ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΜΗΣ – ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΓΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που απαιτείται για να σπάσει το κόκαλο της κνήμης (το καλάμι του ποδιού) στο κατώτερο σημείο του ποδιού είναι περίπου $T=(F/A)=1{,}6\times10^8\ N/m^2$. Η ελάχιστη ενεργός διατομή του οστού της κνήμης είναι περίπου $A_{min}=3{,}2\ cm^2$ και βρίσκεται λίγο πιο πάνω από τον αστράγαλο. Υποθέστε ότι ένας αθλητής που έχει μάζα m=60 kg πηδά στο έδαφος από ένα ύψος $h_0=2{,}0$ m και απορροφά τον κραδασμό της πρόσκρουσης με το έδαφος κάμπτοντας τα γόνατά του. Υποθέστε ότι η επιβράδυνση κατά τη διάρκεια της πρόσκρουση με το έδαφος είναι σταθερή. Κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος, ο αθλητής χαμηλώνει το κέντρο μάζας του κατά Δd= -1,0 cm. Να υπολογίσετε:

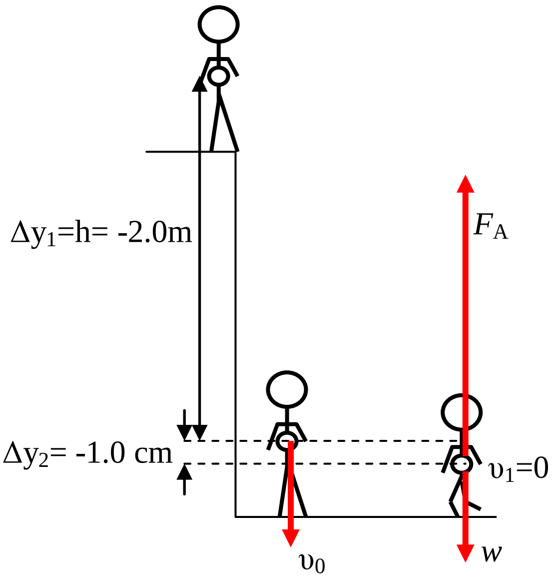
Α) Το χρονικό διάστημα Δt που διαρκεί η κρούση του αθλητή με το έδαφος.

Β) Τη μέση δύναμη που ασκεί το έδαφος στα πόδια του αθλητή κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος.

Γ) Το λόγο της μέσης δύναμης που ασκεί το έδαφος πάνω στα πόδια του αθλητή προς το βάρος του αθλητή. Μπορούμε φαινομενικά να αγνοήσουμε το βάρος του αθλητή κατά την πρόσκρουσή του στο έδαφος..

Δ) Θα σπάσει το κόκαλο της κνήμης του αθλητή;

ΛΥΣΗ



Α) Στην ελεύθερη πτώση του αθλητή από ύψος $\Delta y_1=h=2.0$m το έργο του βάρους W_g του αθλητή είναι θετικό (επειδή η φορά κίνησης και η φορά του βάρους είναι ίδιες), οπότε από το θεώρημα Έργου – Κινητικής Ενέργειας θα έχουμε:

$$W_g = \Delta K \quad \Rightarrow \quad mg\Delta y_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - 0 \quad \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = -\sqrt{2gh} \qquad (1.1)$$

(g<0 και h<0, οπότε gh>0)

Στο διάστημα Δy_2, η ταχύτητα του αθλητή από υ_0 γίνεται $\upsilon_1=0$ σε χρονικό διάστημα Δt_{coll} που είναι ίσο με τη χρονική διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος. Στο διάστημα αυτό μια θετική δύναμη F (αντίθετη της κίνησης και κατά προσέγγιση σταθερή) επιβραδύνει τη κίνηση με θετική επιτάχυνση α=F/m. Στο ίδιο διάστημα το έργο της δύναμης F είναι αρνητικό επειδή η διεύθυνση της δύναμης F (είναι προς τα πάνω) είναι αντίθετη της φορά της κίνησης που είναι προς τα κάτω.

$$W_F = \Delta K \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta y_2 = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{m\upsilon_0^2}{2\Delta y_2} \qquad (1.2)$$

Στο ίδιο διάστημα η θετική δύναμη F προκαλεί μια ώθηση $J(\Delta t_{coll})$ πάνω στον αθλητή η οποία μεταβάλει την ορμή από $p_0=m\upsilon_0$ σε $p_1=0$. Οπότε, από το θεώρημα Ώθησης – Ορμής έχουμε:

$$J(\Delta t_{coll}) = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t_{coll} = p_1 - p_0 \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t_{coll} = -m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{coll} = -\frac{m\upsilon_0}{F}$$

Αντικαθιστώντας τη δύναμη F από τη Σχέση (5.2) θα έχουμε τελικά:

$$\Delta t_{coll} = -\frac{m\upsilon_0}{-\dfrac{m\upsilon_0^2}{2\Delta y_2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{coll} = \frac{2\Delta y_2}{\upsilon_0} = \frac{2\Delta y_2}{-\sqrt{2gh}} = \frac{2\times(-0{,}010m)}{-\sqrt{2\times(9{,}80m/s)\times(2{,}0m)}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t_{coll} = 3{,}2\times 10^{-3}\ s$$

Β) Η δύναμη F που προσδιορίστηκε με τη Σχέση (1.2) είναι ίση με τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στον αθλητή κατά την πρόσκρουσή του στο έδαφος. Η δύναμη αυτή είναι ίση με τη ζητούμενη δύναμη F_A που ασκεί το έδαφος πάνω στον αθλητή μείον το βάρος του αθλητή (βλέπε Σχήμα):

$$F\,\Delta t_{coll} = -m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad (F_A - w)\Delta t_{coll} = -m\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad F_A = w - \frac{m\upsilon_0}{\Delta t_{coll}} \quad \Rightarrow$$

$$F_A = mg - \frac{m\upsilon_0}{\dfrac{2\Delta y_2}{\upsilon_0}} = mg - \frac{m\upsilon_0^2}{2\Delta y_2} = mg - \frac{m2gh}{2\Delta y_2} = mg\left(1-\frac{h}{\Delta y_2}\right) = (60kg)\times(9{,}80m/s^2)\left(1-\frac{2{,}0m}{2\times(-0{,}01m)}\right)$$

$$F_A = 1{,}2\times 10^5\ N$$

Γ) Παρατηρούμε ότι το πηλίκο: $\dfrac{F_A}{w} = \dfrac{F_A}{mg} = \dfrac{1{,}2\times 10^5\ N}{(60kg)\times(9{,}80m/s^2)} \approx 200$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε το βάρος του αθλητή για τον υπολογισμό της μέσης δύναμης που ασκεί το έδαφος στον αθλητή.

Δ) Αφού η ελάχιστη ενεργός διατομή της κνήμης του ποδιού είναι $A_{min}=3{,}2cm^2=3{,}2x10^{-4}m^2$, η τάση που ασκείται πάνω στο κόκαλο αυτό θα είναι:

$$T = \frac{F_A}{A_{\min}} = \frac{1{,}2\times 10^5\ N}{3{,}2\times 10^{-4}\ m^2} \quad \Rightarrow \quad T = 3{,}8\times 10^8\ N/m^2$$

Δεδομένου τώρα ότι η κνήμη αντέχει σε τάσεις που είναι μικρότερες της τάσης $1{,}6x10^8$ N/m^2, ο αθλητής θα σπάσει το πόδι του κατά την πτώση του από το ύψος το 2,0 m.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Μια μπάλα μάζα m=0,500kg βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας σε ύψος h_0=2,00 m από το έδαφος από όπου και αφήνεται ελεύθερη να πέσει προς τα κάτω. Μετά την πρόσκρουση της μπάλας στο έδαφος, αυτή αναπηδά μέχρι σε ένα ύψος h_f=1,20 m. Η κρούση της μπάλας με το έδαφος διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta\tau_c$=0,0200s Να υπολογίσετε:

Α) Την ορμή p_2 της μπάλας ακριβώς πριν αυτή κτυπήσει στο έδαφος.

