ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ
ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΚΑΙ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η διαφορική εξίσωση κίνησης ενός ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση: $\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+\mu x=0$. Αν η μάζα του ταλαντωτή είναι ίση με m=0.500 kg, τότε να διερευνήσετε την κίνηση του ταλαντωτή στις εξής περιπτώσεις:

α. $\lambda=0{,}250\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-2}$ β. $\lambda=7{,}85\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-1}$ γ. $\lambda=0{,}00\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-1}$.

δ. $\lambda=8{,}50\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-2}$

Λύση

<u>Πρώτα λίγη θεωρία:</u>

Η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης που εν γένει μπορεί να περιγράφει μια οποιαδήποτε αρμονική ταλάντωση με απόσβεση είναι: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι: $\lambda=\frac{b}{m}$ και $\mu=\frac{k}{m}=\omega_0^2$

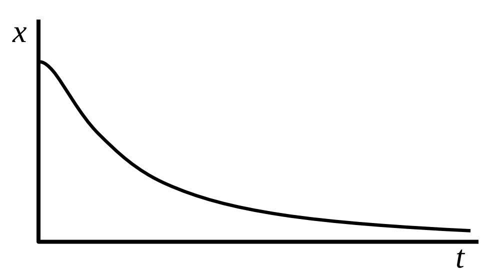
Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι μια συνάρτηση του χρόνου t η οποία αποτελεί την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή. Από τη θεωρία έχουμε την εξής διερεύνηση:

Περίπτωση 1η:

$\Omega=\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}>0$ ή ισοδύναμα: $\Omega=\frac{\lambda^2}{4}-\mu>0$ Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$$x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(ae^{\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}+\beta e^{-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}\right)\quad\Rightarrow\quad x(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}\left(ae^{\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}\right)t}+\beta e^{-\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}\right)t}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ταλάντωση. Αυτό προκύπτει από την εξίσωση κίνησης στην οποία επικρατούν οι εκθετικοί παράγοντες $e^{-\frac{\lambda}{2}t}$ και $e^{\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}\right)t}$ από τους οποίους, ο πρώτος μειώνεται εκθετικά ενώ ο δεύτερος αυξάνεται εκθετικά. Το γινόμενο των δυο αυτών παραγόντων δίνει ένα αποτέλεσμα το οποίο τελικά τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Ο τρίτος εκθετικός παράγοντας, δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα επειδή αυτός είναι προσθετικό και μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Το παρακάτω σχήμα δίνει γραφικά την εξίσωση κίνησης του αντικειμένου.



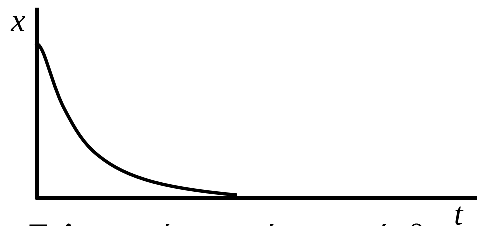
Ταλαντωτής με υπεραπόσβεση

Περίπτωση 2η:

$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$ ή ισοδύναμα: $\Omega = \frac{\lambda^2}{4} - \mu = 0$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(A + Bt) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t}(A + Bt)$

Και στην περίπτωση αυτή το αντικείμενο δεν εκτελεί ταλάντωση. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στη συγκεκριμένη εξίσωση κίνησης, η οποία περιλαμβάνει μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση και μια γραμμική αύξουσα συνάρτηση. Το γινόμενο των δυο αυτών συναρτήσεων δίνει ένα αποτέλεσμα το οποίο τείνει στο μηδέν πιο γρήγορα σε σχέση με την πρώτη περίπτωση (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



Ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση

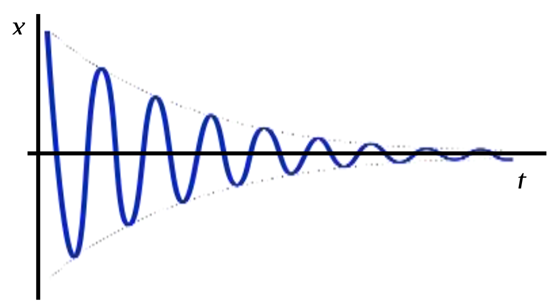
Περίπτωση 3η:

$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$ ή ισοδύναμα: $\Omega = \frac{\lambda^2}{4} - \mu < 0$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\, cos(\omega t + \varphi)$

όπου $\omega = \sqrt{-\Omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ ή ισοδύναμα: $\omega = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}}$

Το αντικείμενο εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ και με χρόνο απόσβεση $\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{\lambda}$ όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Αρμονικό ταλαντωτής με απόσβεση

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτουν και οι εξής παράμετροι της ταλάντωσης με απόσβεση:

Από τη σχέση $\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{\lambda}$ προκύπτει η σταθερά χρόνου της απόσβεσης: $\tau = \frac{1}{\lambda}$

καθώς και ο συντελεστής απόσβεσης b: $b = m\,\lambda$

Από τη σχέση $\mu = \frac{k}{m}$ προκύπτουν η ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή: $\omega_0 = \sqrt{\mu}$ καθώς και η σταθερά k του ελατηρίου: $k = m\,\mu$ και η συχνότητα του ταλαντωτή: $\omega = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}}$

Η ποιότητα συντονισμού το ταλαντωτή θα είναι ίση με: $Q = \omega_0 \tau$.

Για κάθε ζεύγος τιμών λ και μ υπολογίζουμε τη διαφορά: $\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\lambda^2}{4} - \mu$

α. $\lambda=0{,}250\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-2}$

$$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\lambda^2}{4} - \mu = \frac{(0{,}250\ s^{-1})^2}{4} - 15{,}4\ s^{-2} = -15{,}4\ s^2 < 0$$

(περίπτωση 3, Αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση, βλέπε και αντίστοιχη γραφική παράσταση).

Σταθερά χρόνου: $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}250\ s} = 4{,}00\ s$

Συντελεστής απόσβεσης: $b = m\,\lambda = (0{,}500\ kg)(0{,}250\ s^{-1}) = 0{,}125 \frac{kg}{s}$

Ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή: $\omega_0 = \sqrt{\mu} = \sqrt{15{,}4\ s^{-2}} = 3{,}92\ s^{-1}$

Συχνότητα ταλάντωσης: $\omega = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{(15{,}4\ s^{-2}) - \frac{(0{,}250\ s^{-1})^2}{4}} = \sqrt{15{,}39\ s^{-2}} = 3{,}92\ s^{-1}$

Σταθερά k του ταλαντωτή: $k = m\,\mu = (0{,}500\ kg)(15{,}4\ s^{-2}) = 7{,}70\ \mathrm{kg/s^2}$

Ποιότητα συντονισμού: $Q = \omega_0 \tau = (3{,}92\ s^{-1})(4{,}00\ s) = 15{,}7$

β. $\lambda=7{,}85\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-1}$

$$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\lambda^2}{4} - \mu = \frac{(7{,}85\ s^{-1})^2}{4} - 15{,}4\ s^{-2} = 0$$

(περίπτωση 2, Ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση, βλέπε και αντίστοιχη γραφική παράσταση).

Παράμετροι που προσδιορίζουν τον συγκεκριμένο ταλαντωτή:

Συντελεστής απόσβεσης: $b = m\,\lambda = (0{,}500\ kg)(7{,}85\ s^{-1}) = 3{,}92 \frac{kg}{s}$

Σταθερά k της ταλάντωση: $k = m\,\mu = (0{,}500\ kg)(15{,}4\ s^{-2}) = 7{,}70\ \mathrm{kg/s^2}$

γ. $\lambda=0{,}00\ s^{-1}$, $\mu=15{,}4\ s^{-1}$.

$$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\lambda^2}{4} - \mu = -15{,}4\ s^{-2} < 0$$

Παράμετροι που προσδιορίζουν τον συγκεκριμένο ταλαντωτή:

Σταθερά χρόνου: $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}00\ s} = \infty\ s$

Συντελεστής απόσβεσης: $b = m\,\lambda = (0{,}500\ kg)(0{,}000\ s^{-1}) = 0{,}00 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$

Ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή: $\omega_0 = \sqrt{\mu} = \sqrt{15{,}4\ s^{-2}} = 3{,}92\ s^{-1}$

Συχνότητα ταλάντωσης: $\omega = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{(15{,}4\ s^{-2}) - 0} = 3{,}92\ s^{-1}$

Σταθερά k του ταλαντωτή: $k = m\,\mu = (0{,}500\ kg)(15{,}4\ s^{-2}) = 7{,}70\ \mathrm{kg/s^2}$

Ποιότητα συντονισμού: $Q = \omega_0 \tau = (3{,}92\ s^{-1})(\infty\ s) = \infty$

(περίπτωση Ταλαντωτή με μηδενική απόσβεση, δηλαδή αρμονική ταλάντωση με σταθερό πλάτος).

δ. λ=8,50 s^{-1}, μ=15,4 s^{-2}

$$\Omega = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\lambda^2}{4} - \mu = \frac{(8{,}50\, s^{-1})^2}{4} - 15{,}4\, s^{-2} = 2{,}66\, s^{-1} > 0$$

(περίπτωση 1, Ταλαντωτής με υπεραπόσβεση, βλέπε και αντίστοιχη γραφική παράσταση).

Παράμετροι που προσδιορίζουν τον συγκεκριμένο ταλαντωτή:

Συντελεστής απόσβεσης: $b = m\,\lambda = (0{,}500\, kg)(8{,}50\, s^{-1}) = 4{,}25\,\frac{kg}{s}$

Σταθερά k της ταλάντωση: $k = m\,\mu = (0{,}500\, kg)(15{,}4\, s^{-2}) = 9{,}63\, kg/s^2$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το πλάτος μιας ταλάντωσης μειώνεται στο 33,3% της αρχικής τιμής του σε 10,0 s. Ποια είναι η τιμή της σταθεράς χρόνου;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

<u>Φθίνουσα ταλάντωση με 33,3% μείωση του πλάτους ταλάντωσης σε χρόνο t=10, s.</u>

$A(t) = A_0\, e^{-\frac{b}{2m}} = A_0\, e^{-\frac{t}{2\tau}}$ όπου $\tau = \dfrac{m}{b}$ είναι η σταθερά χρόνου της αποσβένουσας ταλάντωσης, m και b είναι η μάζα και η σταθερά απόσβεσης.

