετράγωνης πλάκας που έχει μάζα m_1=31,20 kg και του υποθετικού κυκλικού δίσκου που έχει αρνητική μάζα $m'_2 = -3{,}92 kg$.

(α) Η συνολική μάζα Μ της μεταλλικής κατασκευής είναι: $M = m_1 + m'_2 = 31{,}20 kg - 3{,}92 kg$

$$M = m_1 + m'_2 = 27{,}28 kg$$

(β) **1ος Τρόπος**

Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων αυτό που οριοθετείται από την αριστερή και την κάτω πλευρά της τετράγωνης πλάκας:



Σχήμα 6α **Σχήμα 6β**

Η τετράγωνη μεταλλική πλάκα και ο υποθετικός δίσκος μπορούν να αντικατασταθούν με υλικά σημεία με αντίστοιχες μάζες m_1=31,20 kg και $m'_2 = -3{,}92 kg$ τα οποία είναι τοποθετημένα στα κέντρα μάζας της μεταλλικής πλάκας και του υποθετικού δίσκου. Επειδή η τετράγωνη πλάκα και ο υποθετικός δίσκος είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο γεωμετρικό μέσο αυτών, δηλαδή στην τομή των διαγωνίων της πλάκας και στο κέντρο του δίσκου, αντίστοιχα. Στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων τα κέντρα μάζας της πλάκας και του υποθετικού δίσκου είναι στις θέσεις:

Κέντρο μάζας τετράγωνης πλάκας: (x_1, y_1)=(α/2, α/2)=(0,500m, 0,500m)

Κέντρο μάζας υποθετικού δίσκου: (x_2, y_2)= $\left(\frac{a}{2}+L\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{a}{2}+L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$= (0,712m, 0,712m)

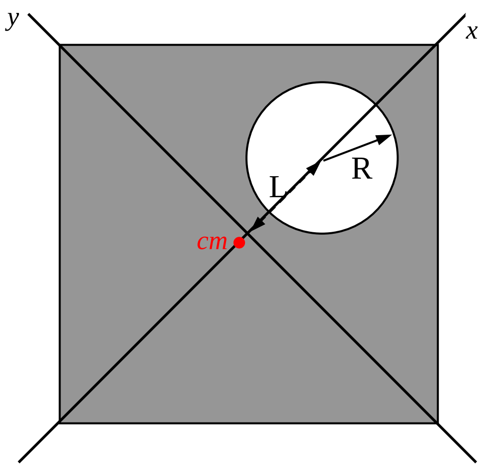
$$x_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2}m_i x_i=\frac{1}{M}\left(m_1x_1+m_2x_2\right)=\frac{1}{27{,}28kg}\left((31{,}20kg)(0{,}500m)+(-3{,}92kg)(0{,}712m)\right)\ \Rightarrow$$
$$x_{cm}=0{,}470\,m$$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2}m_i y_i=\frac{1}{M}\left(m_1y_1+m_2y_2\right)=\frac{1}{27{,}28kg}\left((31{,}20kg)(0{,}500m)+(-3{,}92kg)(0{,}712m)\right)\ \Rightarrow$$
$$y_{cm}=0{,}470\,m$$

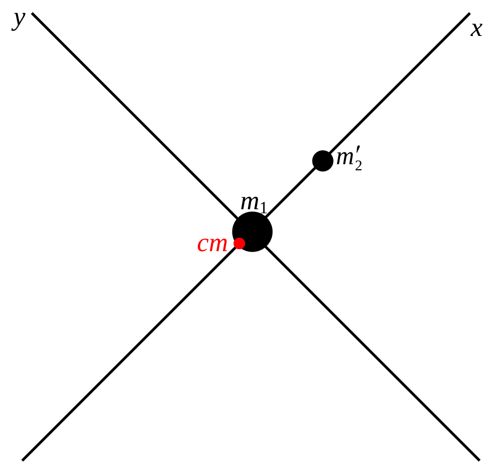
Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρο μάζας της μεταλλικής κατασκευής από το κέντρο της τετράγωνης πλάκας

<u>2ος Τρόπος</u>

Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων αυτό που έχει ως κορυφή το κέντρο της τετράγωνης πλάκας και οι άξονές του ταυτίζονται με τις διαγώνιες της πλάκας.



Σχήμα 6γ



Σχήμα 6δ

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων το κέντρο μάζας της πλάκας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ το κέντρο μάζας του υποθετικού δίσκου βρίσκεται πάνω στον άξονα x και σε απόσταση L=0,300 m:

Κέντρο μάζας τετράγωνης πλάκας: (x_1,y_1)=(0,00m, 0,00m)

Κέντρο μάζας υποθετικού δίσκου: (x_2,y_2)=(L, 0,00m) = (0,300m, 0,00m)

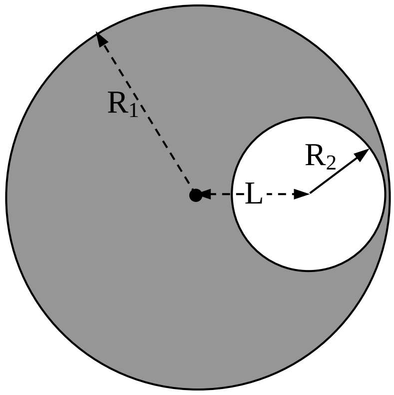
Στις θέσεις αυτές τοποθετούμε τα υλικά σημεία που αντιστοιχούν στη μεταλλική πλάκα και στον υποθετικό δίσκο που έχει αρνητική μάζα. Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right) = \frac{1}{27,28kg}\left((31,20kg)(0,000m) + (-3,92kg)(0,300m)\right) \Rightarrow$$
$$x_{cm} = -0,043m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{1}{M}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2\right) = \frac{1}{27,28kg}\left((31,20kg)(0,000m) + (-3,92kg)(0,000m)\right) \Rightarrow$$
$$y_{cm} = 0,000m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7:</u>

Μια κυκλική επίπεδη μεταλλική κατασκευή ακτίνας R_1=1,000 m έχει μια κυκλική οπή ακτίνας R_2=40,0 cm η οποία βρίσκεται σε απόσταση L=60,0 cm από το κέντρο της κύριας κατασκευής. Η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής πλάκας που χρησιμοποιήθηκε είναι σ=31,20 kg/m^2.



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:
α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.
β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η ολική μάζα m_1 του κυκλικού δίσκου (χωρίς την κυκλική οπή) είναι ίση με:

$$m_1 = (\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, \sigma) \times (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{o}\upsilon\ \delta\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon) = \sigma(\pi R_1^2) \Rightarrow$$
$$m_1 = (31,20kg/m^2)(3,14)(1,000m)^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 97,97kg$$

Κατασκευαστικά, η κυκλική οπή πάνω στον μεταλλικό δίσκο δημιουργείται μηχανικά με αφαίρεση ποσότητας μάζας m_2 ίσης με:

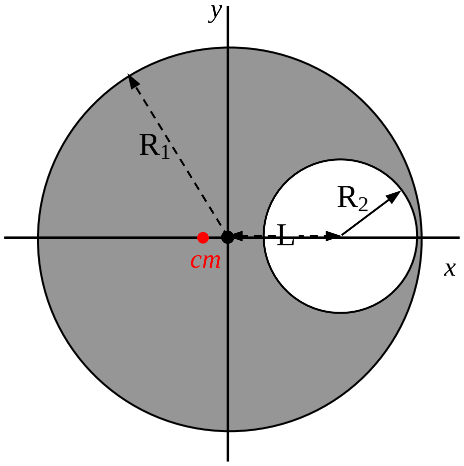
$$m_2 = (\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, \sigma) \times (\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ o\pi\acute{\eta}\varsigma) = \sigma(\pi R_2^2) \Rightarrow$$
$$m_2 = (31,20kg/m^2)(3,14)(0,400m)^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 15,68kg$$

Υπολογιστικά, η συγκεκριμένη κυκλική οπή μπορεί να δημιουργηθεί, αν πάνω στην οριζόντια ακτίνα του δίσκου και σε απόσταση L=60,0 cm από το κέντρο του τοποθετήσουμε ένα υποθετικό κυκλικό δίσκο ο οποίος έχει ακτίνας R_2=40,0 cm και αρνητική μάζα $m_2' = -15,68kg$. Και πάλι υπολογιστικά, η τοποθέτηση του υποθετικού δίσκου ακτίνας R_2 και αρνητικής μάζας $m_2' = -15{,}68kg$ στη συγκεκριμένη θέση θα «εξουδετερώσει» πάνω στο μεταλλικό δίσκο της κύριας κατασκευής αντίστοιχη μάζα προκαλώντας με αυτό τον τρόπο υπολογιστικά την κυκλική οπή. Οπότε το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της θέσης του κέντρου μάζας δυο σωμάτων: του μεταλλικού δίσκου της κύριας κατασκευής που έχει μάζα m_1=97,97 kg και του υποθετικού κυκλικού δίσκου που έχει αρνητική μάζα $m_2' = -15{,}68kg$.