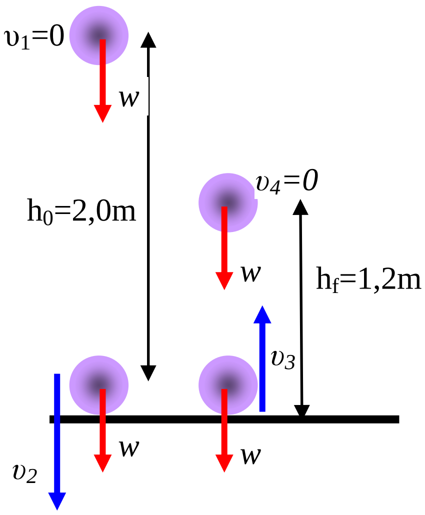
Β) Την ορμή p_3 της μπάλας ακριβώς αμέσως μετά την κρούση της με το έδαφος.

Γ) Τη μέση δύναμη F που ασκεί το έδαφος πάνω στη μπάλα.

Δ) Την ώθηση που υφίσταται η μπάλα κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ε) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Α) Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας κατά την πτώση της μπάλας από το ύψος h_0:

Μηχανική ενέργεια στο ύψος h_0 ίση με τη μηχανική ενέργεια στο έδαφος. Ισοδύναμα, δυναμική ενέργεια στο ύψος h_0 ίση με κινητική ενέργεια στο έδαφος:

$$U(h_0) = K(y=0) \quad \Rightarrow \quad mgh_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = -\sqrt{2gh_0} = -\sqrt{2\times(9{,}80m/s^2)\times(2{,}00m)} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = -6.26m/s$$

Το αρνητικό πρόσημο προέκυψε από το γεγονός ότι η μπάλα κινείται προς τα κάτω. Η αντίστοιχη ορμή p_2 της μπάλας θα είναι ίση με:

$$p_2 = m\upsilon_2 = (0{,}500kg)\times(-6{,}26m/s) \quad \Rightarrow \quad p_2 = -3{,}13kgm/s$$

Β) Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας κατά την άνοδο της μπάλας στο ύψος h_f:

Μηχανική ενέργεια στο έδαφος ίση με μηχανική ενέργεια στο ύψος h_f. Ισοδύναμα, κινητική ενέργεια στο έδαφος ίση με δυναμική ενέργεια:

$$K(y=0) = U(h_f) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = mgh_f \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2\times(9{,}80m/s^2)\times(1.20m)} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_3 = 4{,}85m/s$$

Η αντίστοιχη ορμή p_3 θα είναι ίση με:

$$p_3 = m\upsilon_3 = (0{,}50kg)\times(4{,}85m/s) \quad \Rightarrow \quad p_3 = 2{,}42kgm/s$$

Γ) Θεώρημα Ώθησης – Ορμής κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος:

$$J(\Delta\tau_c) = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t_c = p_3 - p_2 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{p_3 - p_2}{\Delta\tau_c} = \frac{(2{,}42kgm/s) - (-3{,}13kgm/s)}{0{,}0200s} \quad \Rightarrow$$

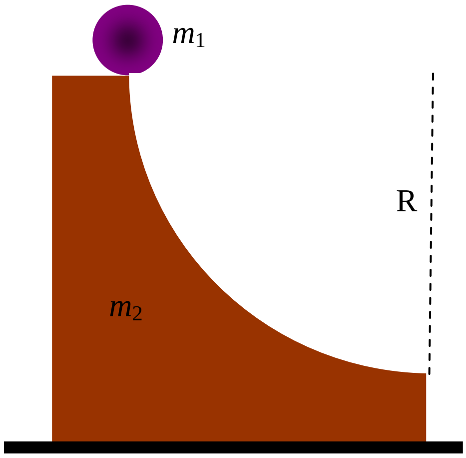
$$F = 278N$$

Δ) Μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης:

$$\Delta K = K_3 - K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{m}{2}(\upsilon_3^2 - \upsilon_2^2) = \frac{0{,}50kg}{2}\left[(4{,}85m/s)^2 - (-6{,}26m/s)^2\right] \quad \Rightarrow$$

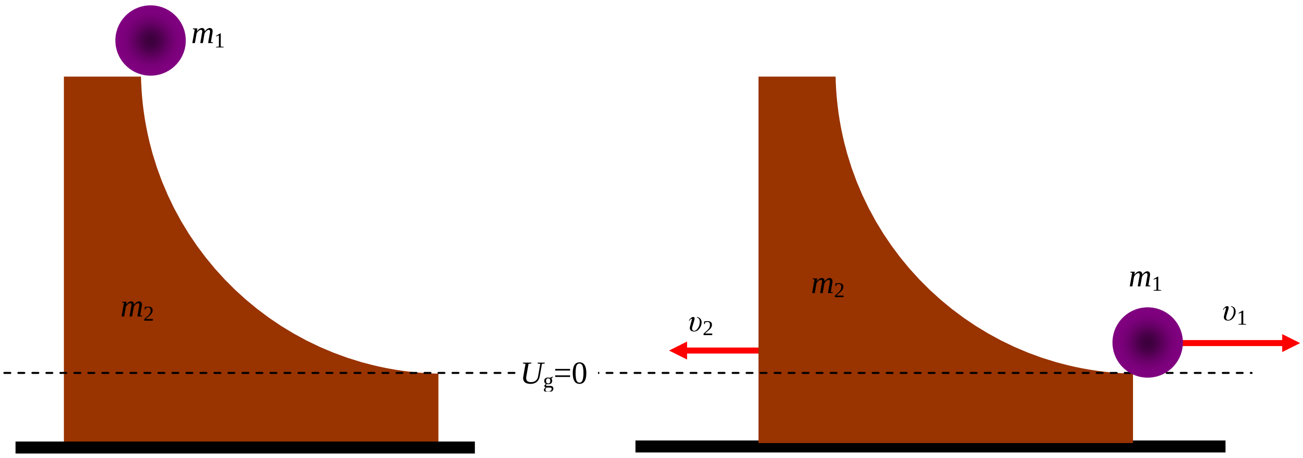
$$\Delta K = -3{,}92J$$

ΑΣΚΗΣΗ 3



Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1=0,500 kg ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα κατακόρυφο κυκλικό τόξο ακτίνας R=1,00m όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου έχει μάζα m_2 και ισορροπεί πάνω σε ένα λείο και οριζόντιο τραπέζι. Όπου πιθανότατα υπάρξει κίνηση, οι συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_k και μ_s είναι ίσοι με μηδέν. Αρχικά η σφαίρα βρίσκεται στο ανώτερο σημείο του κυκλικού τόξου και είναι ακίνητο. Αφού αφεθεί ελεύθερη η σφαίρα, να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_1 με την οποία η σφαίρα απομακρύνεται από το κάτω μέρος του κυκλικού τόξου καθώς και την ταχύτητα υ_2 με την οποία ολισθαίνει προς τα αριστερά το σύστημα με το κατακόρυφο κυκλικό τόξο.