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ell n\left(\frac{A(t)}{A}\right) = -\frac{t}{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{t}{2\,\ell n\left(\dfrac{A(t)}{A_0}\right)}$$

Όταν t = 10,0 s τότε $\dfrac{A(t)}{A_0} = 0{,}333$, οπότε: $\tau = -\dfrac{10{,}0\, s}{2\,\ell n(0{,}333)} \quad \Rightarrow \quad \tau = 4{,}55 s$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια μάζα m = 5,00 kg είναι προσαρμοσμένη στο άκρο ενός ελατηρίου. Αν εκτρέψετε τη μάζα m από τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια την αφήσετε ελεύθερη θα παρατηρήσετε τότε ότι το σύστημα μάζα – ελατήριο θα αρχίσει να ταλαντώνετε με τέτοιο ρυθμό και τέτοια απόσβεση ώστε σε χρονικό διάστημα Δt = 1,80 s η μάζα να εκτελεί δέκα (10) πλήρεις ταλαντώσεις και το πλάτος της ταλάντωσης να μειώνεται στο 5% του αρχικού πλάτους. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραμέτρους:

α. Το συντελεστή απόσβεσης b και τη σταθερά χρόνου τ της ταλάντωσης.

β. Την πραγματική συχνότητα f και τη φυσική συχνότητα f_0 του ταλαντωτή, καθώς και τη σταθερά του ελατηρίου k.

ΛΥΣΗ

α. Τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 = t + \Delta t$ το πλάτος ταλάντωσης της μάζας m είναι αντίστοιχα:

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t_1} \quad \text{και}$$

$$A_2 = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t_2} = A_0 e^{-\frac{b}{2m}(t_1+\Delta t)} = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t_1} e^{-\frac{b}{2m}\Delta t} = A_1 e^{-\frac{b}{2m}\Delta t} \quad \Rightarrow$$

$$A_2 = A_1 e^{-\frac{b}{2m}\Delta t}$$

Από το γεγονός ότι το πλάτος A_2 είναι το 5% του πλάτους A_1 προκύπτει ότι:

$$\frac{A_2}{A_1} = 0{,}05 \quad \text{ή } \textit{ισοδύναμα} \quad \frac{A_1}{A_2} = 20$$

Οπότε:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{e^{-\frac{b}{2m}\Delta t}} = e^{\frac{b}{2m}\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \ln\left(e^{\frac{b}{2m}\Delta t}\right) = \frac{b}{2m}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{b}{2m}\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$b = \frac{2m\ \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}{\Delta t} = \frac{2(5{,}00\ \text{kg}) \ln 20}{1{,}80\ \text{s}} \quad \Rightarrow \quad \text{b} = 16{,}7\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Η σταθερά χρόνου είναι ίση με:

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{5{,}00\ \text{kg}}{16{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}} \quad \Rightarrow \quad \tau = 0{,}299\ \text{s}$$

β. Από το γεγονός ότι ο ταλαντωτής με το μηχανισμό απόσβεσης εκτελεί N = 6 ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα Δt = 1,80 s προκύπτει ότι η πραγματική περίοδος T του ταλαντωτή θα είναι ίση με:

$$T = \frac{1{,}80\ \text{s}}{10} = 0{,}180\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{\text{T}} = \frac{1}{0{,}180\ \text{s}} \quad \Rightarrow \quad f = 5{,}56\ s^{-1}$$

Η φυσική συχνότητα ή ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή προκύπτει από τη σχέση:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} \quad \Rightarrow \quad 4\pi^2 f^2 = 4\pi^2 f_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} \quad \Rightarrow \quad f^2 = f_0^2 - \frac{b^2}{4\pi^2 m^2} \quad \Rightarrow$$

$$f_0^2 = f^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 m^2} = (5{,}56\ \text{Hz})^2 + \frac{(16{,}7\ \text{kg/s})^2}{4 \times (6{,}28)^2 \times (5{,}00\ \text{kg})} = 31{,}2\ \text{s}^{-2}$$

$$f_0 = 5{,}59\ \text{Hz}$$

Από τον ορισμό της φυσικής γωνιακής συχνότητας $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow$

$$k = \omega_0^2 m = 4\pi^2 f_0^2 m = 4(3{,}14)^2 (5{,}59\ s^{-1})^2 (5{,}00\ kg) \quad \Rightarrow \quad k = 6160\ \text{N/m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Πάνω σε ένα αεροδιάδρομο ένα αντικείμενο 250 g είναι στερεωμένο σε ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 4,0 N/m. Η σταθερά απόσβεσης λόγω της αντίστασης αέρα είναι 0,015 kg/s. Το αντικείμενο σπρώχνεται 20 cm από το σημείο ισορροπίας και αφήνεται. Πόσες ταλαντώσεις θα κάνει στο χρόνο στον οποίο το πλάτος μειώνεται στο 1/3 της αρχικής του τιμής;

ΛΥΣΗ

Δεδομένα:

m =250 g, σταθερά ελατηρίου k = 4,0 N/m, σταθερά απόσβεσης b=0,015 kg/s, A_0 = 20 cm

σε πόσο χρόνο t =?? ώστε [A(t)/A_0]=1/3

Σταθερά χρόνου: $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{0,250kg}{0,015kg/s} \quad \Rightarrow \quad \tau = 16,6s$

Γωνιακή συχνότητα ταλαντωτή: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{4,0N/m}{0,25kg}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 4,0s^{-1}$

Περίοδος ταλάντωσης: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{4,0s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad T = 1,57s$

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad 3 = e^{\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ell n(3) = \ln\left(e^{\frac{t}{2\tau}}\right) \quad \Rightarrow \quad 1,1 = \frac{t}{2\tau} \quad \Rightarrow$$

$t = 2,2\tau = 2,2\times 16,6s \quad \Rightarrow \quad t = 36,5s$ στο χρόνο αυτό το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι το 1/3 του αρχικού πλάτους A_0. Δεδομένου ότι η περίοδος είναι T=1,57 s στο χρονικό διάστημα t=36,5 s θα υπάρχουν $N = \dfrac{t}{T} = \dfrac{36,5s}{1,57s} \approx 23$ ταλαντώσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια μάζα m=2,20 kg είναι αναρτημένη στο άκρο ενός ελατηρίου με περίοδο T=0,615 s. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k=250,0 N/m.

α. Η ταλάντωση της μάζας έχει απόσβεση ή όχι; Πως το αποδεικνύεται αυτό; Αν η ταλάντωση έχει απόσβεση, να υπολογίσετε τη σταθερά απόσβεσης b.

β. Η ταλάντωση της μάζας είναι χωρίς απόσβεση ή βρίσκεται σε κατάσταση κρίσιμης ή υπερκρίσιμης απόσβεσης; Πως το αποδεικνύετε αυτό;

ΛΥΣΗ

Η περίοδο T=0.615 s αντιστοιχεί σε γωνιακή συχνότητα: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.615s} \quad \Rightarrow \quad \omega = 10,2s^{-1}$

α. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα ταλαντούμενο σύστημα ελατήριο-μάζα χωρίς απόσβεση έχει γωνιακή συχνότητα: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (1)

Αντίθετα, όταν το σύστημα ελατήριο-μάζα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με συντελεστή απόσβεσης b, το σύστημα αυτό ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ (2)

Στην περίπτωση που η γωνιακή συχνότητα ω που μας δίνεται είναι ίση με την γωνιακή συχνότητα ω_0 τότε το σύστημα θα ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση.

Στην περίπτωση που η γωνιακή συχνότητα ω που μας δίνεται είναι μικρότερη από τη γωνιακή συχνότητα ω_0, τότε πρέπει να υπάρχει ένας αποσβεστικός παράγοντας b ο οποίος σύμφωνα με τη Σχέση (2) θα δίνει γωνιακή συχνότητα ω στο σύστημα ελατήριο-μάζα η οποία θα είναι μικρότερη από την ω_0.

Από τη Σχέση (1) έχουμε: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250.0N/m}{2,20kg}} \Rightarrow \omega_0 = 10,7\,s^{-1}$

Παρατηρούμε ότι $\omega<\omega_0$, οπότε για να συμβαίνει αυτό πρέπει το σύστημα ελατήριο-μάζα να εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα που δίνεται από τη Σχέση (2):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \Rightarrow b = 2m\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} = 2(2,20kg)\sqrt{\frac{250,0n/m}{2,20kg} - \left(10,2s^{-1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$b = 13,6\ kg\ s^{-1}$$

β. Η ταλάντωση του συστήματος ελατήριο-μάζα είναι απλά μια φθίνουσα ταλάντωση με σταθερά χρόνου: $\tau = \frac{m}{b} = \frac{2,20\,kg}{13,6kgs^{-1}} = 0,162\,s$

Κρίσιμη απόσβεση θα είχαμε όταν ω=0 και υπεκρίσιμη απόσβεση θα είχαμε μόνο στην περίπτωση που η μάζα κινείτο ασυμπτωτικά προς τη θέση ισορροπίας. Αυτό θα ίσχυε μόνο όταν: $\frac{k}{m} = \omega_0^2 < \omega^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια μάζα m=50,0 g ταλαντώνεται στο άκρο ενός ελατηρίου με σταθερά k=25,0 N/m. Τη χρονική στιγμή t=0 s η μετατόπιση της μάζας είναι A_0=0,300 m. Μια δύναμη αντίστασης $F_x=-bu_x$ δρα πάνω στη μάζα και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται σε A=0,100 m σε χρονικό διάστημα t=5,00 s. Να υπολογίσετε τη σταθερά χρόνου τ.