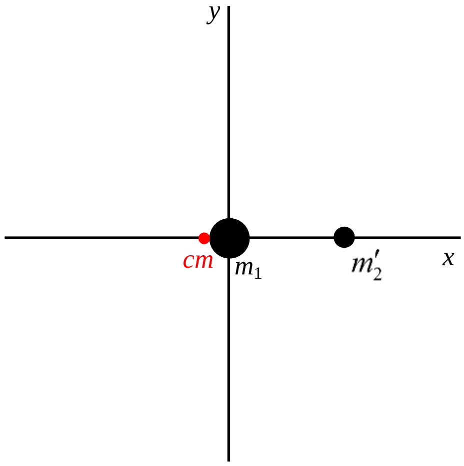
(α) Η συνολική μάζα M της μεταλλικής κατασκευής είναι: $M = m_1 + m_2' = 97{,}97kg - 15{,}68kg$

$M = 82{,}29kg$

(β) Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων αυτό που έχει ως κορυφή το κέντρο του κυκλικού δίσκου της κύριας κατασκευής:



Σχήμα 7α



Σχήμα 7β

Ο κυκλικός δίσκος της κύριας κατασκευής και ο υποθετικός δίσκος μπορούν να αντικατασταθούν με υλικά σημεία με αντίστοιχες μάζες m_1=97,97 kg και $m_2' = -15{,}68kg$ τα οποία είναι τοποθετημένα στα κέντρα μάζας της μεταλλικής πλάκας και του υποθετικού δίσκου. Επειδή ο μεταλλικός δίσκος της κύριας κατασκευής και ο υποθετικός δίσκος θεωρούνται ότι είναι ομογενείς, τα κέντρα μάζας τους θα βρίσκονται στο γεωμετρικό μέσο αυτών, δηλαδή στο κέντρο του μεταλλικού δίσκου και στο κέντρο του υποθετικού δίσκου, αντίστοιχα. Στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων τα κέντρα μάζας του μεταλλικού δίσκου και του υποθετικού δίσκου είναι στις θέσεις:

Κέντρο μάζας μεταλλικού δίσκου: (x_1,y_1)=(0,000m, 0,000m)

Κέντρο μάζας υποθετικού δίσκου: (x_2,y_2)=(L, 0,000m)= (0,600m, 0,000m)

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{1}{M}\left(m_1x_1 + m_2x_2\right) = \frac{1}{82{,}29kg}\left((97{,}97kg)(0{,}000m) + (-15{,}68kg)(0{,}600m)\right) \Rightarrow$$

$$x_{cm} = -0{,}114m$$

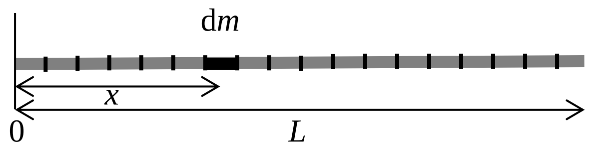
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{1}{M}\left(m_1y_1 + m_2y_2\right) = \frac{1}{82{,}29kg}\left((97{,}97kg)(0{,}000m) + (-15{,}68kg)(0{,}000m)\right) \Rightarrow$$

$$y_{cm} = 0{,}000m$$

ΑΣΚΗΣΗ 8:

Να υπολογίσετε τη μάζα, καθώς και τη θέση του κέντρου μάζας και τη ροπή αδράνειας ως προς τον κάθετο άξονα που διέρχεται από το αριστερό άκρο μιας κυλινδρικής ράβδου σταθερής διατομής που έχει μήκος L=1,00 m και γραμμική πυκνότητα μάζας η οποία μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\frac{dm}{dx} = \gamma x$, όπου γ=5,20 g/cm^{-2}.

ΛΥΣΗ



Σχήμα 8

Χωρίζουμε τη ράβδο σε τμήματα μήκους dx το κάθε ένα. Από το δεδομένο:

$$\frac{dm}{dx} = \gamma x$$

υπολογίζουμε τη στοιχειώδη μάζα του τμήματος dx που βρίσκεται στη θέση x:

$$dm = \gamma x dx \qquad (8.1)$$

α) Υπολογισμός της μάζας της ράβδου:

Θα έλεγε κανείς ότι από το άθροισμα όλων των στοιχειωδών μαζών dm θα μπορούσαμε να υπολογίζουμε τη μάζα της ράβδου. Επειδή ο διαμερισμός της ράβδου σε στοιχειώδη τμήματα dx το υποτιθέμενο αυτό άθροισμα είναι ισοδύναμο με το ορισμένο ολοκλήρωμα της Σχέσης 8.1 από την τιμή x=0 μέχρι την τιμή $x=L$:

$$m = \int_m dm = \int_{x=0}^{x=L} \gamma x dx = \gamma \int_{x=0}^{x=L} x dx = \frac{\gamma}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=L} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\gamma L^2}{2} \qquad (8.2)$$

β) Υπολογισμός της θέσης του κέντρο μάζας της ράβδου:

Επειδή η ράβδος έχει μια μόνο διάσταση προς την κατεύθυνση x, το κέντρο μάζας θα βρίσκεται πάνω στην κατεύθυνση αυτή και θα απέχει από την αρχή της ράβδου απόσταση x_{cm} η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x dm = \frac{1}{m}\int_{x=0}^{x=L} x \gamma x dx = \frac{\gamma}{m}\int_{x=0}^{x=L} x^2 dx = \frac{\gamma}{3m} x^3 \Big|_{x=0}^{x=L} \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{\gamma L^3}{3m} \qquad (8.3)$$

Αντικαθιστούμε τη μάζα m από τη Σχέση 8.2 στη Σχέση 8.3 οπότε έχουμε:

$$x_{cm} = \frac{\gamma L^3}{3\frac{\gamma L^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{2}{3} L$$

γ) Υπολογισμός της ροπής αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από την αρχή της ράβδου:

Κάθε στοιχειώδη μάζα dm που βρίσκεται στη θέση x έχει στοιχειώδη ροπή αδράνειας $dI=r^2dm$. Θα έλεγε πάλι κανείς εδώ ότι η συνολική ροπή αδράνειας της ράβδου θα μπορούσε να είναι ίση με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών ροπών αδράνειας dI. Αυτό το άθροισμα είναι ουσιαστικά το παρακάτω ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον ορισμό της ροπής αδράνειας:

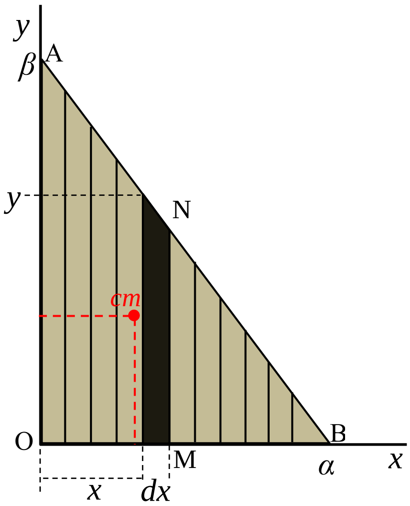
$$I=\int_m x^2 dm=\int_{x=0}^{x=L} x^2\,\gamma\, x\, dx=\gamma\int_{x=0}^{x=L} x^3\, dx=\frac{\gamma}{4}x^4\Big|_{x=0}^{x=L}\quad\Rightarrow\quad I=\frac{\gamma L^4}{4}\qquad(8.4)$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9:</u>

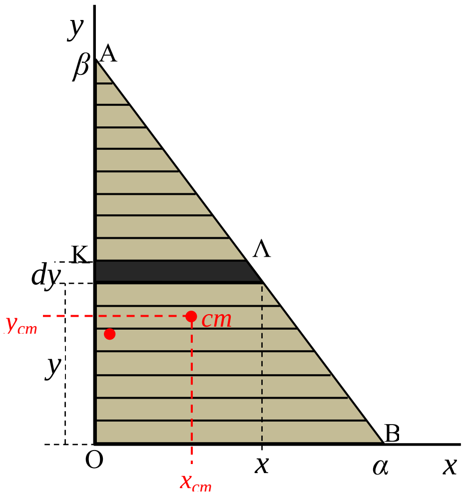
Δίνεται επίπεδη και ομογενής μεταλλική κατασκευή που έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη α=1,500 m και β=2,000 m. Να επιλέξετε ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y) και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της μεταλλικής κατασκευής. Η επιφανειακή πυκνότητα του υλικού της μεταλλικής κατασκευής είναι σ=31,20 kg/m^2.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ως σύστημα συντεταγμένο επιλέγουμε εκείνο στο οποίο οι άξονες x και y ταυτίζονται με τις κάθετες πλευρές α και β της ορθογώνιας κατασκευής.



Σχήμα 9α



Σχήμα 9β

<u>Υπολογισμός της μάζας της κατασκευής.</u>

Επειδή το σχήμα της κατασκευής είναι ορθογώνιο τρίγωνο, το εμβαδό της θα είναι ίσο με:

$A=\frac{1}{2}\alpha\beta$. Οπότε, η μάζα της κατασκευής θα προκύπτει από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας σ:

$$m=\sigma\, A=\sigma\frac{\alpha\beta}{2}=(31{,}20kg/m^2)\frac{(1{,}500m)(2{,}000m)}{2}\quad\Rightarrow\quad m=46{,}80kg\qquad(9.1)$$

<u>Υπολογισμός της συνιστώσας x_{cm}.</u>

Διαιρούμε το τρίγωνο σε κατακόρυφες λωρίδες με στοιχειώδες πλάτος *dx* και από αυτές τις λωρίδες επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση *x* από τον άξονα y (βλέπε Σχήμα 9α). Η τυχαία αυτή λωρίδα έχει ύψος *y* και στοιχειώδες πλάτος *dx* και συνεπώς, το στοιχειώδες εμβαδόν της θα είναι ίσο με $dA_x = y\,dx$. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας, η επιλεγμένη στοιχειώδης λωρίδα θα έχει μάζα:

$$dm = \sigma\, dA_x \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma\, y\, dx \qquad (9.2)$$

Πρέπει η στοιχειώδης αυτή μάζα να εκφραστεί συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής, της x. Πρέπει δηλαδή, η μεταβλητή y, που υπάρχει στη σχέση του dm, να εκφραστεί συναρτήσει του x. Από το γεγονός ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΒΝΜ είναι όμοια, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OA}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha - x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\alpha - x}{\alpha}\beta \quad \Rightarrow \quad y = \beta - \frac{\beta}{\alpha}x \qquad (9.3)$$

Από τις σχέσεις (9.2) και (9.3) παίρνουμε: $dm = \sigma\left(\beta - \frac{\beta}{\alpha}x\right)dx$ (9.4)

Από τον ορισμό της συνιστώσας της συνιστώσας x_{cm} και από τη σχέσης (9.4) προκύπτει το παρακάτω ολοκλήρωμα ως προς x στο διάστημα από x=0 έως x=α:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x\, dm = \frac{1}{m}\int_0^\alpha x\sigma\left(\beta - \frac{\beta}{\alpha}x\right)dx = \frac{\sigma}{m}\left[\int_0^\alpha \beta\, x\, dx - \int_0^\alpha \frac{\beta}{\alpha}x^2\, dx\right] = \frac{\sigma\beta}{m}\int_0^a x\, dx - \frac{\sigma\beta}{\alpha\, m}\int_0^a x^2\, dx \quad \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma\beta}{m}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^\alpha - \frac{\sigma\beta}{\alpha\, m}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{\sigma\beta\alpha^2}{2m} - \frac{\sigma\beta\alpha^3}{3\alpha\, m} = \frac{\sigma\beta\alpha^2}{6m} \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{\sigma\beta\alpha^2}{6m} \qquad (9.5)$$

$$x_{cm} = \frac{(31{,}20 kg/m^2)(2{,}000m)(1{,}500m)^2}{6(46{,}80kg)} \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = 0{,}500m$$

<u>Υπολογισμός της συνιστώσας y_{cm}.</u>

Διαιρούμε το τρίγωνο σε οριζόντιες λωρίδες με στοιχειώδες ύψος *dy* και από αυτές τις λωρίδες επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα x (βλέπε Σχήμα 9β). Η τυχαία αυτή λωρίδα έχει μήκος *x* και στοιχειώδες ύψος *dy* και συνεπώς, το στοιχειώδες εμβαδόν της θα είναι ίσο με $dA = x\,dy$. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας, η επιλεγμένη στοιχειώδης λωρίδα θα έχει μάζα:

$$dm = \sigma\, dA \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma\, x\, dy \qquad (9.6)$$

Πρέπει η στοιχειώδης αυτή μάζα *dm* να εκφραστεί συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής, της *y*. Πρέπει δηλαδή, η μεταβλητή x, που υπάρχει στη σχέση του *dm*, να εκφραστεί συναρτήσει του *y*. Από το γεγονός ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΚΛ είναι όμοια, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AO}} = \frac{\mathrm{K\Lambda}}{\mathrm{OB}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta - y}{\beta} = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\beta - y}{\beta}a \quad \Rightarrow \quad x = a - \frac{a}{\beta}y \qquad (9.7)$$

Από τις σχέσεις (9.6) και (9.7) παίρνουμε: $dm = \sigma\left(a - \frac{a}{\beta}y\right)dy$ (9.8)

Από τον ορισμό της συνιστώσας της συνιστώσας y_{cm} και από τη σχέσης (9.8) προκύπτει το παρακάτω ολοκλήρωμα ως προς y στο διάστημα από *y*=0 έως *y*=β:

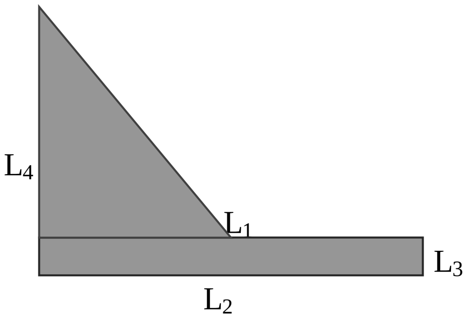
$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_m y\, dm = \frac{1}{m}\int_0^\beta y\sigma\left(a - \frac{a}{\beta}y\right)dy = \frac{\sigma}{m}\left[\int_0^\beta a\, y\, dy - \int_0^b \frac{a}{\beta}y^2\, dy\right] = \frac{\sigma\alpha}{m}\int_0^\beta y\, dy - \frac{\sigma\alpha}{\beta m}\int_0^\beta y^2\, dy \quad \Rightarrow$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma\alpha}{m}\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^\beta - \frac{\sigma\alpha}{\beta m}\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^\beta = \frac{\sigma\alpha\beta^2}{2m} - \frac{\sigma\alpha\beta^3}{3\beta m} = \frac{\sigma\alpha\beta^2}{6m} \Rightarrow y_{cm} = \frac{\sigma\alpha\beta^2}{6m} \qquad (9.9)$$

$$y_{cm} = \frac{(31{,}20 kg/m^2)(1{,}500m)(2{,}000m)^2}{6(46{,}80kg)} \Rightarrow \qquad y_{cm} = 0{,}667m$$

ΑΣΚΗΣΗ 10:

Το ουραίο τμήμα μιας ανεμογεννήτριας είναι κατασκευασμένο από αλουμίνιο που έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ=8.10 kg/m^2 (βλέπε σχήμα). Δίνονται: L_1=0.500m, L_2=1.000m, L_3=10,0 cm και L_4=0.600m. Το τριγωνικό τμήμα της κατασκευής είναι ορθογώνιο.