ΛΥΣΗ



Αρχική Κατάσταση (t_i) Τελική Κατάσταση (t_f)

Για πρακτικού λόγους οι παράμετροι υ_1και υ_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας και του συστήματος του κατακόρυφου κυκλικού τόξου. Προσοχή!!! Στις εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν οι ταχύτητες αυτέ να μπουν με τα πρόσημά τους δεδομένου ότι η θετική φορά είναι προς τα δεξιά.

Στην αρχική κατάσταση, τόσο η σφαίρα όσο και το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου είναι σε ηρεμία, οπότε και οι αντίστοιχες ορμές τους p_{01}και p_{02} θα είναι ίσε με μηδέν. Ολική αρχική ορμή συστήματος:

$p_0=p_{01}+p_{02} = 0$

Στην τελική κατάσταση, η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα που έχει μέτρο υ_1 ενώ το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα που έχει μέτρο υ_2. Αυτό σημαίνει ότι η σφαίρα θα έχει ορμή με μέτρο $p_1=m_1\upsilon_1$ και το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου θα έχει ορμή με μέτρο $p_2=m_2\upsilon_2$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

(Ολική Αρχική Ορμή) = (Ολική Τελική Ορμή)

$$p_0 = p_1 - p_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 \qquad (3.1)$$

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας:

Παίρνουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από το κάτω άκρο του κατακόρυφου κυκλικού τόξου. Οπότε:

Στην αρχική κατάσταση, σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια U_Σ(Αρχή)=U_Σ(R)=$m_1 gR$ και κινητική ενέργεια K_Σ(Αρχή)=0 (η σφαίρα είναι ακίνητη). Το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου έχει δυναμική ενέργεια U_B(Αρχή) και κινητική ενέργεια K_B(Αρχή)=0 (είναι ακίνητο).

Ολική Αρχική Μηχανική Ενέργεια: $E_{\text{Αρχή}} = U_\Sigma(\text{Αρχή}) + K_\Sigma(\text{Αρχή}) + U_B(\text{Αρχή}) + K_B(\text{Αρχή}) \quad \Rightarrow$

$$E_{\text{Αρχή}} = m_1 gR + 0 + U_B(\text{Αρχή}) + 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{Αρχή}} = m_1 gR + U_B(\text{Αρχή}) \qquad (3.2)$$

Στην τελική κατάσταση, η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια U_Σ(Τέλος)=0 (βρίσκεται στο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας) και κινητική ενέργεια $K_\Sigma(\text{Τέλος}) = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2$. Το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου διατηρεί την ίδια δυναμική ενέργεια U_B(Τέλος)= U_B(Αρχή)=U_B (επειδή υπάρχει μόνο οριζόντια μετακίνηση) ενώ έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια $K_B(\text{Τέλος}) = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$

Ολική Τελική Μηχανική Ενέργεια: $E_{\text{Τέλος}} = U_\Sigma(\text{Τέλος}) + K_\Sigma(\text{Τέλος}) + U_B(\text{Τέλος}) + K_B(\text{Τέλος}) \quad \Rightarrow$

$$E_{\text{Τέλος}} = 0 + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + U_B + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{Τέλος}} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + U_B(\text{Τέλος}) + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \qquad (3.3)$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας: $E_{\text{Αρχή}}=E_{\text{Τέλος}} \quad \rightarrow$

$$m_1 gR + U_B(\text{Αρχή}) = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + U_B(\text{Τέλος}) + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 gR + U_B = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + U_B + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 gR = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 \qquad (3.4)$$

Αντικαθιστούμε στη Σχέση (3.4) το υ_1 από τη Σχέση (3.1) και έχουμε:

$$m_1 gR = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \upsilon_1 \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} \upsilon_1^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 gR = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gR}{\frac{m_1}{m_2} + 1}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2 \times (9{,}80 m/s^2) \times (1{,}00 m)}{\frac{0{,}500 kg}{2{,}00 kg} + 1}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 3{,}96 \, m/s$$

Αντικαθιστούμε την ταχύτητα υ_1 στη Σχέση (3.1) για να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_2 με την οποία σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου κινείται προς τα αριστερά:

$$\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2} \upsilon_1 = \frac{0{,}500 kg}{2{,}00 kg} \times (3{,}96 m/s) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = 0{,}990 \, m/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε ένα πείραμα βλητικής ένα βλήμα μάζα m=25,0 g η οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0=1200 m/s διαπερνά ένα ακίνητο στόχο πάχους d=30,0 cm και μάζας M=350 kg και εξέρχεται από το στόχο με ταχύτητα υ_1=900 m/s. Στη συνέχεια, ο στόχος ολισθαίνει πάνω σε μια οριζόντια και λεία επιφάνεια. Να υπολογίσετε με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων:

Α) Την ταχύτητα του στόχου αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από αυτόν.

Β) Τη δύναμη F που ασκεί ο στόχο πάνω στο βλήμα έχοντας ως δεδομένο ότι η δύναμη αυτή είναι σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα είναι μέσα στο στόχο.

Γ) Το χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα βρίσκεται μέσα στο στόχο.

ΛΥΣΗ

Α) Υπολογισμός της ταχύτητας V_1 του στόχου.

Το σύστημα είναι το βλήμα και ο στόχος μαζί. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:

(Αρχική Ορμή Συστήματος) = (Τελική Ορμή Συστήματος)   όπου:

(Αρχική Ορμή Συστήματος) = [Ορμή βλήματος ($p_{0\beta}$=m υ_0)] + [Ορμή στόχου ($p_{0\sigma}$=0)]

(Τελική Ορμή Συστήματος) = [Ορμή βλήματος ($p_{1\beta}$=m υ_1)] + [Ορμή στόχου ($p_{1\sigma}$=M $V_{1\sigma}$)]

Οπότε:

$$p_{0\Sigma} = p_{1\Sigma} \quad \Rightarrow p_{0\beta} + p_{0\sigma} = p_{1\beta} + p_{1\sigma} \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0 + 0 = m\upsilon_1 + M V_1 \quad \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{m(\upsilon_0 - \upsilon_1)}{M} = \frac{(0{,}025kg)\times\big((1200m/s)-(900m/s)\big)}{350kg} \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0{,}0214\, m/s$$

Β) Υπολογισμός της δύναμης F που ασκεί ο στόχος πάνω στο βλήμα.