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρεία των ταλαντώσεων με απόσβεση έχουμε το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, Συγκεκριμένα ισχύει η σχέση: $A = A_0\, e^{-\frac{b}{2m}t}$ (1)

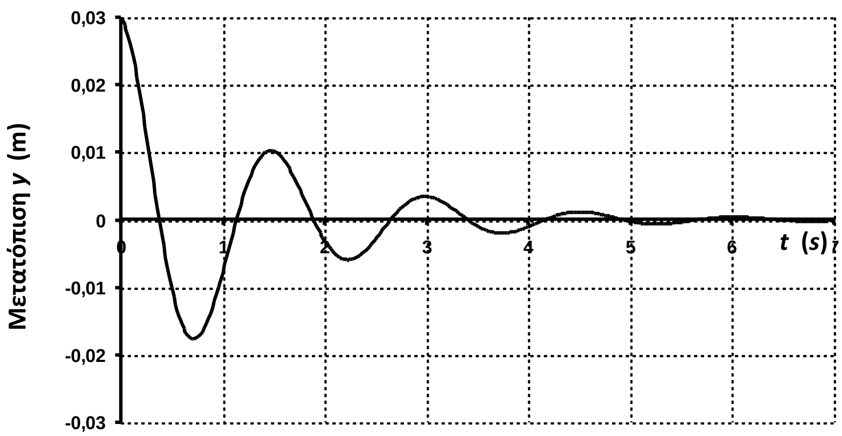
Δίνεται ότι σε χρονικό διάστημα t=5,00 s το πλάτος της ταλάντωσης από A_0=0,300 m που ήταν στη χρονική στιγμή t=0 μειώνεται στη τιμή A=0,100 m. Οπότε από τη Σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{A}{A_0}=e^{-\frac{b}{2m}t} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)=-\frac{b}{2m}t \;\Rightarrow\; b=-\frac{2m}{t}\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)=-\frac{2(0{,}050kg)}{5{,}00s}\ln\left(\frac{0{,}100}{0{,}300}\right)=0{,}0220\,kg\,s^{-1}$$

Η σταθερά χρόνου της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $\tau=\frac{m}{b}=\frac{0{,}050kg}{0{,}0220kgs^{-1}}=2{,}27\,s$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα σύστημα με μάζα m=15 kg είναι προσαρμοσμένο σε κατακόρυφο ελατήριο και εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με εξίσωση κίνησης $y=f(t)$ που ανταποκρίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση. Με τα δεδομένα της γραφικής παράστασης να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου καθώς και το συντελεστή απόσβεσης b της ταλάντωσης.



ΛΥΣΗ

Τη χρονική στιγμή t=0 το πλάτος της ταλάντωσης είναι A_0=0,03 m και σε χρονικό διάστημα $\Delta t=T$ (δηλαδή μιας περιόδου) το πλάτος μειώνεται στη τιμή A=0,01 m. Από τη γραφική παράσταση όμως προκύπτει ότι T=1,5 s. Οπότε, όπως και στην Άσκηση Σ.3, έχουμε: $A=A_0\,e^{-\frac{b}{2m}t}$ (1)

$$\frac{A}{A_0}=e^{-\frac{b}{2m}t} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)=-\frac{b}{2m}t \;\Rightarrow\; b=-\frac{2m}{t}\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)=-\frac{2(15kg)}{1{,}5s}\ln\left(\frac{0{,}01}{0{,}03}\right)=20\,kg\,s^{-1}$$

Η σταθερά χρόνου της φθίνουσας ταλάντωσης είναι: $\tau=\frac{m}{b}=\frac{15kg}{20kgs^{-1}}=0{,}75\,s$ (2)

Στη φθίνουσα ταλάντωση, η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$ (3)

Αλλά ω=2π/Τ όπου Τ=1,5 s είναι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Οπότε η Σχέση (3) γίνεται:

$$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}} \;\Rightarrow\; \frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2} \;\Rightarrow\; \frac{k}{m}=\frac{4\pi^2}{T^2}+\frac{b^2}{4m^2} \;\Rightarrow\; k=m\left(\frac{4\pi^2}{T^2}+\frac{b^2}{4m^2}\right) \;\Rightarrow$$

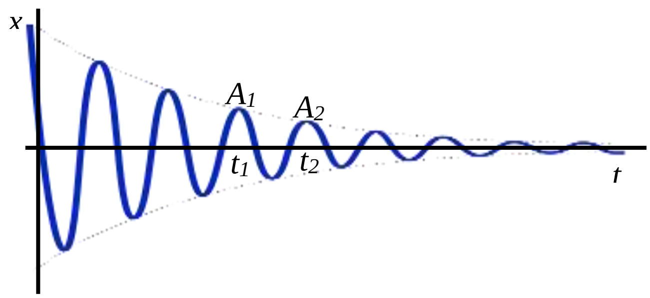
$$k = (15kg)\left(\frac{4\pi^2}{1{,}5^2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{0{,}75^2}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 270\, N/m$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Σε μια ταλάντωση με απόσβεση, να αποδείξετε ότι ο λόγος των πλατών δυο διαδοχικών περιόδων είναι σταθερός. Στην ταλάντωση αυτή είναι γνωστά η περίοδος Τ και η σταθερά χρόνου τ αυτής.

ΛΥΣΗ

Έστω t_1 και t_2 είναι οι χρονικές στιγμές στις οποίες δυο διαδοχικά πλάτη μιας οποιασδήποτε ταλάντωσης με απόσβεση είναι A_2 και A_1, αντίστοιχα.



Επειδή τα πλάτη A_1 και A_2 είναι διαδοχικά την ταλάντωση με απόσβεση, οι αντίστοιχες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 θα διαφέρουν κατά χρονικό διάστημα μιας περιόδου Τ. Συγκεκριμένα:

$$t_2 - t_1 = T \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1 + T$$

$$A_2 = A_0 e^{-\frac{t_2}{2\tau}} = A_0 e^{-\frac{t_1+T}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_0 e^{-\frac{t_1}{2\tau}}\ e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{t_1}{2\tau}}$$

Οπότε: $$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_0 e^{-\frac{t_1}{2\tau}}\ e^{-\frac{T}{2\tau}}}{A_0 e^{-\frac{t_1}{2\tau}}} = e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Σε ένα ταλαντωτή με απόσβεση ο συντελεστής ποιότητας συντονισμού Q δίνεται από τη σχέση: $Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E}$, όπου Ε είναι η μέγιστη ενέργεια του ταλαντωτή μέσα σε μια περίοδο και ΔΕ είναι η απώλεια ενέργειας του ταλαντωτή κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης περιόδου. Να αποδείξετε ότι $Q = \omega_0\tau$ όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ και τ είναι η ιδιοσυχνότητα και η σταθερά χρόνου του ταλαντωτή. Δίνεται το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

ΛΥΣΗ

Σε μια ταλάντωση με απόσβεση παίρνουμε μια οποιαδήποτε πλήρη ταλάντωση. Αν t_1 είναι η χρονική στιγμή στην οποία το πλάτος της ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή είναι E_1, τότε μετά από χρονικό διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+T$ το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή θα είναι E_2 με $E_1>E_2$. Κατά συνέπεια, η ενέργεια $E=E_1$ θα είναι η μέγιστη ενέργεια στη συγκεκριμένη πλήρη ταλάντωση που πήραμε και $\Delta E=E_1 - E_2$ θα είναι η απώλεια ενέργειας του ταλαντωτή στη συγκεκριμένη αυτή πλήρη ταλάντωση. Οπότε:

$$E_1 = E_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad \text{και} \quad E_2 = E_0 e^{-\frac{t_2}{\tau}} = E_0 e^{-\frac{t_1+T}{\tau}} \quad \Longrightarrow \quad E_2 = E_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} e^{-\frac{T}{\tau}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta E = E_1 - E_2 = E_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} - E_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} e^{-\frac{T}{\tau}} = E_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = E\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad (1)$$

Ανάπτυγμα του εκθετικού παράγοντα: $e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 + \left(-\frac{T}{\tau}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{T}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{T}{\tau}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{T}{\tau}\right)^4 + \cdots \Longrightarrow$

Για να υφίσταται αρμονική ταλάντωση με απόσβεση θα πρέπει πρακτικά η σταθερά χρόνου τ να είναι μεγαλύτερη από την περίοδο Τ της ταλάντωσης και μάλιστα θα πρέπει να λαμβάνουν χώρα δυο τουλάχιστον πλήρης ταλαντώσεις μέχρι να σταματήσει ο ταλαντωτής να ταλαντώνεται. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει $\tau>2T$. Κάτω από τη συνθήκη αυτή, οι παράγοντες του αναπτύγματος που είναι δεύτερης τάξης και πάνω γίνονται πολλές φορές μικρότεροι της μονάδας και έτσι απαλείφονται. Κατόπιν τούτου, το παραπάνω ανάπτυγμα είναι ίσο με:

$$e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 + \left(-\frac{T}{\tau}\right) \quad \Longrightarrow \quad e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 - \frac{T}{\tau}$$

Οπότε, από τη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 - \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) = 1 - 1 + \frac{T}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{T}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \frac{E}{\Delta E} = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega\,\tau}{2\pi} \quad \Longrightarrow$$

$$2\pi\frac{E}{\Delta E} = \omega\,\tau \quad \Longrightarrow \quad Q = \omega\,\tau$$

Σε μια οποιαδήποτε ταλάντωση με απόσβεση η γωνιακή συχνότητά της ω είναι πρακτικά ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή (βλέπε απόδειξη παρακάτω).

ΑΣΚΗΣΗ 10

Σε μια οποιαδήποτε ταλάντωση με απόσβεση, η γωνιακή συχνότητά της ω είναι πρακτικά ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή.