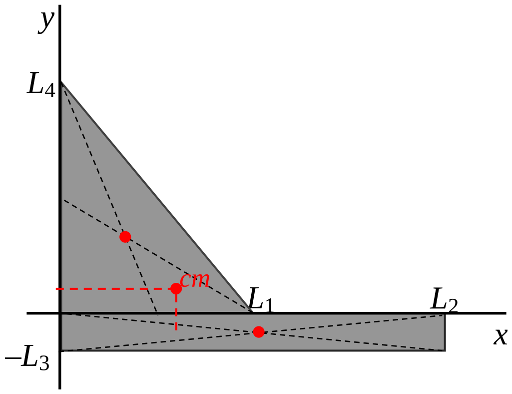
Να επιλέξετε τον κατάλληλο άξονα x και να υπολογίσετε:

α) Τη μάζα του ουραίου τμήματος της ανεμογεννήτριας.

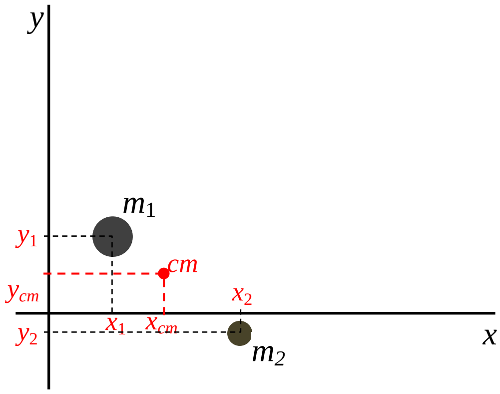
β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης διάταξης.

ΛΥΣΗ

Η κατασκευή αποτελείται από ένα ορθογώνιο τρίγωνου που οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη L_1=0,500 m και L_4=0,600 m, Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων εκείνο στο οποίο οι άξονες (*x*, *y*) ταυτίζονται με τις κάθετες πλευρές του τριγωνικού τμήματος της κατασκευής.



Σχήμα 10α



Σχήμα 10β

(α) Εφόσον δίνεται η επιφανειακή πυκνότητα σ=8,10 kg/m^2, για να υπολογίσουμε τη μάζα της κατασκευής πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το εμβαδό και τη μάζα του τριγωνικού του ορθογώνιου τμήματος αυτής.

Εμβαδό τριγωνικού τμήματος: $A_1 = \frac{1}{2}L_1L_4 = \frac{(0{,}500m)(0{,}600m)}{2} \Rightarrow A = 0{,}150m^2$

Εμβαδό ορθογώνιου τμήματος: $A_2=L_2L_3=(1{,}000m)(0{,}100m) \Rightarrow A_2=0{,}100\ m^2$

Μάζα τριγωνικής τμήματος: $m_1 = \sigma A_1 = (8{,}10\ \text{kg/m}^2)(0{,}150\text{m}^2) \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1{,}22\ \text{kg}$

Μάζα 2ης πλάκας: $m_2 = \sigma A_2 = (8{,}10\ \text{kg/m}^2)(0{,}100\text{m}^2) \quad \Rightarrow \quad m_2 = 0{,}810\ \text{kg}$

Μάζα κατασκευής: $m = m_1 + m_2 \quad \Rightarrow \quad m = 2{,}03\ \text{kg}$

(β) Κάθε ένα από τα δυο τμήματα της κατασκευής μπορεί να αντικατασταθεί με ένα υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας του και του οποίου η μάζα είναι ίση με τη μάζα του αντίστοιχου τμήματος. Επειδή όλη η κατασκευή αποτελείται από ομογενές υλικός, τα κέντρα μάζας των επί μέρους τμημάτων θα βρίσκονται στο γεωμετρικό μέσο αυτών, δηλαδή στην τομή των διαμέσων του τριγώνου και στην τομή των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Στο σύστημα συντεταγμένων (βλέπε σχήμα άσκησης), οι συντεταγμένες των δυο κέντρων μάζας είναι:

Κέντρο μάζας τριγωνικού τμήματος (x_1, y_1): Αποδείξαμε στην Άσκηση 8 ότι οι συντεταγμένες αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$x_1 = \dfrac{\sigma\beta\alpha^2}{6m_1}$ και $y_{cm} = \dfrac{\sigma\alpha\beta^2}{6m_1}$ όπου σ=8,10 kg/m^2, $\alpha = L_1$=0,500 m, $\beta = L_4$=0,600 m, m_1=1,22 kg και m_2=0,810 kg. Οπότε:

$(x_1, y_1) = (0{,}167m,\ 0{,}200m)$

Κέντρο μάζας 2ης πλάκας: $(x_2, y_2) = (L_2/2,\ -L_3/2) = (0{,}500m,\ -0{,}050m)$

Οπότε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{1}{m}(m_1x_1 + m_2x_2) = \frac{1}{2{,}03kg}\big((1{,}22kg)(0{,}167m) + (0{,}810kg)(0{,}500m)\big) \Rightarrow$$

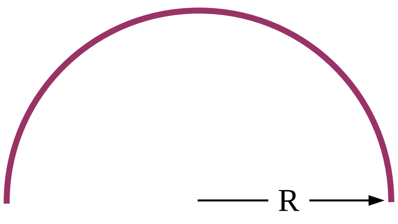
$$x_{cm} = 0{,}300m$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{1}{m}(m_1y_1 + m_2y_2) = \frac{1}{2{,}03kg}\big((1{,}22kg)(0{,}200m) + (0{,}810kg)(-0{,}050m)\big) \Rightarrow$$

$$y_{cm} = 0{,}100m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11:</u>

Μια μεταλλική κατασκευή έχει σχήμα ημιπεριφέρειας κύκλου ακτίνας R=0.500 m. Για την κατασκευή αυτή χρησιμοποιήθηκε μεταλλική ράβδος με σχετικά μικρή διατομή και με γραμμική πυκνότητα μάζας μ=1.56 Kg/m.



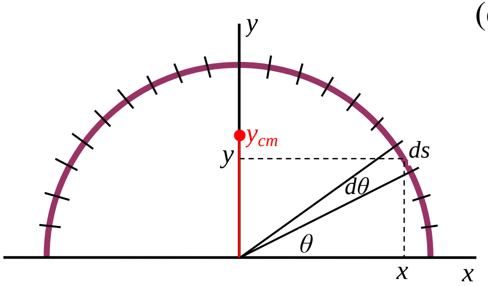
Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το πιο βολικό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό στο οποίο ο άξονας y είναι και άξονας συμμετρίας του ημικύκλιου τόξου και ο άξονας x βρίσκεται πάνω στη διάμετρο του ημικύκλιου.