Στο χρονικό διάστημα που το βλήμα διανύει ένα διάστημα d=30,0 cm μέσα στο στόχο και καταναλίσκει έργο $W = F\,d$ το οποίο είναι αρνητικό επειδή η δύναμη είναι αντίθετη της φοράς της ταχύτητας και το οποίο, σύμφωνα με το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας, είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του βλήματος:

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad F\,d = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{m}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^3) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m}{2d}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2) \quad \Rightarrow$$

$$F = \frac{0{,}025kg}{2\times(0{,}300m)}\times\left((900m/s)^2 - (1200m/s)^2\right) \quad \Rightarrow \quad F = -26200\,N \qquad (4.1)$$

Γ) Στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt, η σταθερή δύναμη F ασκεί ώθηση J(Δt) πάνω στο στόχο που είναι ίση με τη μεταβολή Δp του βλήματος:

$$J(\Delta t) = \Delta p \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) = (0{,}025kg)\times\big((1200m/s)-(900m/s)\big) \Rightarrow$$

$$F\,\Delta t = -7{,}5\,Ns \qquad (4.2)$$

Από τις Σχέσεις (4.1) και (4.2) παίρνουμε:

$$\Delta t = -\frac{7{,}5\,Ns}{-26200\,N} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 2{,}86\times 10^{-4}\,s \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 286\,\mu s$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

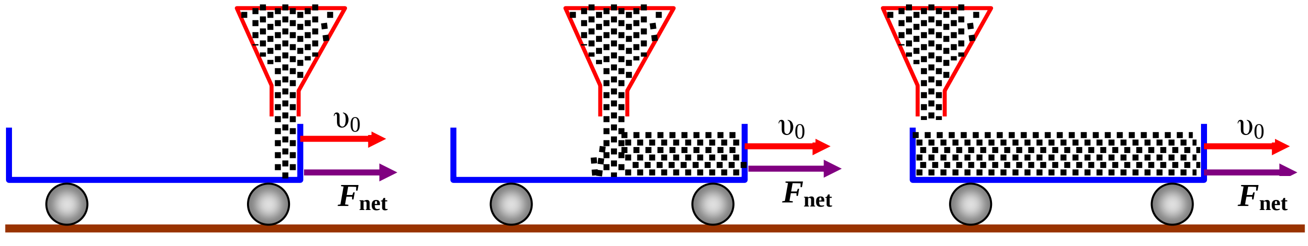
Σε ένα αυτοματοποιημένο νταμάρι που παράγει χαλίκι, η καταπακτή από την οποία εξέρχεται το χαλίκι για να γεμίσει η καρότσα ενός φορτηγού έχει πλάτος ίσο με το πλάτος της καρότσας του φορτηγού και μήκος d=50,0 cm. Μετρήσεις έδειξαν ότι, όταν η καταπακτή είναι ανοιχτή το χαλίκι εξέρχεται με ρυθμός R=225 kg/s. Η καταπακτή ανοίγει και κλείνει αυτόματα όταν το εμπρός και το πίσω μέρος της καρότσας, αντίστοιχα βρεθούν κάτω από αυτήν.

Τα φορτηγά που έχουν μάζα $M=6{,}80\text{x}10^3$ kg και καρότσα με μήκος L=8,00 m εισέρχονται στην εγκατάσταση παραγωγής χαλικιού με ταχύτητα υ_0=0,500 m/s την οποία οι οδηγοί διατηρούν σταθερή ελέγχοντας κατάλληλα το γκάζι..

Α) Να υπολογίσετε τη συνολική σταθερή δύναμη F_{net} (= κινητήρια δύναμη μηχανής φορτηγού μείον τριβές) που πρέπει να ασκείται πάνω στο φορτηγό ώστε αυτό να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0=0,300m/s καθώς και τη συνολική μάζα $m_{χαλίκι}$ του χαλικιού που θα φορτωθεί στην καρότσα του φορτηγού.

Β) Αν ο συντελεστής τριβής κύλισης των τροχών του φορτηγού με το δρόμο είναι μ_r= 0,02, τότε να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια που κατανάλωσε η μηχανή του φορτηγού κατά τη διάρκεια της φόρτωσης του χαλικιού στην καρότσα του.

ΛΥΣΗ



Χρονική στιγμή t=0   Χρονική στιγμή t $t=t_f$

Α) Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής αφού πάνω στο φορτηγό ασκείται εξωτερική συνισταμένη δύναμη F_{net}. Ισχύει όμως το θεώρημα Ώθησης – Ορμής σύμφωνα με το οποίο:

(Ώθηση που ασκείται πάνω στο φορτηγό) = (μεταβολή της ορμής του φορτηγού) ή ισοδύναμα:

$$J = \Delta p \quad \Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t=t_f} F_{net}\,dt = p_f - p_0 \qquad (5.1)$$

Όπου $p_0 = M\,\upsilon_0$ είναι η αρχική ορμή του φορτηγό (όταν αυτό δεν έχει καθόλου φορτίο)

$p_f = (M + m_{χαλίκι})\, υ_f = (M + m_{χαλίκι})\, υ_0$ είναι η τελική ορμή του φορτηγού τη χρονική στιγμή t_f όταν έχει ήδη φορτωθεί το χαλίκι, οπότε η συνολική μάζα του φορτηγού θα είναι $M+m_{χαλίκι}$. Επί πλέον θέσαμε $υ_f = υ_0$ δεδομένου ότι η δύναμη F υπάρχει για να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του φορτηγού. Οπότε, με δεδομένο ότι η δύναμη F είναι σταθερή, η Σχέση (11.1) γίνεται:

$$F_{\rm net}\int_{t=0}^{t=t_f} dt = (M + m_{χαλίκι})\upsilon_0 - M\,\upsilon_0 \quad \Rightarrow \quad F_{\rm net}\, t_f = (M + m_{χαλίκι})\upsilon_0 - M\,\upsilon_0$$

$$F_{net} = \frac{(M + m_{χαλικι})\upsilon_0 - M\upsilon_0}{t_f} \qquad (5.2)$$

Υπολογισμός του χρόνου φόρτωσης t_f και της συνολικής μάζας $m_{χαλίκι}$ του φορτίου.

Το χαλίκι αρχίζει να ρέει τη στιγμή που το εμπρός μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή εξόδου του χαλικιού. Η ροή του χαλικιού σταματά όταν το πίσω μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή. Από το σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι η συνολική μετακίνηση της καρότσας θα είναι L'=L – d, όπου d=50,0cm.

L'=8,00m – 0,50m =7,50 m (5,3)

Επειδή το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_0$ = 0,300 m/s ο συνολικό χρόνος κίνησης του φορτηγού θα είναι:

$$\upsilon_0 = \frac{L'}{t_f} \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{L'}{\upsilon_0} = \frac{7{,}50m}{0{,}300m/s} \quad \Rightarrow \quad t_f = 25{,}0\,s \qquad (5.4)$$

Με δεδομένο το ρυθμό R=225 kg/s με τον οποίο εξέρχεται το χαλίκι από την καταπακτή, στο χρονικό διάστημα $t_f = 25{,}0\,s$ η συνολική μάζα χαλικιού που θα φορτωθεί στη καρότσα του φορτηγού θα είναι:

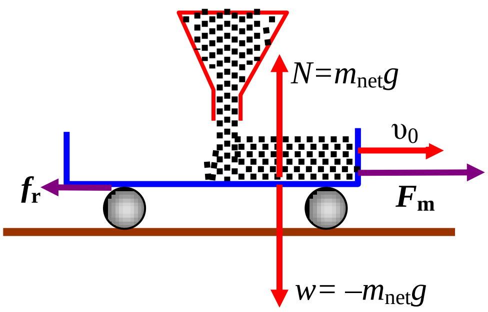
$$m_{χαλικι} = Rt_f = (225\text{kg/s}) \times (25{,}0\text{ s}) \quad \Rightarrow \quad m_{χαλικι} = 5630\text{ kg} \qquad (5.5)$$