ΛΥΣΗ

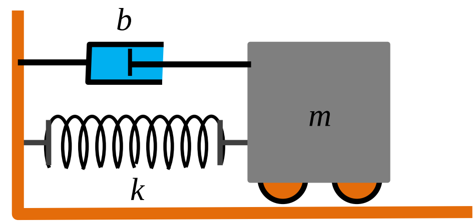
Από τη θεωρία των ταλαντώσεων με απόσβεση προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα αυτών δίνεται από τη σχέση: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{1}{4\tau^2}} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1 - \frac{T_0^2}{16\pi^2\tau^2}}$

Ακόμη και στην ακραία περίπτωση όπου η σταθερά χρόνου είναι ίση με την ιδιοπερίοδο T_0 του ταλαντωτή ($\tau=T_0$), η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι ίση με:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1 - \frac{1}{16\pi^2}} = \omega_0\sqrt{0{,}994} = 0{,}997 \times \omega_0 \cong \omega_0$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Στο διπλανό σχήμα η μάζα m = 40 kg δύναται να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k = 700 N/m και ο μηχανισμός απόσβεσης που βρίσκεται πάνω από το ελατήριο έχει σταθερά απόσβεσης b = 60 Ns/m. Η μάζα m συμπιέζει το ελατήριο και αφήνεται ελεύθερη. Να διερευνήσετε το είδος της κίνησης που θα κάνει η μάζα m.



α. Αν η μάζα m εκτελεί ταλάντωση με απόσβεση, τότε να υπολογίσετε την ακριβή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τη σταθερά χρόνου τ της απόσβεσης.

β. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b ώστε η διάταξη που απεικονίζεται στο διπλανό να είναι σε κατάσταση κρίσιμης απόσβεσης;

ΛΥΣΗ

α. Διερευνούμε την ποσότητα:

$$\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{60^2\,\frac{\mathrm{N^2 s^2}}{\mathrm{m^2}}}{40^2\,\mathrm{kg^2}} - 4 \times \frac{700\,\frac{N}{m}}{40\,kg} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = -67{,}8\,\frac{rad^2}{s^2} < 0$$

Αν $\Delta > 0$, τότε κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου το σύστημα θα επανέλθει αργά στη θέση ισορροπίας χωρίς να εκτελέσει ταλάντωση (περίπτωση υπεραπόσβεσης).

Αν $\Delta = 0$, τότε κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου, η μάζα επανέρχεται στη θέση ισορροπίας γρηγορότερα σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση (περίπτωση κρίσιμης απόσβεσης).

Στη διάταξη που διερευνούμε ισχύει $\Delta < 0$, οπότε κατά την αποσυμπίεση του ελατηρίου η μάζα θα εκτελέσει ταλάντωση με απόσβεση με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{700\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{40\,\mathrm{kg}} - \frac{60^2\,\frac{\mathrm{N^2 s^2}}{\mathrm{m^2}}}{4 \times 40^2\,\mathrm{kg^2}} = 16{,}9\,\frac{\mathrm{rad^2}}{\mathrm{s^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 4{,}11\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

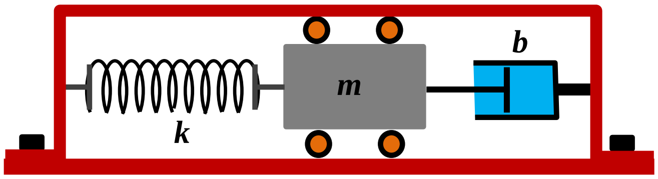
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}11\,\mathrm{rad/s}}{6{,}28\,\mathrm{rar}} \quad \Longrightarrow \quad f = 0{,}654\,\mathrm{Hz}$$

β. Για να είναι το σύστημα μάζας – ελατηρίου σε κατάσταση κρίσιμης απόσβεσης πρέπει:

$$\Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{b^2}{m^2} = 4\frac{k}{m} \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 4km \quad \Longrightarrow \quad b = 2\sqrt{km}$$

$$b = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\left(700\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(40\,\mathrm{kg})} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b} = 335\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$$

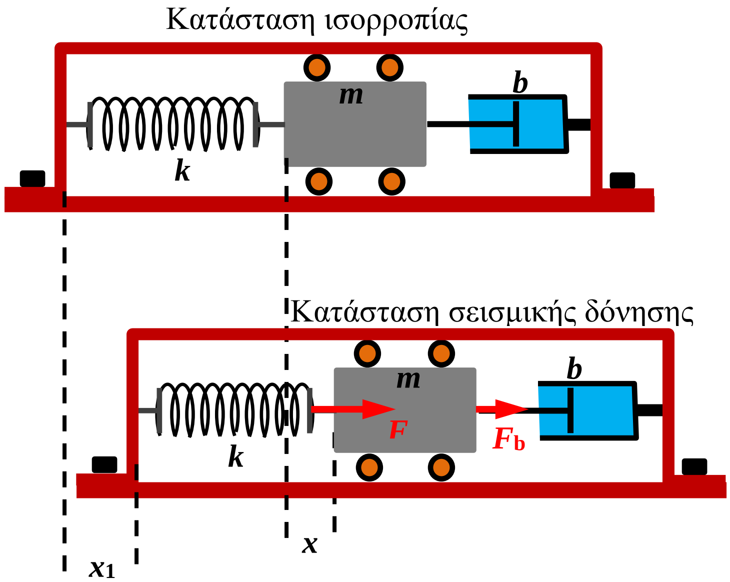
ΑΣΚΗΣΗ 12



Το διπλανό σχήμα αναπαριστά ένα σεισμογράφο. Αυτός αποτελείται από μια μάζα m η οποία δύναται να κινείται οριζόντια χωρίς τριβές μέσα σε ένα κουτί το οποίο είναι πακτωμένο σε σταθερή οριζόντια επιφάνεια. Η μάζα m είναι προσαρμοσμένη στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου ενώ η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη πάνω στο κουτί. Το σύστημα μάζα – ελατήριο φέρει ένα αποσβεστικό μηχανισμό που έχει συντελεστή απόσβεσης b. Κατά τη διάρκεια μιας σεισμικής δόνησης, το κουτί συμμετέχει στην παλινδρομική κίνηση της επιφάνειας της γης και ταλαντώνεται με πλάτος A_{01} ενώ, λόγω αδράνειας, το σύστημα μάζα – ελατήριο που βρίσκεται μέσα στο κουτί θα εκτελέσει και αυτό ταλάντωση με απόσβεση της οποίας το αρχικό πλάτος είναι A_{02}.

Ένας τέτοιος σεισμογράφος είναι τοποθετημένος στην στέγη μιας πολυκατοικίας. Η σταθερά του ελατηρίου k, η μάζα m και ο συντελεστής απόσβεσης b είναι αντίστοιχα, k = 150 N/m, m = 0,500 kg και b = 3,00 Ns/m. Σε μια σεισμική δόνηση στη διάρκεια της οποίας η πολυκατοικία ταλαντώθηκε οριζόντια με συχνότητα f = 3,00 Hz η μάζα m μέσα στο σεισμογράφο ταλαντώθηκε με μέγιστο αρχικό πλάτος A = 5,00 mm. Να υπολογίσετε τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση A_1 της στέγης της πολυκατοικίας.

ΛΥΣΗ



Κατά τη διάρκεια της σεισμικής δόνησης, η βάση στήριξης του σεισμογράφου, δηλαδή η στέγη της πολυκατοικίας, ταλαντώνεται με πλάτος A_1 ενώ η μάζα m μέσα στο σεισμογράφο ταλαντώνεται λόγω αδράνειας με πλάτος ταλάντωσης A. Σε μια χρονική στιγμή t της ταλάντωσης του συστήματος, η βάση στήριξης του σεισμογράφο θα έχει μετατοπισθεί κατά διάστημα x_1 προς τα δεξιά συμπιέζοντας λόγω αδράνειας το ελατήριο κατά διάστημα x_1, ενώ ταυτόχρονα το δεξιό τμήμα του ελατηρίου θα έχει εκτονωθεί κατά διάστημα x μετατοπίζοντας τη μάζα m κατά διάστημα x προς τα δεξιά. Αν L_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου και L είναι το μήκος του παραμορφωμένου ελατηρίου, τότε:

$$L = L_0 - x_1 + x$$

Οπότε, η ολική παραμόρφωση X του ελατηρίου θα είναι ίση με:

$$X = \Delta L = L - L_0 = -x_1 + x \quad \Longrightarrow \quad X = x - x_1$$

όπου:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \qquad (1)$$

και f είναι η συχνότητα ταλάντωσης της γης από το σεισμό. Η παραμόρφωση X προκαλεί μια δύναμη F_{sp} πάνω στη μάζα m, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\mathrm{sp}} = -kX = -k(x - x_1) = -kx + kx_1 \qquad (2)$$

Επίσης, πάνω στη μάζα ασκείται και η δύναμη αντίστασης F_b η οποία οφείλεται στον αποσβεστικό μηχανισμό b και η οποία είναι ίση με:

$$F_{\mathrm{b}} = -bv = -b\frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

όπου υ είναι η στιγμιαία ταχύτητα της μάζας m. Η συνισταμένη δύναμη F_{net} θα είναι ίση με:

$$F_{net} = F_{sp} + F_b \quad \Longrightarrow \quad ma = -kx + kx_1 - b\frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = kx_1 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_1 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}A_1 \sin \omega t \qquad (4)$$

Η Διαφορική Εξίσωση 4 είναι ακριβώς όμοια με την κλασική διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης με απόσβεση και διέγερση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

από την οποία προκύπτει η σχέση που συνδέει το πλάτος ταλάντωσης A του ταλαντωτή με τη γωνιακή συχνότητα ω του διεγέρτη:

$$A(\omega) = \frac{\frac{k}{m}A_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} = \frac{\omega_0^2 A_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} \qquad (5)$$

όπου $\quad \frac{F_0}{m} = \frac{k}{m}A_1 = \omega_0^2 A_1 \quad \kappa\alpha\iota \;\; \omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150\ N/m}{0{,}500\ kg}} \quad \Longrightarrow \quad f_0 = 2{,}76\ s^{-1}$