Σχήμα 12

(α) Διαιρούμε το ημικύκλιο τόξο σε στοιχειώδη τμήματα μήκους ds το κάθε ένα από αυτά. Από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας μάζας έχουμε:

$$\mu = \frac{dm}{ds} \quad \Rightarrow \quad dm = \mu\, ds \qquad (11.1)$$

Από τον ορισμό της γωνίας dθ σε ακτίνια έχουμε:

$$d\theta = \frac{ds}{R} \quad \Rightarrow \quad ds = R\, d\theta \qquad (11.2)$$

Από τις Σχέσεις (11.1) και (11.2) έχουμε: $\quad dm = \lambda\, R d\theta \qquad (11.3)$

$$dm = \mu\, Rd\theta \quad \Rightarrow \quad m = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \lambda R\, d\theta = \mu R \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \quad \Rightarrow \quad m = \pi R \mu = 3{,}14(0{,}500m)(1{,}56kg/m) \quad \Rightarrow$$

$$m = 2{,}45kg$$

(β) Συνιστώσα x_{cm} του κέντρο μάζας του ημικυκλικού τόξου: $\quad x_{cm} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_m x\, dm \qquad (11.4)$

Οι παράγοντες που είναι μέσα στο ολοκλήρωμα πρέπει να εκφραστούν με μια μόνο μεταβλητή, π.χ. της γωνίας θ. Ήδη, η στοιχειώδης μάζα dm έχει εκφραστεί συναρτήσεις της στοιχειώδους γωνίας $d\theta$ (βλέπε Σχέση 11.3). Η προβολή x του στοιχειώδους τμήματος ds πάνω στον άξονα x είναι ίση με:

$$x = R\cos\theta \qquad (11.5)$$

Οπότε, από τις Σχέσεις (11.3), (11.4) και (11.5) έχουμε:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x\, dm = \frac{1}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} R\cos\theta\, \mu R\, d\theta = \frac{\mu R^2}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu R^2}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\sin\theta = \frac{\mu R^2}{m}\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \quad \Rightarrow$$

$$x_{cm} = 0{,}000m$$

Συνιστώσα y_{cm} του κέντρο μάζας του ημικυκλικού τόξου: $\quad y_{cm} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_m y\, dm \qquad (11.6)$

Η προβολή y του στοιχειώδους τμήματος ds πάνω στον άξονα y είναι ίση με:

$$y = R\sin\theta \qquad (11.7)$$

Οπότε, από τις Σχέσεις (11.3), (11.6) και (11.7) έχουμε:

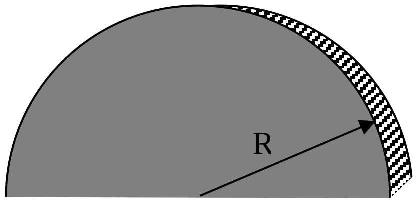
$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_m y\, dm = \frac{1}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} R\sin\theta\, \mu R\, d\theta = \frac{\mu R^2}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta\, d\theta = -\frac{\mu R^2}{m}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\cos\theta = -\frac{\mu R^2}{m}\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \quad \Rightarrow$$

$$y_{cm} = -\frac{\lambda R^2}{m}(\cos\pi - \cos 0) \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = \frac{2\lambda R^2}{m} = \frac{2\lambda R^2}{\pi R \lambda} = \frac{2R}{\pi} = \frac{2(0{,}500m)}{3{,}24} \quad \Rightarrow$$

$$y_{cm} = 0{,}318m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 12:</u>

Ένα ημικυκλικό μπαλκόνι έχει ακτίνα R=1,850 m, πάχος h=15,0 cm και είναι κατασκευασμένο από οπλισμένο σκυρόδεμα που έχει πυκνότητα ρ=2,500 g/cm^3.



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη συνολική μάζα το μπαλκονιού.

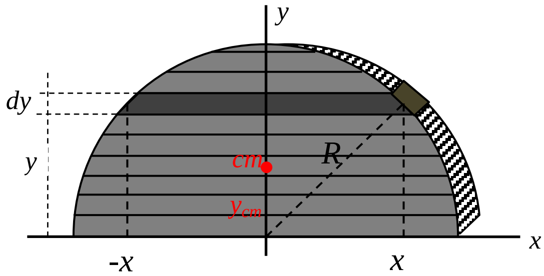
β) Τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας του συγκεκριμένου μπαλκονιού.

Δίνονται τα ολοκληρώματα: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{3}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων το σύστημα εκείνο στο οποίο ο άξονας x ταυτίζεται με τη διάμετρο της ημικύκλιας κατασκευής και ο άξονας y διέρχεται από το μέσο της διαμέτρου.



Σχήμα 12

Διαιρούμε την ημικύκλια κατασκευή σε φέτες πάχους dy. Επειδή η κατασκευή είναι ομογενής, τα κέντρα μάζας όλων των φετών θα βρίσκονται στο μέσο αυτών, δηλαδή πάνω στον άξονα y. Το γεγονός αυτό μας υποδεικνύει ότι το κέντρο μάζας της κατασκευής θα βρίσκεται πάνω στον άξονα y. Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε μόνο τη συνιστώσα y_{cm} του κέντρου μάζας της κατασκευής.

(α) **<u>1^{ος} Τρόπος Υπολογισμού της Μάζας</u>**

Για να υπολογίσουμε τη μάζα της κατασκευής επιλέγουμε μια τυχαία φέτα που έχει ύψος dy, μήκος $2x$ και απέχει από τον άξονα x απόσταση y. Το πάχος κάθε φέτας είναι h=0,150 m. Επειδή το ύψος dy είναι απειροστό, κάθε φέτα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παραλληλεπίπεδο που έχει όγκο dV:

$$dV = 2xh\,dy \qquad (12.1)$$

Από τον ορισμό της πυκνότητας: $dm = \rho\, dV \quad \Rightarrow \quad dm = 2\rho x h\, dy \qquad (12.2)$

$$m = \int_m dm \qquad (12.3)$$

Από το σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι: $x = \sqrt{R^2 - y^2} \qquad (12.4)$

Από τις σχέσεις (12.2) και (12.4) προκύπτει ότι: $dm = 2\rho h\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$ (12.5)

$$m = \int_0^R 2\rho h\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = 2\rho h\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \left|\frac{y\sqrt{R^2 - y^2}}{2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right|_0^R \Rightarrow$$

$$m = \frac{\pi\rho h}{2}R^2 = \frac{(3{,}14)(2500kg/m^3)(0{,}150m)}{2}(1{,}850m)^2 \Rightarrow m = 2020kg$$

<u>2^{ος} Τρόπος Υπολογισμού της Μάζας</u>

Ο όγκος V της ημικύκλιας κατασκευής είναι ίσος με:

V = (εμβαδό ημικυκλίου)x(πάχος ημικυκλίου) = $\frac{\pi R^2}{2}h$

Μάζα ημικύκλιας κατασκευής: $m = \rho V = \rho\frac{\pi R^2}{2}h = (2500kg/m^3)\frac{3{,}14(1{,}850m)^2}{2}(0{,}150m)$

$m = 2020kg$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο 1ος τρόπος είναι γενικός. Ο 2ος τρόπος χρησιμοποιείται μόνο στις περιπτώσεις που το σχήμα της κατασκευής είναι απλό.

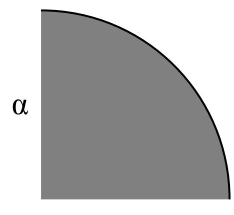
(β) Για τον υπολογισμό της συνιστώσας y_{cm} του κέντρο μάζας της κατασκευής αντικαθιστούμε τη σχέση (11.4) στη σχέση:

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_m y\, dm = \frac{1}{m}\int_0^R y 2\rho h\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{2\rho h}{m}\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{2\rho h}{m}\left(-\frac{(R^2 - y^2)^{3/2}}{3}\right)_0^R \Rightarrow$$

$$y_{cm} = \frac{2\rho h R^3}{3m} = \frac{2(2500kg/m^3)(0{,}150m)(1{,}850m)^3}{3(2020kg)} \Rightarrow y_{cm} = 0{,}784m$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 13:</u>

Μια κατασκευή από λαμαρίνα έχει τη μορφή τεταρτοκυκλίου ακτίνας α=0.500 m (βλέπε σχήμα). η επιφανειακή πυκνότητα μάζας της λαμαρίνας είναι σ=31.2 kg/m^2



Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε:

α) Τη μάζα της κατασκευής.