Αντικαθιστούμε στη Σχέση (5.2) το χρόνο φόρτωσης t_f του φορτηγού και τη συνολική μάζα $m_{χαλίκι}$ που βρήκαμε και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη που πρέπει να ασκείται στο φορτηγό για να διατηρεί την ταχύτητά του σταθερή:

$$F_{net} = \frac{(M + m_{χαλικι})\upsilon_0 - M\upsilon_0}{t_f} = \frac{(6800\text{kg} + 5630\text{kg}) \times 0{,}300\text{m/s} - (6800\text{kg}) \times 0{,}300\text{m/s}}{25\ s}$$

$$F_{\rm net} = 67{,}6\text{ N} \qquad (5.6)$$

B) Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα στιγμιότυπο που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή *t* της φόρτωση του φορτηγού μαζί με την κινητήρια δύναμη $F_{\rm m}$ και τη συνολική δύναμη τριβής κύλισης $f_{\rm r}$. Η συνισταμένη των δυο αυτών δυνάμεων είναι η δύναμη $F_{\rm net} = 67{,}6$ N που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα:



$$F_{\rm net} = F_{\rm m} - f_{\rm r} \quad \Rightarrow \quad F_{\rm m} = F_{\rm net} + f_{\rm r} \qquad (5.7)$$

όπου η τριβή f_r ισούται μες τη κάθετη δύναμη N, η οποία είναι ίση με το βάρος του φορτηγού συν το βάρος του χαλικιού που είναι φορτωμένο, επί το συντελεστή τριβής $μ_r$:

$$f_r = \mu_{\rm r} N \quad \Rightarrow \quad f_{\rm r} = \mu_{\rm r} m_{\rm net} g \quad \Rightarrow \quad f_{\rm r} = \mu_{\rm r}(M + m_{χαλίκι})g \quad \Rightarrow \quad f_{\rm r} = \mu_{\rm r}(M + Rt)g \qquad (5.8)$$

Από τις Σχέσεις (5.4) και (5.5) έχουμε:

$$F_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{net}} + f_{\mathrm{r}} = F_{\mathrm{net}} + \mu_{\mathrm{r}}(M + Rt)g \qquad (5.9)$$

Η ενέργεια που καταναλώθηκε από τη μηχανή του φορτηγού (η ενέργεια αυτή έχει άμεση σχέση με τη ποσότητα καυσίμου που καταναλώθηκε) είναι ίση με το έργο που παρήγαγε το φορτηγό στο διάστημα L' που μετακινήθηκε κατά τη φόρτωση με την επίδραση της F_{m}.

Επειδή η δύναμη $F_{\mathrm{m}}=F_{\mathrm{m}}(t)$ εξαρτάται από το χρόνο, για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο που παράχθηκε από το φορτηγό κατά τη διάρκεια της φόρτωσης θεωρούμε ότι σε χρονικό διάστημα dt το φορτηγό μετακινήθηκε κατά στοιχειώδες διάστημα dx και παρήγαγε στοιχειώδες έργο dW τέτοιο ώστε:

$$dW = F(t)\,ds = \left(F_{net} + \mu_{\mathrm{r}}(M + Rt)\,g\right)\upsilon_0\,dt \qquad (5.10)$$

όπου αντικαταστήσαμε τη δύναμη F_{m} από τη Σχέση (5.9) και θέσαμε $ds=\upsilon_0 dt$. Με ολοκλήρωση της Σχέσης (5.10) στο χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι t_f=23,3 s (που είναι ίσο με τη διάρκεια της φόρτωσης) παίρνουμε:

$$W = \int dW = \upsilon_0 \int_{t=0}^{t=t_f} \left(F_{\mathrm{net}} + \mu_{\mathrm{r}}(M + Rt)\,g\right)dt = \upsilon_0\left(\int_{t=0}^{t=t_f} F_{\mathrm{net}}\,dt + \mu_{\mathrm{r}} g M \int_{t=0}^{t=t_f} dt + \mu_{\mathrm{r}} R\,g \int_{t=0}^{t=t_f} t\,dt\right) \Rightarrow$$

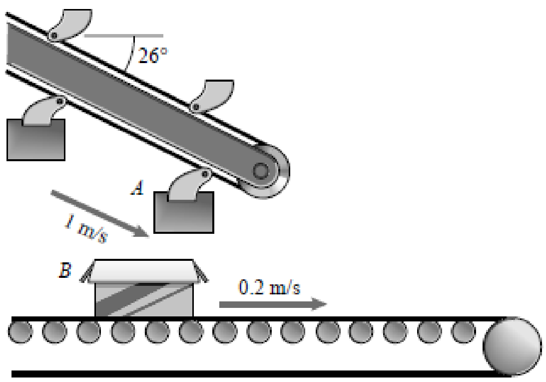
$$W = \upsilon_0\left(F_{\mathrm{net}}\,t_f + \mu_{\mathrm{r}} g\,M\,t_f + \frac{\mu_{\mathrm{r}} R\,g}{2} t_f^2\right) = \upsilon_0\,t_f\left(F_{net} + \mu_{\mathrm{r}} g\left(M + \frac{R\,t_f}{2}\right)\right) =$$

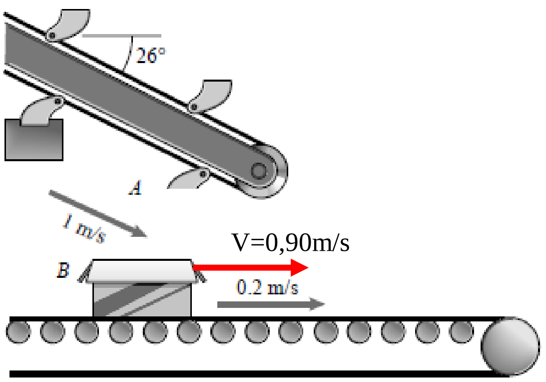
$$= (0{,}300\,\mathrm{m/s}) \times (25{,}0\mathrm{s})\left(67{,}6\mathrm{N} + 0{,}02 \times (9{,}80\mathrm{m/s^2}) \times \left(6800\mathrm{kg} + \frac{(225\mathrm{kg/s}) \times (25{,}0\mathrm{s})}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$W = 14600\ \mathrm{J}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Σε μια αυτοματοποιημένη μονάδα φόρτωση χαρτοκιβωτίων, τα χαρτοκιβώτια B τα οποία έχουν μάζα m_B=1,6kg κινούνται οριζόντια με ταχύτητα υ_{Bx}=0,20 m/s με τη βοήθεια ενός κυλιόμενου ιμάντα. Το φορτίο A κάθε κιβωτίου που έχει μάζα m_B=12 kg μεταφέρεται με ταχύτητα υ_A=1,0 m/s με άλλο κυλιόμενο ιμάντα του οποίου η διεύθυνση κίνησης σχηματίζει γωνία $\theta=26^0$ με το οριζόντιο επίπεδο (βλέπε σχήμα άσκησης). Τη χρονική στιγμή που το φορτίο A βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ανοιχτό χαρτοκιβώτιο B, το φορτίο αφήνεται ελεύθερο και πίπτει μέσα στο χαρτοκιβώτιο B όπου και κολλά στον πάτο του. Αν συντελεστή κινητικής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κυλιόμενου ιμάντα είναι μ_k=0,2 να υπολογίσετε το διάστημα d που θα ολισθήσει το χαρτοκιβώτιο πάνω στην κυλιόμενο ιμάντα.





ΛΥΣΗ

Για να απλοποιήσουμε τη λύση του προβλήματος θεωρούμε ότι ο παρατηρητής που παρακολουθεί τη φόρτωση των χαρτοκιβωτίων κινείται παράλληλα με την οριζόντια μεταφορική ταινία και με την ίδια με αυτή ταχύτητα. Πριν πέσει το φορτίο μέσα στο χαρτοκιβώτιο, ο παρατηρητής θα βλέπει το χαρτοκιβώτιο ακίνητο (δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ κινητών που έχουν την ίδια ταχύτητα).