Δεδομένου τώρα ότι $\omega_0 = 2\pi f_0$ και $\omega = 2\pi f$, η Εξίσωση 5 γίνεται:

$$A(f) = \frac{f_0^2 A_1}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 m^2}f^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \frac{b^2}{2\pi^2 m^2}\frac{f^2}{f_0^4}}} \quad \Longrightarrow$$

$$A_1 = A(f)\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 m^2}\frac{f^2}{f_0^4}} \quad \Longrightarrow$$

$$A_1 = (5{,}00\mathrm{mm})\sqrt{\left(1-\frac{(3{,}00\ \mathrm{s}^{-1})^2}{(2{,}76\ \mathrm{s}^{-1})^2}\right)^2+\frac{\left(3{,}0\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}\right)^2}{4(3{,}14)^2(0{,}500\ \mathrm{kg})^2}\frac{(3{,}00\ \mathrm{s}^{-1})^2}{(2{,}76\ \mathrm{s}^{-1})^4}} \quad \Longrightarrow \quad A_1 = 2{,}09\ \mathrm{mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Σε ένα οικογενειακό αυτοκίνητο που έχει μάζα M = 1000 kg επιβαίνουν τέσσερεις (4) επιβάτες (μαζί με τον οδηγό) οι οποίοι έχουν συνολική μάζα m = 320 kg. Το αυτοκίνητο αυτό μαζί με τους επιβάτες πρέπει να κινηθεί σε δρόμο με «σαμαράκια» τα οποία έχουν ύψος H_{max} = 12,0 cm και απέχουν μεταξύ τους απόσταση L = 1,00 m. Να υπολογίσετε τα όρια της επιτρεπτής ταχύτητας $υ_0$ του συγκεκριμένου αυτοκινήτου ώστε αυτό να κινηθεί με ασφάλεια στο δρόμο με τα «σαμαράκια». Δίνονται οι εξής πληροφορίες:

Το βάρος του αυτοκινήτου και των επιβατών ισοκατανέμονται στους τέσσερεις τροχούς.

Προδιαγραφές αμορτισέρ: Σταθερά κάθε ελατηρίου k = 129400 N/m, συντελεστής απόσβεσης αμορτισέρ b = 5280 kg/s.

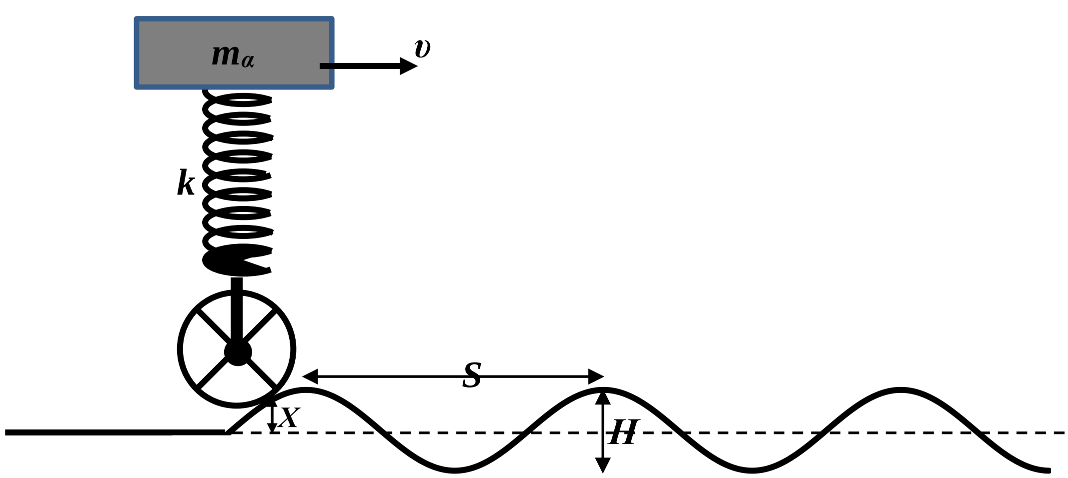
Ασφαλής είναι η κίνηση του αυτοκινήτου μαζί με τον οδηγό και τους επιβάτες όταν η παραμόρφωση (συμπίεση ή τέντωμα) των ελατηρίων των αμορτισέρ δεν ξεπερνούν την τιμή h_{max} = 5,50 cm.

Υπόδειξη: Η εξωτερική διέγερση, που προέρχεται από τα «σαμαράκια» επηρεάζει πρώτα τους δυο εμπρός τροχούς και μετά από μικρό χρονικό διάστημα επηρεάζει και του δυο πίσω τροχούς. Η λύση του προβλήματος να βασισθεί στη εξωτερική διέγερση των δυο εμπρός τροχών.

ΛΥΣΗ

Ξεκινώντας από την παραδοχή ότι το βάρος $w_{ολ}$ του αυτοκινήτου μαζί με τους επιβάτες ισοκατανέμονται στους τέσσερεις τροχούς, κάθε τροχός – αμορτισέρ του αυτοκινήτου καταπονείται από το ένα τέταρτο (1/4) της ολική μάζας του συστήματος αυτοκίνητο – επιβάτες. Συνεπώς, το κάθε σύστημα τροχός – αμορτισέρ φορτίζεται με μάζας:

$$m_a = \frac{M+m}{4} = \frac{1000\mathrm{kg}+320\mathrm{kg}}{4} \qquad \Rightarrow \qquad m_a = 330\ \mathrm{kg}$$



Καθώς το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα υ πάνω από τα σαμαράκια, ο τροχός συμπιέζει και αποσυμπιέζει το ελατήριο του αμορτισέρ με περίοδο T που είναι ίση με το χρονικό διάστημα Δt που χρειάζεται ο κάθε τροχός να διανύσει το διάστημα S μεταξύ δυο διαδοχικών σαμαρακιών. Συνεπώς, η περίοδος T συμπίεσης – αποσυμπίεσης του αμορτισέρ θα προκύπτει από τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\upsilon = \frac{S}{\Delta t} = \frac{S}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{S}{\upsilon}$$

και η γωνιακή συχνότητα ω με την οποία τα σαμαράκια συμπιέζουν και αποσυμπιέζουν το ελατήριο του αμορτισέρ θα είναι ίση με:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{S}{\upsilon}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\frac{\upsilon}{S} \qquad (1)$$

Με βάση αυτή την ανάλυση μπορούμε να προσεγγίσουμε την συμπίεση – αποσυμπίεση του ελατηρίου του αμορτισέρ, δηλαδή τη μετατόπιση X του τροχού, με την ημιτονική συνάρτηση:

$$X(t) = \frac{H}{2}\sin(\omega t) \qquad (2)$$

Η περιοδική συμπίεση – αποσυμπίεση του ελατηρίου του αμορτισέρ από τα σαμαράκια αντιστοιχεί σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση για την οποία ισχύει η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m_a}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_a}x = \frac{F_0}{m_a}\sin\omega t \qquad (3)$$

η οποία δέχεται ως λύση τη συνάρτηση:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$$

όπου:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m_a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \qquad (4)$$

όπου $\tau = \frac{m}{b}$

είναι η σταθερά χρόνου της ταλάντωσης.

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση του ελατηρίου του αμορτισέρ θα πρέπει να βρούμε τη διαφορική εξίσωση που είναι αντίστοιχη με την Εξίσωση 3 και από αυτή τη διαφορική εξίσωση θα πρέπει να βρούμε τοπ παράγοντα (F_0/m). Ήδη η γωνιακή συχνότητα ω προκύπτει από την Εξίσωση (1). Η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) ω_0 προκύπτει από τη σχέση˜

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m_\alpha} = \frac{129400\ \mathrm{N/m}}{330\ \mathrm{kg}} = 392\ \mathrm{rad^2/s^2}$$

Η σταθερά χρόνου τ του του συστήματος (ελατήριο αμορτισέρ – (¼) μάζα οχήματος με επιβάτες) προκύπτει από τη σχέση:

$$\tau = \frac{m_\alpha}{b} = \frac{330\ \mathrm{kg}}{5280\ \mathrm{kg/s}} = 0{,}0625\ \mathrm{s}$$

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το σύστημα ελατηρίου – μάζα m_α σε περιοχή του δρόμου που δεν έχει σαμαράκια όπου το ελατήριο έχει μήκος L_0 καθώς και στην περιοχή με τα σαμαράκια όπου το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά διάστημα X ενώ έχει μετατοπιστεί προς τα πάνω κατά διάστημα x. Στην περιοχή με τα σαμαράκια, το μήκος L του ελατηρίου θα είναι ίσο με:

$$L = L_0 - X + x \qquad \Rightarrow \qquad L - L_0 = -X + x$$

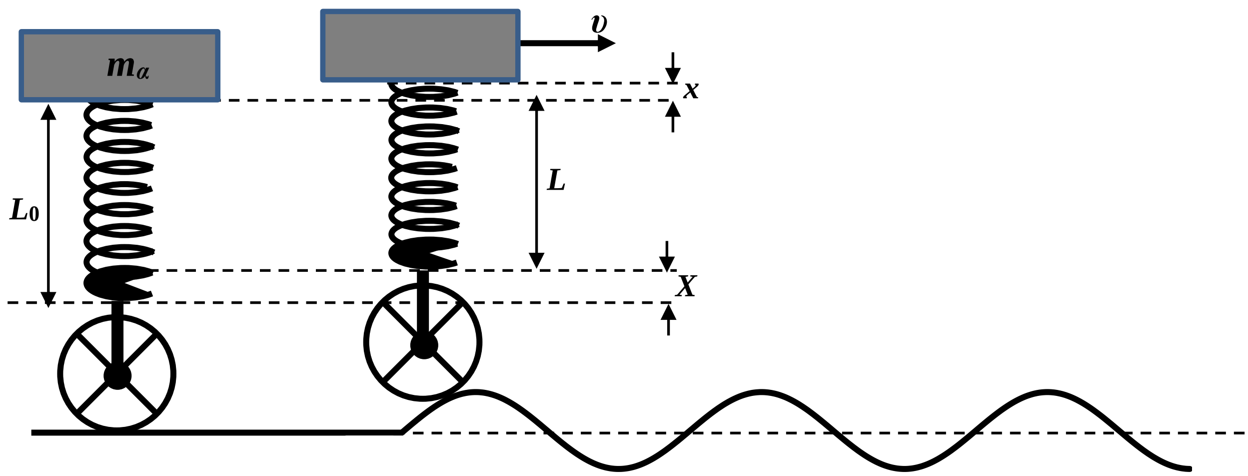
Η παραμόρφωση του ελατηρίου κατά $\Delta L = -X + x$ ασκεί πάνω στη μάζα m_α δύναμη η οποία είναι ίση με:

$$F_{sp} = -k(\Delta L) = -k(-X + x) = kX - kx \qquad (5)$$

Στη μάζα m_α ασκείται και η δύναμη αντίσταση F_d η οποία οφείλεται στη λειτουργία του αμορτισέρ. Η δύναμη αυτή αντίσταση είναι ίση με:

$$F_d = -b\upsilon_d = -d\frac{dx}{dt} \qquad (6)$$

όπου $\upsilon_d = (dx/dt)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα ταλάντωσης της μάζας m_ε που φορτίζει το ελατήριο του συγκεκριμένου αμορτισέρ.



Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα m_ε προκύπτει από τις Εξισώσεις (5) και (6) και είναι ίση με:

$$\sum F = F_{sp} + F_d = kX - kx - b\frac{dx}{dt}$$

Από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\sum F = m_\alpha \frac{d^2x}{dt^2}$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι τα δεύτερα σκέλη θα είναι ίσα:

$$m_\alpha \frac{d^2x}{dt^2} = kX - kx - b\frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad m_\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = kX \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m_\alpha}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_\alpha}x = \frac{k}{m_\alpha}X$$

Η τελευταία Εξίσωση σε συνδυασμό με την Εξίσωση (2) δίνει:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m_\alpha}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_\alpha}x = \frac{k}{m_\alpha}\frac{H}{2}\sin(\omega t + \varphi)) \qquad (7)$$

Συγκρίνοντας τη Διαφορική Εξίσωση (7) με τη Διαφορική Εξίσωση (3) προκύπτει ότι:

$$\frac{F_0}{m_a} = \frac{kH}{2m_a}$$

οπότε, το πλάτος *A* ταλάντωσης της μάζας m_α (βλέπε Εξίσωση 4) θα δίνεται από την Εξίσωση:

$$A = \frac{\frac{kH}{2m_a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \qquad (4)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης A της μάζας m_ε πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του h_{max} =5,5 cm. Δηλαδή, θα πρέπει $A \leq h_{max}$. Στην οριακή κατάσταση, η Εξίσωση (4) γίνεται:

$$h_{max} = \frac{\frac{kH}{2m_\alpha}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Στην τελευταία Εξίσωση, η μόνη άγνωστη παράμετρος είναι η γωνιακή συχνότητα ω. Αφού υπολογίσουμε το κατάλληλο ω, για να ταλαντώνεται η μάζα m_α με το μέγιστο πλάτος h_{max}=5,5 cm, υπολογίζουμε στη συνέχεια τη κατάλληλη ταχύτητα υ της μάζας m_α, δηλαδή του αυτοκινήτου, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1)

Υπολογισμός του ω:

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε διαδοχικά:

$$h_{max}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{kH}{2m_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{kH}{2m_\alpha h_{max}} \quad \Rightarrow$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} = \left(\frac{kH}{2m_\alpha h_{max}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^4 + \omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} = \left(\frac{kH}{2m_\alpha h_{max}}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \left(2\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)\omega^2 + \omega_0^4 - \left(\frac{kH}{2m_\alpha h_{max}}\right)^2 = 0$$

Η τελευταία σχέση είναι μια διτετράγωνος Εξίσωση στην οποία ω_0^2 = 392 rad²/s², τ = 0,0625 s, *k* = 129400 N/m, *H* = 12 cm, m_α = 330 kg, h_{max} = 5,5 cm.

Αντικαθιστώντας τις παραμέτρους αυτές στη διτετράγωνο εξίσωση παίρνουμς:

$$\omega^4 - 528\omega^2 - 2{,}93 \times 10^4 = 0$$

Θέτουμε $\omega^2 = \rho$, οπότε η διτετράγωνος εξίσωση γίνεται:

$$\rho^2 - 528\rho - 2{,}93 \times 10^4 = 0$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ρ έχει δυο ετερώνυμες ρίζες από τις οποίες κρατάμε τη θετική:

$$\rho = \omega^2 = \frac{528 + \sqrt{528^2 + 4 \times 2{,}93 \times 10^4}}{2} = 579\,\frac{\mathrm{rad}^2}{\mathrm{s}^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{579\,\frac{\mathrm{rad}^2}{\mathrm{s}^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = 24{,}1 \text{ rad/s}$$

Οπότε από την Εξίσωση 1 έχουμε:

$$\omega = 2\pi\frac{\upsilon}{S} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{\omega S}{2\pi} = \frac{(24{,}1\ \text{rad/s})(1{,}00\ \text{m})}{6{,}28} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 3{,}84\frac{m}{s} = 13{,}8\ km/h$$

Στη περιοχή των σαμαρακιών θα πρέπει να υπάρχει σήμανση της τροχαίας με την ένδειξη 10 km/h μέσα σε κόκκινο κύκλο.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Οι σεισμολόγοι και οι γεωφυσικοί έχουν προσδιορίσει ότι αν η γη δονηθεί, τότε η ταλάντωση που διεγείρεται έχει περίοδο συντονισμού T=54 min και ποιότητα συντονισμού Q=400. Μετά από ένα δυνατό σεισμό, η γη θα συνεχίσει να δονείται για δυο (2) περίπου μήνες.

α. Να υπολογίσετε το ποσοστό της ενέργειας της ταλάντωσης που χάνεται σε χρονικό διάστημα μιας πλήρους ταλάντωσης, δηλαδή σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου T.

β. Να αποδείξετε ότι μετά από n περιόδους η ενέργεια ταλάντωσης της γης δίνεται από τη σχέση $E_n=(0.984)^n E_0$.

γ. Αν η αρχική ενέργεια που εκλύεται από τη σεισμική δόνηση είναι E_0, πόση θα είναι η ενέργεια της σεισμικής ταλάντωσης μετά από 2.0 ημέρες;

Δίνεται το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

ΛΥΣΗ

α. Ορισμός του συντελεστή ποιότητας Q της ταλάντωσης με απόσβεση: $Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} \quad \Longrightarrow$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q} = \frac{2\pi}{400} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} = 0{,}0157 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta E}{E} = 1{,}57\%$$

β. Για τον συντελεστή ποιότητας Q μιας ταλάντωσης με απόσβεση ισχύει: $Q = \omega_0 \tau \quad \Longrightarrow$

Σταθερά χρόνου της ταλάντωσης της γης:

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{Q}{\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{Q}{2\pi}T_0 = \frac{500}{2\pi}54\ \text{min} \quad \Longrightarrow \quad \tau = 3440\ min$$

Μετά από n πλήρης ταλαντώσεις, δηλαδή μετά από χρονικό διάστημα t=nT η ενέργεια ταλάντωσης της γης E_n θα είναι ίση με:

$$E_n = E_0 e^{-\frac{nT}{\tau}} = E_0\left(e^{-\frac{T}{\tau}}\right)^n = E_0\left(1 + \left(-\frac{T}{\tau}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{T}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{T}{\tau}\right)^3 + \cdots\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας:

$$\frac{T}{\tau} = \frac{54\ \text{min}}{3440\ \text{min}} = 0{,}0157 \ll 1$$

Για το λόγο αυτό, οι παράγοντες του παραπάνω αναπτύγματος που είναι δεύτερης τάξης και πάνω απαλείφονται επειδή πρακτικά είναι ίσοι με το μηδέν. Κατόπιν τούτου, έχουμε:

$$E_n = E_0\left(1 + \left(-\frac{T}{\tau}\right)\right)^n = E_0\left(1 - \frac{T}{\tau}\right)^n = E_0\left(1 - \frac{54\ \text{min}}{3440\ \text{min}}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad E_n = E_0(0{,}984)^n$$

γ. Το χρονικό διάστημα των δυο ημερών σε λεπτά είναι ίσο με:

$$\Delta t = (2\ \text{ημέρες}) \times \left(24\frac{\text{ώρες}}{\text{ημέρα}}\right) \times \left(60\frac{\text{min}}{\text{ώρα}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = 2880\ \text{min}$$

Στο χρονικό αυτό διάστημα έλαβαν χώρα n πλήρεις ταλαντώσεις οι οποίες διάρκεσαν χρονικό διάστημα n περιόδων. Με βάση το συλλογισμό αυτό έχουμε:

$$t = nT \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2880\ \text{min}}{54\ \text{min}} \quad \Longrightarrow \quad n = 53{,}3$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β), η ενέργεια των ταλαντώσεων της γης μετά από δυο ημέρες θα είναι ίση με:

$$E_n = E_0(0{,}984)^n = E_0(0{,}984)^{53{,}3} \quad \Longrightarrow \quad E_n = 0{,}424\ E_0$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Καλείστε ως μηχανικοί να υπολογίσετε το ιξώδες ενός τύπου λαδιού με την εξής μέθοδο:

Το ιξώδες ενός ρευστού μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας ένα ταλαντωτή ο οποίος ταλαντώνεται μέσα στο συγκεκριμένο ρευστό. Υποθέστε ότι ο ταλαντωτής που θα χρησιμοποιήσετε είναι μια χαλύβδινη σφαίρα που έχει ακτίνα r = 6,00 cm και η οποία είναι προσαρμοσμένη στο άκρο ενός ελατηρίου που έχει σταθερά k = 10,0 N/cm και η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο λάδι που σας έχουν δώσει. Εκτρέπετε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπία, εκτείνοντας ή συμπιέζοντας το ελατήριο κατά διάστημα A_0 και στη συνέχεια αφήνετε το σύστημα ελατηρίου – χαλύβδινης σφαίρας να ταλαντωθεί ελεύθερα. Μετά από χρονικό διάστημα οχτώ περιόδων ταλάντωσης (t = 8T) παρατηρείτε ότι το πλάτος A ταλάντωσης της χαλύβδινης σφαίρας έχει μειωθεί στο 50% του αρχικού πλάτους A_0. Με βάση τα δεδομένα αυτά να υπολογίσετε:

α. Το ιξώδες του λαδιού που σας έδωσαν.