β) Τις συντεταγμένες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρο μάζας της συγκεκριμένης κατασκευή.

γ) Τη ροπή αδράνειας του τεταρτοκυκλίου όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα που ταυτίζεται με μια από τις δυο ευθύγραμμες πλευρές του.

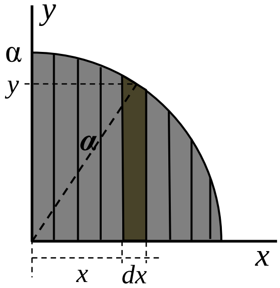
Δίνονται τα ολοκληρώματα: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{3}$$

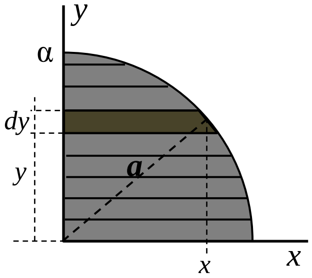
$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 x\sqrt{a^2 - x^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

ΛΥΣΗ

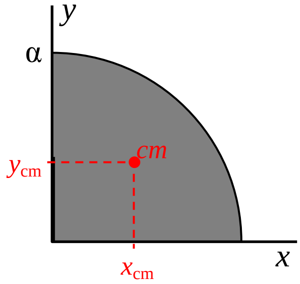
Επιλέγουμε ως βολικό σύστημα συντεταγμένων εκείνο στο οποίο οι άξονες *x* και *y* ταυτίζονται με τις δυο κάθετες ακτίνες του τεταρτοκύκλιου.



Σχήμα 13α



Σχήμα 13β



Σχήμα 13γ

(α) **Υπολογισμού της Μάζας.**

Διαιρούμε την κατασκευή σε κατακόρυφες λωρίδες με στοιχειώδες με πλάτος *dx* και ύψος *y*. Από τις στοιχειώδεις αυτές λωρίδες επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση *x* από τον άξονα *y* (βλέπε Σχήμα 13α). Το εμβαδό της συγκεκριμένης λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_x = y\,dx = \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad (13.1)$$

όπου το *y* προέκυψε από την εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο που έχει υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές *x* και *y*. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας σ, η μάζα της στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με:

$$dm = \sigma\,dA_x = \sigma\,y\,dx \qquad \Rightarrow \qquad dm = \sigma\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad (13.2)$$

Με ολοκλήρωση της Σχέσης (13.2) από *x*=0 μέχρι *x*=α υπολογίζουμε τη μάζα της κατασκευής:

$$m = \int_m dm = \int_0^a \sigma\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \sigma\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \sigma\left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \sigma\frac{\pi a^2}{4}$$

$$m = (31{,}2kg/m^2)\frac{3{,}14(0{,}50m)^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad m = 6{,}13kg$$

Παρατηρείστε ότι στη σχέση υπολογισμού της μάζας, ο παράγοντας $(\pi a^2)/4$ είναι ίσος με το εμβαδό του τεταρτοκύκλιου που έχει ακτίνα α.

(β) Υπολογισμός της συνιστώσας x_{cm}

Διαιρούμε την κατασκευή σε κατακόρυφες στοιχειώδεις λωρίδες με πάχος *dx* και ύψος *y* και από αυτές επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση *x* από τον άξονα *y* (βλέπε Σχήμα 13α). Η Σχέση 13.2 δίνει τη στοιχειώδη μάζα dm της λωρίδας, οπότε η συνιστώσα x_{cm} του διανύσματος της θέσης του κέντρο μάζας στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων (x, y) θα είναι ίση με:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_m x\,dm = \frac{1}{m}\int_0^a x\sigma\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\sigma}{m}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\sigma}{m}\left(-\frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{3}\right)_0^a \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma a^3}{3m} = \frac{(31{,}2kg/m^2)(0{,}500m)^3}{3(6{,}13kg)} \quad \Rightarrow \quad x_{cm} = 0{,}212m$$

(γ) Υπολογισμός της συνιστώσας y_{cm}

Διαιρούμε την κατασκευή σε οριζόντιες στοιχειώδεις λωρίδες με πάχος dy και μήκος x και από αυτές επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση y από τον άξονα x (βλέπε Σχήμα 13β)). Το στοιχειώδες εμβαδό dA_y της στοιχειώδους αυτής λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_y = x\,dy = \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

όπου το x προέκυψε από την εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο που έχει υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές x και y. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας σ, η μάζα της στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με:

$$dm = \sigma\,dA_y = \sigma\,x\,dy \qquad \Rightarrow \qquad dm = \sigma\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

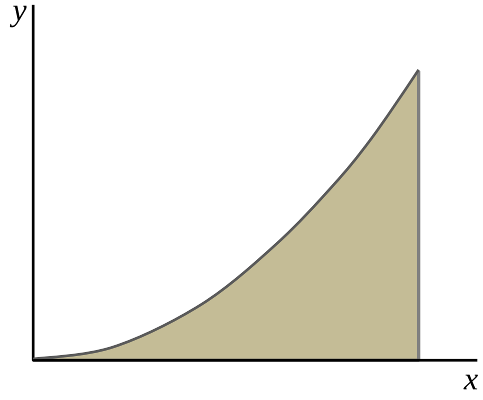
Οπότε, η συνιστώσα y_{cm} του διανύσματος της θέσης του κέντρο μάζας στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων (x, y) θα είναι ίση με:

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int_m y\,dm = \frac{1}{m}\int_0^a y\sigma\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{\sigma}{m}\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{\sigma}{m}\left(-\frac{\left(a^2-y^2\right)^{3/2}}{3}\right)_0^a \Rightarrow$$

$$y_{cm} = \frac{\sigma a^3}{3m} = \frac{(31{,}2kg/m^2)(0{,}500m)^3}{3(6{,}13kg)} \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 0{,}212m$$

ΑΣΚΗΣΗ 14:

Μια μεταλλική κατασκευή έχει δημιουργηθεί από μια αλουμινένια πλάκα που έχει επιφανειακή πυκνότητα σ=8,10 kg/m^2 και έχει τη μορφή που δείχνει το παρακάτω σχήμα:



Στο σύστημα συντεταγμένων (x, y) που έχει προκαθοριστεί, το καμπύλο τμήμα της κατασκευής είναι παραβολή και αντιστοιχεί στην εξίσωση $y=cx^2$ όπου c=0,375 m^{-1}. Το μήκος και το ύψος της κατασκευής είναι αντίστοιχα α=2,000 m και β=1,500 m, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

(α) Τη μάζα της κατασκευής.

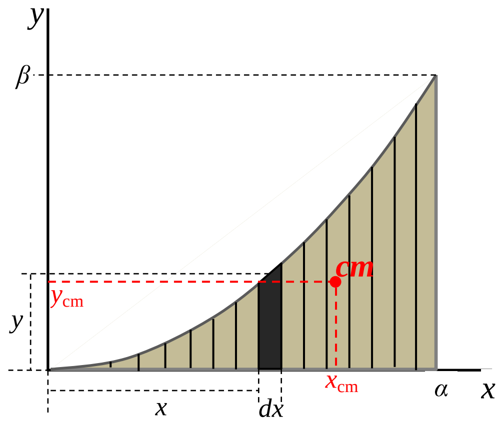
(β) Τις συντεταγμένες της θέσης του κέντρου μάζας της κατασκευής για το προκαθορισμένο σύστημα συντεταμένων (x, y).

(γ) Τις ροπές αδράνειας της κατασκευής I_y και I_x , όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από τους άξονες y και x, αντίστοιχα.