Το φορτίο πλησιάζει το χαρτοκιβώτιο με ταχύτητα υ_A=1,0 m/s που σχηματίζει γωνία θ=26^0 με το οριζόντιο επίπεδο. Η φόρτωση των χαρτοκιβωτίων εξαρτάται μόνο από την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας υ_A η οποία είναι ίση με:

$$\upsilon_{Ax} = \upsilon_A \cos\theta = (1{,}0m/s)\times\cos 26^0 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_{Ax} = 0{,}90\,m/s$$

Η σχετική οριζόντια ταχύτητα υ'_{Ax} του φορτίου Β ως προς τον παρατηρητή θα είναι ίση με:

$$\upsilon'_{Ax} = \upsilon_{Ax} - \upsilon_{Bx} = (0{,}90m/s) - (0{,}20m/s) \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon'_{Ax} = 0{,}70\,m/s$$

Για τον κινούμενο παρατηρητή, το σύστημα στο οποίο διατηρείται η ορμή είναι το χαρτοκιβώτιο Β και το φορτίο Α:

Διατήρηση της ορμής του συστήματος Χαρτοκιβώτιο – Φορτίο για τον κινούμενο παρατηρητή:

(Αρχική ορμή συστήματος πριν το φορτίο πέσει στο χαρτοκιβώτιο) = (Τελική ορμή συστήματος όπου το φορτίο είναι μέσα στο χαρτοκιβώτιο) ή ισοδύναμα:

(Αρχική ορμή συστήματος πριν το φορτίο πέσει στο χαρτοκιβώτιο) = (οριζόντια ορμή φορτίου $p'_{Ax}=m_A\upsilon_{ABx}$) + (ορμή ακίνητου χαρτοκιβωτίου $p_{Bx}=0$)

(Τελική ορμή συστήματος με το φορτίο μέσα στο χαρτοκιβώτιο) = (ορμή μάζα φορτίου μαζί με μάζα χαρτοκιβωτίου που κινούνται με ταχύτητα V: $p_{ABx}=(m_A+m_B)V$)

$$p'_{Ax} + p_{Bx} = p_{ABx} \qquad \Rightarrow \qquad m_A\upsilon'_{Ax} + 0 = (m_A + m_B)V \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m_A\upsilon'_{Ax}}{m_A + m_B} \qquad \Rightarrow$$

$$V = \frac{(12kg)\times(0{,}70m/s)}{12kg + 1{,}6kg} \qquad \Rightarrow \qquad V = 0{,}62\,m/s$$

Η ταχύτητα V=0,62 m/s που βρήκαμε είναι η ταχύτητα με την οποία αρχίζει να ολισθαίνει το χαρτοκιβώτιο μαζί με το φορτίο πάνω στον κυλιόμενο ιμάντα. Η ταχύτητα αυτή είναι η σχετική ταχύτητα του χαρτοκιβωτίου με το φορτίο σε σχέση με τον κινούμενο παρατηρητή.

Για τον κινούμενο παρατηρητή, η ταχύτητα V θα μειώνεται εξ αιτίας της κινητικής τριβής ολίσθησης του χαρτοκιβωτίου με τον ιμάντα. Η κινητική τριβή ολίσθησης f_{kx} είναι αντίθετη με τη φορά της ταχύτητας V και είναι ίση με το συνολικό βάρος χαρτοκιβωτίου-φορτίου επί τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής μ_k=0,2.

$$f_{kx} = -\mu_k (m_A + m_B)\, g$$

Για τον κινούμενο παρατηρητή, η δύναμη της τριβής καταναλίσκει ένα έργο W το οποίο, σύμφωνα με το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας, είναι ίσο με τη μεταβολή ΔΚ της κινητικής ενέργειας του χαρτοκιβωτίου με το φορτίο. Αρχικά το σύστημα χαρτοκιβώτιο-φορτίο είχε ταχύτητα V (και συνεπώς κινητική ενέργεια $(m_A+m_B)V^2/2$) η οποία στο τέλος γίνεται μηδέν. Οπότε:

$$W = \Delta K \qquad \Rightarrow \qquad -f_{kx}d = K_f - K_i \qquad \Rightarrow \qquad -\mu_k (m_A + m_B)\, g\, d = 0 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 \quad \Rightarrow$$

$$d = \frac{V^2}{2\mu_k g} \qquad \Rightarrow \quad d = \frac{(0{,}62m/s)^2}{2\times 0{,}2\times(9{,}80m/s^2)} \qquad \Rightarrow \qquad d = 0{,}098m = 9{,}8cm$$

ΣΧΟΛΙΟ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

Κατά τη διαδικασία της τοποθέτησης του φορτίου μέσα στα χαρτοκιβώτια, το κάθε χαρτοκιβώτιο ολισθαίνει προς τα εμπρός κατά ένα διάστημα d=9,8 cm. Αυτό σημαίνει ότι τα χαρτοκιβώτια που μεταφέρονται με τον κυλιόμενο ιμάντα δεν πρέπει να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη από το διάστημα d=9,8 cm. Στην περίπτωση που η απόσταση αυτή ήταν μικρότερη από τα 9,8 cm, τα χαρτοκιβώτια θα ολίσθαιναν και θα έπεφτε το ένα πάνω στο άλλο με αποτέλεσμα να διαταρασσόταν ο συγχρονισμός του ιμάντα μεταφοράς του φορτίου με τον ιμάντα μεταφοράς των χαρτοκιβωτίων.

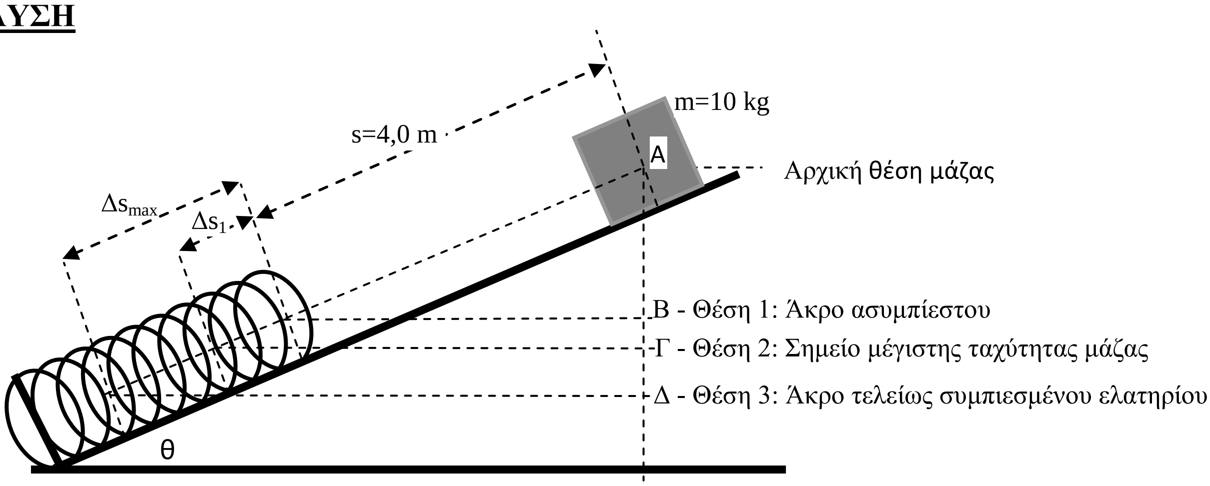
ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα κουτί μάζας 10 kg κατεβαίνει ολισθαίνοντας μια λεία ράμπα μήκους 4,0 m και στη συνέχεια προσκρούει σε ένα ελατήριο με σταθερά 250 N/m.

α. Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;

β. Πόσο συμπιεσμένο είναι το ελατήριο όταν το κουτί έχει τη μέγιστη ταχύτητα;

ΛΥΣΗ



α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη παραμόρφωση Δs_{max} το ελατηρίου:

Το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη Θέση 3 του άκρου του ελατηρίου (κατάσταση μέγιστης συμπίεσης) λαμβάνεται ως το επίπεδο με δυναμική ενέργεια ίση με το μηδέν (U_3=0). Η μάζα βρίσκεται σε ύψος h=(ΑΒ)+(ΒΔ), όπου:

$$(\mathrm{AB}) = \mathrm{s}\sin\theta = \mathrm{s}\sin 30 = \frac{\mathrm{s}}{2} = 2m$$

$$(\mathrm{B\Delta}) = \Delta s_{\max}\sin\theta = \Delta s_{\max}\sin 30 = \frac{\Delta s_{\max}}{2}$$

Στη θέση Α η μάζα έχει μόνο βαρυτική δυναμική ενέργεια U_A ως προ επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (θέση 3): $U_A = mg\big((\mathrm{AB}) + (\mathrm{B\Gamma})\big) = mg\left(\frac{s}{2} + \frac{\Delta s_{\max}}{2}\right)$

Στη θέση 3 το σύστημα ελατήριο-μάζα έχει μόνο ελαστική δυναμική ενέργεια (η βαρυτική δυναμική ενέργεια εξ ορισμού είναι μηδέν): $U_{sp,\max} = \frac{1}{2}k(\Delta s_{\max})^2$

Διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας:

$$U_A = U_{sp} \quad \Rightarrow \quad mg\left(\frac{s}{2} + \frac{\Delta s_{\max}}{2}\right) = \frac{1}{2}k(\Delta s_{\max})^2 \quad \Rightarrow \quad mgs + mg\Delta s_{\max} = k(\Delta s_{\max})^2 \quad \Rightarrow$$

$$(\Delta s_{\max})^2 - \frac{mg}{k}(\Delta s_{\max}) - \frac{mgs}{k} = 0$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε: Δs_{max}=1,46 m

Β) Σε ένα σύστημα μάζα-ελατήριο, η μάζα έχει τη μέγιστη ταχύτητα όταν αυτή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Όταν έρθει σε επαφή η μάζα με το δεξιό άκρο του ελατηρίου η δύναμη που θα συμπιέσει το ελατήριο θα είναι ίση με την προβολή w_s του βάρους w της μάζας πάνω στη διεύθυνση που είναι παράλληλη με τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου:

$$w_s = w\sin 30 = \frac{mg}{2}$$

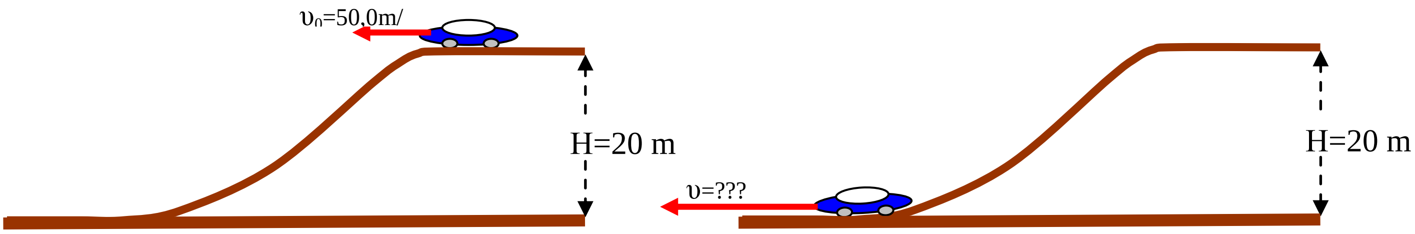
Στην κατάσταση ισορροπίας η δύναμη αυτή προκαλεί τη ζητούμενη παραμόρφωση Δs_1. Από το νόμο του Hook έχουμε:

$$w_s = k(\Delta s_1) \quad \Rightarrow \quad (\Delta s_1) = \frac{w_s}{k} = \frac{mg}{2k} \quad \Rightarrow \quad (\Delta s_1) = \frac{(10kg)\times(9{,}8m/s^2)}{2\times 500\,N/m} = 0{,}196\,m$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Οδηγείτε με ταχύτητα υ_0=50,0 km/h σε ένα οριζόντιο δρόμο όταν ξαφνικά ο δρόμος αυτός κατηφορίζει προς μια κοιλάδα. Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ οριζόντιου δρόμου και κοιλάδας είναι Η=20,0 m. Τη χρονική στιγμή που μπήκατε στον κατηφορικό δρόμο ελευθερώνετε τον συμπλέκτη του αυτοκινήτου σας και το αυτοκίνητο κατηφορίζει ελεύθερα προς την κοιλάδα. Τη στιγμή που φθάνετε στο επίπεδο της κοιλάδας, βλέπετε ένα τροχονόμο κρυμμένο πίσω από την πινακίδα ορίου ταχύτητας η οποία έγραφε "Ανώτατο Όριο Ταχύτητας υ_{max}=70,0 km/h". Ο τροχονόμος θα σας γράψει κλήση για υπέρβαση του ορίου ταχύτητας;

ΛΥΣΗ



Αρχική Κατάσταση:

Κινητική ενέργεια : $K_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$

Δυναμική Ενέργεια : $U_0 = mgH$

Μηχανική Ενέργεια : $E_0 = K_0 + U_0$

Τελική Κατάσταση:

Κινητική ενέργεια : $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Δυναμική Ενέργεια : $U = 0$

Μηχανική Ενέργεια : $E = K + U$

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_0 = E \quad \Rightarrow \quad K_0 + U_0 = K + U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgH = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0^2 + 2gH = \upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH} \qquad (1)$$

Μετατροπή της αρχικής ταχύτητας του αυτοκινήτου και του ορίου ταχύτητας σε μονάδες m/s:

$$\upsilon_0 = 50{,}0 km/s = 50{,}0 \times \frac{1000m}{3600s} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = 13{,}9\, m/s$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος και τη Σχέση (1) παίρνουμε:

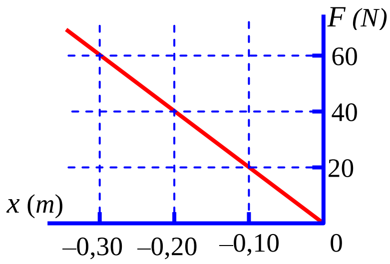
$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(13{,}9m/s)^2 + 2\times(9{,}80m/s^2)\times(20m)} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 24{,}2\, m/s$$

Ή ισοδύναμα: $\upsilon = 24{,}2m/s = 24{,}2 \times \dfrac{10^{-3} km}{\dfrac{1}{3600} h} = 24{,}2 \times \dfrac{3600}{1000} km/h \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 87{,}1 km/h$

Στο τέλος της κατηφόρας το αυτοκίνητο θα κινείται με ταχύτητα υ=87,1 Km/h η οποία είναι μεγαλύτερη από το όριο των υ_{max}=70,0 km/h. Κατόπιν τούτου, ο τροχονόμος θα δώσει κλήση στον οδηγό του αυτοκινήτου.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Μια πέτρα με μάζα m=50,0 g τοποθετείται σε μια σφεντόνα. Εκτείνοντας τον λαστιχένιο ιμάντα της σφεντόνας, η δύναμη που ασκεί αυτός πάνω στην πέτρα συναρτήσει της επιμήκυνσής του απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



α) Ο λαστιχένιος ιμάντας υπακούει στον νόμο του Hook;

β) Να υπολογίσετε τη σταθερά *k* του λάστιχου.