β. Τον παράγοντα Q (ποιότητα συντονισμού) του ταλαντωτή που χρησιμοποιήσατε.

Δίνονται επίσης: Η ταχύτητα υ της ταλαντευόμενης σφαίρας μέσα σε ρευστό είναι σχετικά μικρή, οπότε η οπισθέλκουσα δύναμη (δύναμη εσωτερικής τριβής) που ασκεί το ρευστό πάνω στη σφαίρα είναι ανάλογη με την ταχύτητα υ: F_d=6$\pi\eta r\upsilon$ (νόμος του Stokes), όπου η είναι το ιξώδες του ρευστού και r είναι η ακτίνα της σφαίρας. Η πυκνότητα του χάλυβα: ρ=7,80 g/cm^3.

ΛΥΣΗ

α. Σε κάθε ταλάντωση με απόσβεση θεωρούμε ότι το μέτρο της δύναμη αντίστασης (οπισθέλκουσας δύναμης) η οποία είναι υπεύθυνη για τις απώλειες ενέργειας του ταλαντωτή είναι ανάλογη με την ταχύτητα του ταλαντωτή: $F_d = b\upsilon$ (1)

Στην περίπτωση που ο ταλαντωτής είναι σφαίρα ακτίνας r η δύναμη αντίστασης δίνεται από το νόμο του Stokes και είναι ίση με: $F_d = 6\pi\eta r\upsilon$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι: $b = 6\pi\eta r$ (3)

Από τη θεωρία όμως έχουμε ότι η σταθερά χρόνου τ της ταλάντωσης είναι ίση με:

$$\tau = \frac{m}{b} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta r} \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{m}{6\pi\tau r} \qquad (5)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τη μάζα της χαλύβδινης σφαίρας καθώς και σταθερά χρόνου τ.

Η πυκνότητας μάζας ρ ομογενούς σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Longrightarrow \quad m = \rho V \quad \Longrightarrow \quad m = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

όπου ο όγκος σφαίρας ακτίνας r είναι ίσο με: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$$m = (7800\, kg/m^3)\frac{4\pi \times (0{,}0600\, m)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad m = 7{,}057\, kg$$

Για τον υπολογισμό της σταθεράς χρόνου θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται στο 50% του αρχικού πλάτους A_0 σε χρονικό διάστημα οχτώ περιόδων. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι

$$\frac{A}{A_0} = 0{,}5 \qquad (6)$$

Από την εξίσωση που δίνει το πλάτος ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου σε μια ταλάντωσης με απόσβεση έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_0} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = e^{-\frac{8T}{2\tau}} \qquad (7)$$

Από την εξίσωση που δίνει τη γωνιακή συχνότητα ενός ταλαντωτή που έχει μάζα m και ταλαντώνεται σε ελατήριο με σταθερά k, υπολογίζουμε την περίοδο της ταλάντωσης:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{7{,}057\, kg}{1000\, N/m}} \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}5276\, s$$

Γνωρίζοντας πλέον την περίοδο T του ταλαντωτή, από την Εξίσωση 7 με λογαρίθμιση υπολογίζουμε τη σταθερά χρόνου τ:

$$\ln 0{,}5 = \ln\left(e^{-\frac{8T}{2\tau}}\right) = -\frac{8T}{2\tau} = -\frac{4T}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{4T}{\ln 0{,}5} = \frac{4 \times 0{,}5276\, s}{(0{,}6931)} \quad \Rightarrow \quad \tau = 3{,}045\, s$$

Οπότε, η σχέση (5) μας δίνει:

$$\eta = \frac{m}{6\pi\tau r} = \frac{7{,}057\, kg}{6\pi \times (3{,}045\, s) \times (0{,}0600\, m)} \quad \Longrightarrow \quad \eta = 2{,}040\, \frac{kg}{ms}$$

β. Ο συντελεστής ποιότητας Q δίνεται από τη σχέση: $Q = \omega_0 \tau = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\tau \quad \Longrightarrow$

$$Q = \omega_0 \tau = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \tau = \sqrt{\frac{1000\, N/m}{7{,}057\, kg}}(3{,}045 s) \quad \Longrightarrow \quad Q = 36{,}25$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Αν το πλάτος μιας αρμονικής ταλάντωσης με απόσβεση μειώνεται στο 1/e του αρχικού πλάτους A_0 (δηλαδή A=A/e) μέσα σε n περιόδους όπου n>1, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος της περιόδου T της συγκεκριμένης αυτής ταλάντωσης δια την περίοδο T_0 της ταλάντωσης χωρίς απόσβεση είναι ίσος με: $\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$

ΛΥΣΗ

Αν η σταθερά χρόνου (δηλαδή ο χρόνος απόσβεσης) της συγκεκριμένης ταλάντωσης είναι τ, τότε σε χρονικό διάστημα Δt=nT, όπου n>1 και T η περίοδος της ταλάντωσης, το πλάτος το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με:

$$A = A_0 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau}} = A_0 e^{-\frac{nT}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_0} = e^{-\frac{nT}{2\tau}}$$

Επειδή όμως μας δίνεται ότι: $\frac{A}{A_0} = \frac{1}{e}$ η προηγούμενη σχέση γίνεται: $\frac{A}{A_0} = e^{-\frac{nT}{2\tau}} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow$

$$e^{\frac{nT}{2\tau}} = e \quad \Rightarrow \quad \ln e^{\frac{nT}{2\tau}} = \ln e \quad \Rightarrow \quad \frac{nT}{2\tau} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{2\tau} = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Η γωνιακή συχνότητα ω ενός ταλαντωτή με απόσβεση είναι ίση με: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$ (2)

Θέτουμε στη σχέση (2) ω=2π/T και ω_0=2π/T_0:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{1}{4\tau^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{1}{4\tau^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{4\tau^2} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο σκέλη της σχέσης (3) επί $\frac{T^2}{4\pi^2}$, οπότε έχουμε:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = 1 + \frac{T^2}{16\pi^2\tau^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2}\frac{T^2}{4\tau^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{T}{2\tau}\right)^2 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

Επειδή n>1, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $4\pi^2 n^2 \gg 1$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{4\pi^2 n^2} \ll 1$ (6)

Ισχύει η ταυτότητα: αν $x \ll 1 \quad \Rightarrow \quad (1 \pm x)^n \cong 1 \pm nx$

Με βάση την ταυτότητα αυτή και με δεδομένη ότι ισχύει η σχέση (6), η σχέση (5) γίνεται:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi^2 n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση που n=1, ο παράγοντας $(1/8\pi^2)$<<1, οπότε ισχύει πρακτικά:

$$T = T_0 \ \text{ ή } \mathit{ισοδύναμα} \ \ \omega = \omega_0$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Ένα αντικείμενο που έχει μάζα m=2.00 kg ταλαντώνεται στο άκρο ενός ελατηρίου που έχει σταθερά k=400 N/m. Ο συγκεκριμένος ταλαντωτής έχει μια σταθερά απόσβεσης b=2.00 kg/s και διεγείρεται από μια δύναμη η οποία μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $F=F_0 \sin(\omega t)$, όπου F_0=10.0 N και ω=10.0 rad/s.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του αντικειμένου.

β. Εάν μεταβάλλετε τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης, τότε σε ποια συχνότητα θα παρατηρήσετε το συντονισμό;

γ. Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή στην κατάσταση του συντονισμού.

δ. Να υπολογίσετε το εύρος Δω της καμπύλης συντονισμού.

ΛΥΣΗ

α. $A(\omega) = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}$ όπου: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad και \quad$ $\frac{1}{\tau^2} = \frac{b^2}{m^2}$. Οπότε:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+b^2\omega^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+b^2\omega^2}} \quad \Longrightarrow$$

Στη γωνιακή συχνότητα ω=10,0 rad/s του διεγέρτη, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A(10{,}0\text{rad/s}) = \frac{10{,}0\ \text{N}}{\sqrt{(400\ \text{N/m} - (2{,}00\ \text{kg})(10{,}0\ \text{rad/s})^2)^2 + (2{,}00\ \text{kg/s})^2(10{,}0\ \text{rad/s})^2}}$$

$$A\left(\omega = 10{,}0\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 0{,}0498\ m \quad ή \quad A\left(\omega = 10{,}0\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 4{,}98\ \text{cm}$$

β. Σε κάθε ταλάντωση με εξωτερική διέγερση, ο συντονισμός παρατηρείται όταν η γωνιακή συχνότητα ω του διεγέρτη είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα συντονισμού ω_0 του ταλαντωτή:

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\ \text{N/m}}{2{,}00\ \text{kg}}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 14{,}1\ r\text{ad/s}$$