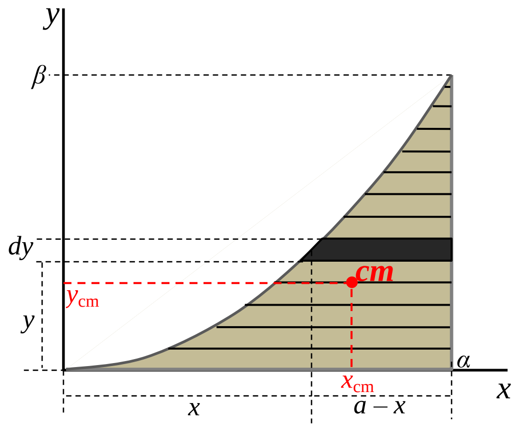
ΛΥΣΗ

(α) Υπολογισμός της μάζας της κατασκευής.

Διαιρούμε την κατασκευή σε κατακόρυφες λωρίδες στοιχειώδους πλάτους dx και ύψους y και από τις λωρίδες αυτές επιλέγουμε μια που απέχει απόσταση x από τον άξονα y (βλέπε Σχήμα 14α).



Σχήμα 14α



Σχήμα 14β

Το εμβαδό της συγκεκριμένης λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_x = y\,dx = c\,x^2\,dx \qquad (14.1)$$

όπου το y προέκυψε από το δεδομένο ότι $y=cx^2$ όπου c=0,375 m^{-1}. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας σ, η μάζα της στοιχειώδους λωρίδας είναι ίσο με:

$$dm = \sigma\,dA_x = \sigma\,y\,dx \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma\,c\,x^2\,dx \quad (14.2)$$

Με ολοκλήρωση της Σχέσης (12.2) από x=0 μέχρι x=α υπολογίζουμε τη μάζα της κατασκευής:

$$m = \int_m dm = \int_0^a \sigma\,c\,x^2\,dx = \sigma c\int_0^a x^2\,dx = \sigma c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{\sigma c \alpha^3}{3}$$

$$m = \frac{(8{,}10kg/m^2)(0{,}375m^{-1})(2{,}000m)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad m = 8{,}10\,kg \qquad (14.3)$$

(β) Υπολογισμός της συνιστώσας x_{cm}

Χρησιμοποιούμε τις κατακόρυφες λωρίδες που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της μάζας της κατασκευής. Η στοιχειώδη μάζα dm κάθε μιας από τις λωρίδες αυτές έχει μάζα dm η οποία δίνεται από τη Σχέση (14.2). Οπότε, από τη σχέση υπολογισμού της συνιστώσας x_{cm} έχουμε:

$$x_{cm}=\frac{1}{m}\int_m x\,dm=\frac{1}{m}\int_0^a x\sigma c\,x^2\,dx=\frac{\sigma c}{m}\int_0^a x^3\,dx=\frac{\sigma c}{m}\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^a \quad\Rightarrow$$

$$x_{cm}=\frac{\sigma c\,a^4}{4m}=\frac{(8{,}10kg/m^2)(0{,}375m^{-1})(2{,}000m)^4}{4(8{,}10kg)} \quad\Rightarrow\quad x_{cm}=1{,}500\,m$$

(γ) Υπολογισμός της συνιστώσας y_{cm}

Διαιρούμε την κατασκευή σε οριζόντιες στοιχειώδεις λωρίδες που έχουν πάχος *dy* και μήκος (α–*x*) και από αυτές επιλέγουμε μια τυχαία που βρίσκεται σε απόσταση *y* από τον άξονα *x* (βλέπε Σχήμα 14β). Το στοιχειώδες εμβαδό dA_y της στοιχειώδους αυτής λωρίδας είναι ίσο με:

$$dA_y=(a-x)\,dy=\left(a-\sqrt{\frac{y}{c}}\right)dy \qquad (14.4)$$

όπου το *x* προέκυψε από το δεδομένο ότι $y=cx^2$ ή ισοδύναμα, $x=(y/c)^{1/2}$. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας σ, η μάζα της στοιχειώδους αυτής λωρίδας είναι ίσο με:

$$dm=\sigma\,dA_y=\sigma\left(a-\sqrt{\frac{y}{c}}\right)dy \quad\Rightarrow\quad dm=\sigma\,a\,dy-\sigma\sqrt{\frac{y}{c}}\,dy \quad\Rightarrow$$

$$dm=\sigma\,a\,dy-\frac{\sigma}{\sqrt{c}}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy \qquad (14.5)$$

Οπότε, η συνιστώσα y_{cm} του διανύσματος της θέσης του κέντρο μάζας στο επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων (*x*, *y*) θα είναι ίση με:

$$y_{cm}=\frac{1}{m}\int_m y\,dm=\frac{1}{m}\int_0^\beta y\left(\sigma\,a\,dy-\frac{\sigma}{\sqrt{c}}y^{\frac{1}{2}}dy\right)=\frac{1}{m}\int_0^\beta \sigma\,a\,y\,dy-\frac{1}{m}\int_0^\beta\frac{\sigma}{\sqrt{c}}\,y\,y^{\frac{1}{2}}\,dy=$$

$$=\frac{\sigma a}{m}\int_0^\beta y\,dy-\frac{\sigma}{m\sqrt{c}}\int_0^\beta y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{\sigma a}{m}\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^\beta-\frac{\sigma}{m\sqrt{c}}\left.\frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_0^\beta=\frac{\sigma a\beta^2}{2m}-\frac{2\sigma}{5m\sqrt{c}}\left.y^{\frac{5}{2}}\right|_0^\beta=\frac{\sigma a\beta^2}{2m}-\frac{2\sigma\beta^{\frac{5}{2}}}{5m\sqrt{c}}$$

$$y_{cm}=\frac{\sigma a\beta^2}{2m}-\frac{2\sigma}{5m\sqrt{c}}\beta^{\frac{5}{2}}=\frac{(8{,}10kg/^2)(2{,}000m)(1{,}500m)^2}{2(8{,}10kg)}-\frac{2(8{,}10kg/m^2)}{5(8{,}10kg)\sqrt{0{,}375m^{-1}}}(1{,}500m)^{\frac{5}{2}} \quad\Rightarrow$$

$$y_{cm}=2{,}250\,m-1{,}800m \quad\Rightarrow\quad y_{cm}=0{,}450\,m$$

(δ) Υπολογισμός της ροπής αδράνειας I_y ως προς τον άξονα y.

Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας I_y της κατασκευής ως προς τον άξονα y, θεωρούμε πρώτα τη διαίρεση αυτής σε λωρίδες παράλληλες με το άξονα y (Σχήμα 14α). Από τη σχέση υπολογισμού της ροπής αδράνειας $I_y=\int_m x^2\,dm$ και από τη Σχέση (14.2) που δίνει τη στοιχειώδη μάζα dm της κατακόρυφης λωρίδας που απέχει απόσταση x από τον άξονα y, έχουμε:

$$I_y = \int_m x^2\,dm = \int_0^a x^2\,\sigma\,c\,x^2 dx = \sigma c\int_0^a x^4 dx = \sigma\,c\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^a \quad\Rightarrow\quad I_y = \frac{\sigma\,c\,a^5}{5} \quad\Rightarrow$$

$$I_y = \frac{(8{,}10kg/m^2)(0{,}375m^{-1})(2{,}000m)^5}{5} \quad\Rightarrow\quad I_y = 19{,}44\,kg\,m^2$$

(ε) Υπολογισμός της ροπής αδράνειας I_x ως προς τον άξονα x.

Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας I_x της κατασκευής ως προς τον άξονα x, θεωρούμε τη διαίρεση αυτής σε λωρίδες παράλληλες με το άξονα x (Σχήμα 14α). Από τη σχέση υπολογισμού της ροπής αδράνειας $I_x = \int_m y^2\,dm$ και από τη Σχέση (14.5) που δίνει τη στοιχειώδη μάζα dm της οριζόντιας λωρίδας που απέχει απόσταση y από τον άξονα x, έχουμε:

$$I_x = \int_m y^2\,dm = \int_0^\beta y^2\left(\sigma\,a\,dy - \frac{\sigma}{\sqrt{c}}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy\right) = \int_0^\beta \sigma\,a\,y^2 dy - \int_0^\beta \frac{\sigma}{\sqrt{c}}\,y^2 y^{\frac{1}{2}}\,dy \quad\Rightarrow$$

$$I_x = \sigma\,a\int_0^\beta y^2 dy - \frac{\sigma}{\sqrt{c}}\int_0^b y^{\frac{5}{2}}\,dy = \sigma\,a\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^\beta - \frac{\sigma}{\sqrt{c}}\left.\frac{y^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right|_0^\beta = \frac{\sigma\,a\,\beta^3}{3} - \frac{2\sigma}{7\sqrt{c}}\left.y^{\frac{7}{2}}\right|_0^b = \frac{\sigma\,a\,\beta^3}{3} - \frac{2\sigma\,\beta^{\frac{7}{2}}}{7\sqrt{c}} \quad\Rightarrow$$

$$I_x = \frac{\sigma\,a\,\beta^3}{3} - \frac{2\sigma\,\beta^{\frac{7}{2}}}{7\sqrt{c}}$$

$$I_x = \frac{(8{,}10kg/m^2)(2{,}000m)(1{,}500m)^3}{3} - \frac{2(8{,}10kg/m^2)(1{,}500m)^{\frac{7}{2}}}{7\sqrt{0{,}375m^{-1}}} \quad\Rightarrow\quad I_x = 2{,}603\,kg\,m^2$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 15</u>

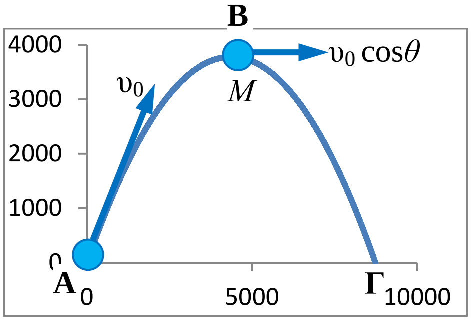
Ένα βλήμα που έχει μάζα M = 20,0 kg εκτοξεύεται με γωνία βολής θ = $60{,}0^0$ ως προς ένα οριζόντιο έδαφος και με αρχική ταχύτητα υ_0 = 315 m/s. Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, το βλήμα διασπάται σε δυο θραύσματα Α και Β τα οποία έχουν ίσες μάζες. Από τα θραύσματα αυτά, το θραύσμα Α πέφτει κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα μηδέν ενώ το θραύσμα Β συνεχίζει μια δική του τροχιά.

Δίνονται: Το βεληνεκές στην πλαγία βολή: $s = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}$ $\;και\;$ $g = 9{,}80\ m/s^2$

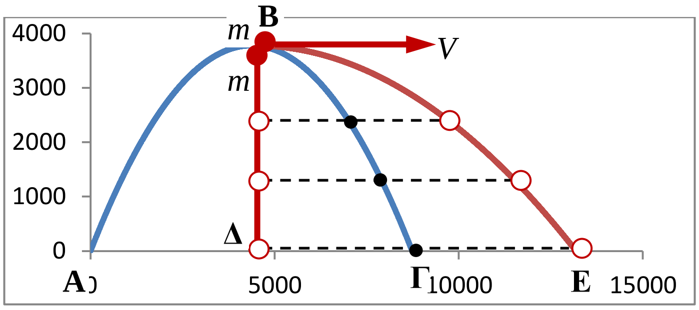
(α) Σε πόση απόσταση από το σημείο εκτόξευσης θα πέσει στο έδαφος το θραύσμα Β;

(β) Πόση ενέργεια εκλύεται από την έκρηξη που προκαλεί τη θραύση του βλήματος;

ΛΥΣΗ



(α)



(β)

(α) Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς η μάζα M διασπάται, χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης, σε δυο κομμάτια με ίσες μάζες m ($M = 2m$). Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας του συστήματος των μαζών, που προκύπτουν μετά την έκρηξη, θα συνεχίσει να διαγράφει την τροχιά (ΑΒΓ) αρχική της αρχικής πλάγιας βολής.

Τρεις σημαντικές παρατηρήσεις:

Το μέγιστο ύψος της πλάγιας βολής συμβαίνει όταν το βλήμα βρίσκεται στο μέσο του βεληνεκούς s.

Και οι δυο μάζες έχουν αρχική κατακόρυφη ταχύτητα ίση με το μηδέν. Συνεπώς, και οι δυο μάζες θα εκτελούν την ίδια ακριβώς κατακόρυφη πτώση και ως εκ τούτου σε κάθε χρονική στιγμή οι δυο μάζες θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και θα προσκρούσουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Βλέπε Σχήμα (β) της άσκησης.

Επειδή οι δυο μάζες είναι ίσες, σε κάθε χρονική στιγμή το κέντρο μάζας των δυο μαζών θα βρίσκεται ακριβώς στο μέσο του οριζόντιου διαστήματος που ενώνει τις δυο μάζες. Αυτό φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα (β) της άσκησης.

Κατά συνέπεια, η απόσταση (ΓΕ) = (ΔΓ) = (ΑΓ) = s/2 Από την τετραπλή αυτή ισότητας προκύπτει ότι το ζητούμενο διάστημα (ΑΕ) θα είναι ίσο με:

$$(\mathrm{AE}) = \frac{3s}{2} = \frac{3\upsilon_0^2 \sin(2\theta)}{2g} = \frac{3(315\ \mathrm{m})^2 \sin(120^o)}{2(9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})} \quad \Rightarrow \quad (AE) = 13200\ \mathrm{m}$$

(β) Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς, πριν από την έκρηξη, η μάζα Μ έχει μόνο οριζόντια ταχύτητα η οποία είναι ίση με $\upsilon_0 \cos\theta$, και επομένως η μάζα αυτή θα έχει ορμή:

$$p_0 = M\upsilon_0 \cos\theta \qquad (1)$$

Μετά την έκρηξη και τη διάσπαση της μάζας Μ, το κομμάτι που πέφτει κατακόρυφα στη γη έχει αρχική ταχύτητα ίση με το μηδέν και επομένως η αρχική του ορμή είναι ίση με μηδέν. Τι δεύτερο κομμάτι συνεχίζει την πορεία του με αρχική ταχύτητα V η οποία έχει οριζόντια κατεύθυνση. Η ορμή του κομματιού αυτού είναι ίση με:

$$p_1 = mV \qquad (2)$$

Επειδή η διάσπαση των μάζας Μ έγινε με εσωτερική διαδικασία και χωρίς την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$p_0 = p_1 \quad \Rightarrow \quad M\upsilon_0 \cos\theta = mV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M\upsilon_0 \cos\theta}{m} \quad \Rightarrow$$

$$V = \frac{2m(315\ m)\cos(60^0)}{m} \quad \Rightarrow \quad V = 315\ \mathrm{m}$$

Πριν την έκρηξη και τη διάσπαση της μάζας M, η κινητική ενέργεια της μάζας αυτής ήταν:

$$K_0 = \frac{1}{2}M(\upsilon_0 \cos\theta)^2 = \frac{1}{2}(20{,}0\ kg)(315\ m)^2(cos60^0)^2 \quad \Rightarrow \quad K_0 = 2480000\ J$$

Ακριβώς μετά τη διάσπαση της μάζας Μ, η κινητική ενέργεια της μάζα m που είχε ταχύτητα V = 315 m/s, είναι ίση με:

$$K_1 = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(10{,}0\ kg)(315\ m)^2 \quad \Rightarrow \quad K_0 = 49600\ \ J$$

Η ενέργεια ΔΕ που εκλύεται κατά την έκρηξη είναι ίση με:

$$\Delta E = K_0 - K_1 = 2480000 - 496125 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = 1980000\ \ \mathrm{J}$$