γ. Στην κατάσταση συντονισμού:

$$A_{max} = A(\omega = \omega_0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\frac{b^2}{m^2}\omega_0^2}} \quad \Longrightarrow \quad A_{max} = \frac{F_0}{b\omega_0} = \frac{10{,}0\ \text{N}}{\left(2{,}00\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)(14{,}1\frac{\text{rad}}{\text{s}})} \quad \Longrightarrow$$

$$A_{max} = 0{,}355\ \text{m} \quad ή \quad A_{max} = 35{,}5\ \text{cm}$$

δ. Συντελεστής ποιότητας του συντονισμού: $Q = \omega_0\tau$

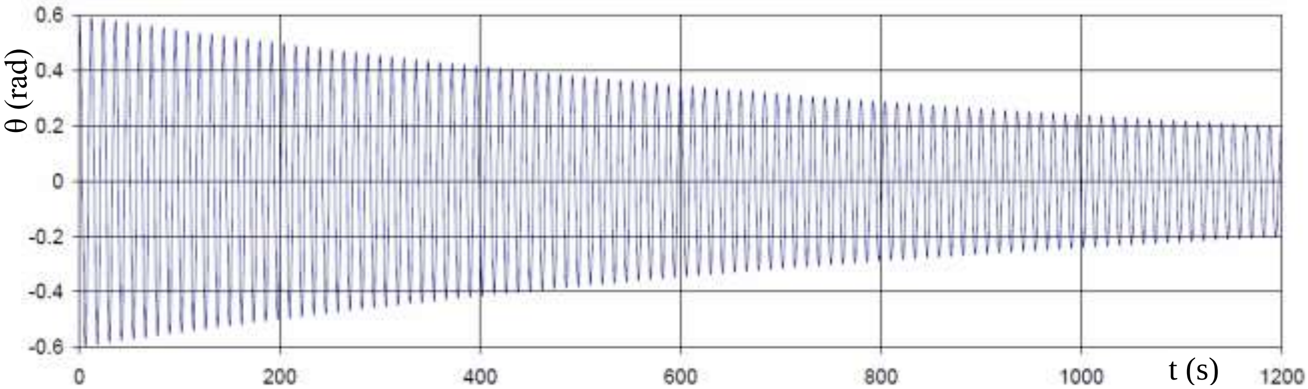
όπου ω_0=14,1 rad/s και $\tau = \frac{m}{b} = \frac{2{,}00\ \text{kg}}{2{,}00\ \text{kg/s}} = 1{,}00\ \text{s}$

Οπότε: $Q = \omega_0\tau = (14{,}1\text{rad/s})(1{,}00\text{s}) \quad \Longrightarrow \quad Q = 14{,}1$

Εξ ορισμού όμως: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{14{,}1\ \text{rad/s}}{14{,}1} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega = 1{,}00\ \text{rad/s}$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ένα φυσικό εκκρεμές εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση με απόσβεση. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της γωνίας εκτροπής σε rad του εκκρεμούς συναρτήσει του χρόνου. Η ροπή αδράνειας του φυσικού εκκρεμούς ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=5.90\text{x}10^{-5}$ kg m^2:



α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τη σταθερά ροπή επαναφοράς D του φυσικού εκκρεμούς (ροπή επαναφοράς ανά μονάδα γωνιακής μετατόπισης, δηλαδή το αντίστοιχο της σταθεράς ελατηρίου).

β. Να υπολογίσετε το συντελεστή ποιότητας Q του ταλαντωτή.

ΛΥΣΗ

α. Υπολογισμός της περιόδου Τ και της γωνιακής συχνότητας ω του φυσικού εκκρεμούς:

Στο γράφημα θ=f(t) του φυσικού εκκρεμούς μετρούμε n=50 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα Δt=600 s. Από την παρατήρηση ατή προκύπτει η περίοδος ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς:

$$T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{600\ s}{50} \quad \Longrightarrow \quad T = 12{,}0\ s$$

Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12{,}0 s} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 0{,}523\ s^{-1}$$

Η σταθερά ροπή επαναφοράς του φυσικού εκκρεμούς προκύπτει ως εξής:

Η ροπή επαναφοράς τ του φυσικού εκκρεμούς είναι ανάλογη της γωνίας εκτροπής θ αυτού:

$$\tau = -D\,\theta \qquad (1)$$

όπου D είναι η ζητούμενη σταθερά ροπή επαναφοράς και $\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Οπότε, η σχέση (1) γίνεται: $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -D\,\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I}\,\theta = 0$

Ο συντελεστή D/I της γωνίας εκτροπής θ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ίση με το τετράγωνο της γωνιακής ιδιοσυχνότητας ω_0 του φυσικού εκκρεμούς. Αποδείξαμε στις ασκήσεις 9 και 12 ότι, σε μια ταλάντωση με απόσβεση, στην οποία η σταθερά χρόνου τ είναι πολλές φορές μεγαλύτερη από την περίοδο Τ της ταλάντωσης, η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης με απόσβεση είναι ίση με τη γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή ($\omega=\omega_0$). Κατόπιν τούτων, ο συντελεστής D/I στην παραπάνω διαφορική εξίσωση θα είναι ίση με:

$$\omega^2 = \frac{D}{I} \quad \Longrightarrow \quad D = \omega^2 I = (0{,}523\ s^{-1})^2(5{,}90 \times 10^{-5} kg\ m^2) \quad \Longrightarrow \quad D = 1{,}61 \times 10^{-5} kg\ m^2/s^2$$

β. Υπολογισμός του συντελεστή ποιότητας Q:

Το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι A_0=0,60 rad

Από τη γραφική παράσταση θ=f(t) που δίνεται, προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t=1200 s το πλάτος της ταλάντωσης είναι A=0,20 rad.

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A(t)}{A_0} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}20\, rad}{0{,}60\, rad} = e^{-\frac{1200\, s}{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}60}{0{,}20} = e^{\frac{1200\, s}{2\tau}} \quad \Rightarrow$$

$$\ln(3{,}00) = \ln\left(e^{\frac{1200\, s}{2\tau}}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln(3{,}00) = \frac{1200\, s}{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1200\, s}{2\, \ln(3{,}00)} \quad \Rightarrow \quad \tau = 546\, s$$

$$Q = \omega_0 \tau = (0{,}523\, s^{-1})(546\, s) \quad \Rightarrow \quad Q = 286$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Σε ένα ταλαντωτή με πολύ ασθενή απόσβεση, όπου ο συντελεστής απόσβεσης *b* είναι πολύ μικρός:

α. Να αποδείξετε ότι, η αλλαγή $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ της γωνιακής συχνότητας, εξαιτίας της απόσβεσης, είναι περίπου $\omega_0/8Q^2$.

β. Αν η απόσβεση μειώνει τη γωνιακή συχνότητα ενός ταλαντωτής κατά 0,0001%, τότε ποια είναι η τιμή Q του συντελεστή ποιότητας;

γ. Σε πόσες πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά 25%;

ΛΥΣΗ

α. Η γωνιακή συχνότητα κάθε ταλάντωσης με απόσβεση είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \qquad (1)$$

$\acute{o}\pi o\upsilon \quad \tau = \dfrac{m}{b}$ είναι η σταθερά χρόνου της ταλάντωσης

ω, m και *b* είναι η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα), η μάζα και ο συντελεστής απόσβεσης του ταλαντωτή, αντίστοιχα. Σε κάθε ταλάντωση με απόσβεσης, ο συντελεστής ποιότητας Q της ταλάντωση είναι ίσος με:

$$Q = \omega_0 \tau \qquad (2)$$

Δεδομένου ότι η ταλάντωση έχει ασθενή απόσβεση, η σταθερά χρόνου τ πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη από την περίοδο *T* της ταλάντωσης, ή ισοδύναμα, το 1/τ πρέπει να είναι πολλές φορές μικρότερο από τη συχνότητα *f* της ταλάντωσης. Με άλλα λόγια, θα πρέπει η γωνιακή συχνότητα ω του ταλαντωτή να προσεγγίζει την ιδιοσυχνότητα ω_0. Με βάση το συλλογισμό αυτό, από την Εξίσωση 1 έχουμε:

$$\omega \to \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \to \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\tau^2} \ll \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\tau^2\omega_0^2} \ll 1 \qquad (3)$$

Η Ανισότητα 3 σε συνδυασμό με την Εξίσωση 2 δίνει:

$$\frac{1}{4Q^2} \ll 1 \qquad (4)$$

Οπότε:

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega = \omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \omega_0 - \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\tau^2\omega_0^2}} = \omega_0 - \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_0\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 - \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4Q^2}\right) = \omega_0 - \omega_0 + \frac{\omega_0}{8Q^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{8Q^2} \qquad (5)$$

Έγινε χρήση της προσέγγισης μικρών αριθμών:

$$A\nu \;\; x \ll 1 \quad \Rightarrow \quad (1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$$

β. Από το γεγονός ότι η απόσβεση προκαλεί 0,0001% μείωση στη τιμή της γωνιακής συχνότητας ω_0 η Εξίσωση 5 δίνει:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0{,}000001 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\omega_0}{8Q^2}}{\omega_0} = 0{,}000001 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{8Q^2} = 0{,}000001 \quad \Rightarrow \quad 8Q^2 = 1000000$$

$$Q = 354 \qquad (6)$$

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή είναι:

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} \qquad (7)$$

Τη χρονική στιγμή t2, μετά από *N* περίοδοι της ταλάντωσης, δηλαδή μετά από χρονικό διάστημα *NT*, το πλάτος της ταλάντωσης του ταλαντωτή θα είναι ίσο με:

$$A_2 = A_0 e^{-\frac{t_2}{\tau}} = A_0 e^{-\frac{t_1 + NT}{\tau}} \qquad (8)$$

Από τις Εξισώσεις 7 και 8 προκύπτει η σχετική μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης (η οποία είναι ίση με 25%):

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} - A_0 e^{-\frac{t_1+NT}{\tau}}}{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = \frac{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} - A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} e^{-\frac{NT}{\tau}}}{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = \frac{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{NT}{\tau}}\right)}{A_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 1 - e^{-\frac{NT}{\tau}} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{NT}{\tau}} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(e^{-\frac{NT}{\tau}}\right) = \ln(0{,}75) \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{NT}{\tau} = -0{,}288 \quad \Rightarrow \quad N = 0{,}288\,\frac{\tau}{T} = 0{,}288\,\tau f = \frac{0{,}288}{2\pi}\,\tau 2\pi f = \frac{0{,}288}{2\pi}\,\tau 2\pi f$$

$$N = \frac{0{,}288}{2\pi}\tau\omega = \frac{0{,}288}{2\pi}Q = \frac{0{,}288}{2\pi}354 \quad \Rightarrow \quad N = 16 \;\; \text{πλήρης ταλαντώσεις}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Ένας ταλαντωτής με ασθενή απόσβεση έχει μάζα *m*, σταθερά ελατηρίου *k* και συντελεστή απόσβεσης *b*. Να αποδείξετε ότι σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός απωλειών ενέργειας από τον ταλαντωτή είναι ίσος με $bυ^2$ (σε J/s), όπου υ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του ταλαντωτή.