γ) Ο λαστιχένιος ιμάντας εκτείνεται κατά 30,0 cm και στη συνέχεια ελευθερώνεται. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται η πέτρα.

ΛΥΣΗ

α) Ο λαστιχένιος ιμάντας υπακούει στον νόμο του Hook επειδή η δύναμη επαναφοράς του λάστιχου είναι ανάλογη με την επιμήκυνσή του, *F*=–*k x*.

β) $k = -\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = -\dfrac{60N - 0N}{-0{,}30m - 0m} \quad \Rightarrow \quad k = 200\, N/m$

γ) Όταν ο λαστιχένιος ιμάντας έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα Δx=30,0 cm μέσα σε αυτόν έχει αποθηκευθεί δυναμική ενέργεια: $U = \dfrac{1}{2} k\,(\Delta x)^2 \qquad (1)$

Όταν ο λαστιχένιος ιμάντας αφεθεί ελεύθερος, η παραπάνω δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια: $K = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2 \qquad (2)$

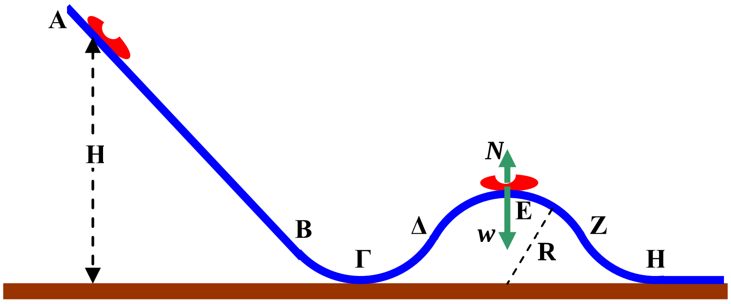
Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K = U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} k(\Delta x)^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}}\,(\Delta x) = \sqrt{\frac{200N/m}{0{,}0500kg}}\,(0{,}300m) \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = 19{,}0\, m/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ο ιδιοκτήτης ενός Luna Park σας αναθέτει να μελετήσετε την παρακάτω τροχιά ενός βαγονιού.



Η τροχιά έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
Μέγιστο ύψος αφετηρίας βαγονιού: Η=20,0 m
Το Τμήμα ΑΒ είναι ευθύγραμμο, ενώ τα τμήματα (ΒΓΔ), (ΔΕΖ) και (ΖΗ) είναι κυκλικά τόξα με ακτίνα R.

Από την μελέτη πρέπει να προκύπτει η ελάχιστη ακτίνα R_{min} του κυκλικού τόξου (ΔΕΖ) για να μη εκτροχιαστεί το βαγόνι όταν αυτό περνά από το σημείο Ε.

ΛΥΣΗ

Για να μην εκτροχιαστεί το βαγόνι στο σημείο Ε, πρέπει στο σημείο αυτό το βαγόνι πρέπει να είναι σε επαφή με την τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι πάνω στο βαγόνι θα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος του βαγονιού: w=mg και η κάθετη δύναμη Ν από την τροχιά. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων πρέπει να είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη $F_R = \frac{m\upsilon^2}{R}$ που κρατά το βαγόνι σε κυκλική τροχιά. Συγκεκριμένα:

$$N - w = -F_R \quad \Rightarrow \quad N - mg = -\frac{m\upsilon^2}{R} \qquad (10.1)$$

Το αρνητικό πρόσημο στο βάρος και στην κεντρομόλο δύναμη στη θέση Ε μπήκε επειδή οι δυνάμεις αυτές έχουν φορά προς τα κάτω. Οριακά, όταν το βαγόνι πάψει να έχει επαφή με την τροχιά, τότε η κάθετη δύναμη Ν θα είναι ίση με το μηδέν. Έστω ότι στην κατάσταση αυτή η ταχύτητα του βαγονιού είναι ίση με υ_{max}. Οπότε από τη Σχέση (10.1) θα έχουμε:

$$0 - mg = -\frac{m\upsilon_{max}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{max}^2 = gR \qquad (10.2)$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μπορούμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα υ_{max} με το μέγιστο ύψος Η της θέσης της αφετηρίας του βαγονιού.

Σε μια τυχαία περίπτωση, θεωρούμε ότι η αφετηρία του βαγονιού βρίσκεται σε ύψος h από το κατώτατο σημείο της τροχιάς. Για την περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

Δυναμική ενέργεια στη θέση της αφετηρίας: $U = mgh$ (10.3)

Δυναμική και κινητική ενέργεια στη θέση Ε: $U_E = mgR$ και $K_E = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ (10.4)

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: $E(\text{στην αφετηρία}) = \text{E(στη θέση E)} \quad \Rightarrow$

$$U = U_E + K_E \quad \Rightarrow \quad mgh = mgR + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2g(h-R) \qquad (10.5)$$

Για να μην εκτροχιαστεί το βαγόνι πρέπει και η ταχύτητα αυτή (βλέπε Σχέση 10.5) να είναι ίση με υ_{max}. Από τη Σχέση (10.5) όμως προκύπτει ότι για να είναι η ταχύτητα ίση με υ_{max} θα πρέπει η θέση της αφετηρίας να βρίσκεται και αυτό στο μέγιστο δυνατό ύψος. Το ύψος αυτό το συμβολίζουμε με Η. Οπότε, η Σχέση (10.5) γίνεται:

$$\upsilon_{max}^2 = 2g(H-R) \qquad (10.6)$$

Από τις Σχέσεις (10.2) και (10.6) προκύπτει τελικά ότι:

$$gR = 2g(H-R) \quad \Rightarrow \quad gR = 2gH - 2gR \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2}{3}H = \frac{2}{3}\times 20{,}0m \quad \Rightarrow \quad R = 13{,}3\,m$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Η ιπποδύναμη (ισχύς) ενός μικρού αυτοκινήτου είναι P_{max}=120 *hp* (1 hp = 735,5 Watt). Η μάζα του αυτοκινήτου είναι m=1.00x10^3 *kg*. Υποθέστε ότι η συνολική δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του αυτοκινήτου είναι ανάλογη με την ταχύτητα υ του αυτοκινήτου. Συγκεκριμένα: $f=\alpha\,\upsilon$ όπου α=1,00x10^2 *Ns/m*. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} με την οποία μπορεί να κινηθεί το συγκεκριμένο αυτοκίνητο:

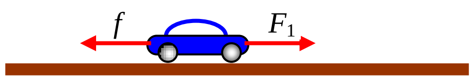
α) σε ένα οριζόντιο δρόμο, και,

β) σε ένα ανηφορικό δρόμο που σχηματίζει γωνία θ=30^0.

ΛΥΣΗ

Μετατρέπουμε την ιπποδύναμη του αυτοκινήτου στη μονάδα του Διεθνούς Συστήματος S.I.:

$$P_{max} = 120\,hp = 120 \times 735{,}5W \quad \Rightarrow \quad P_{max} = 88300W$$



α) Έστω ότι, η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αποκτήσει το αυτοκίνητο στον οριζόντιο δρόμο είναι $\upsilon_{1,max}$. Στην περίπτωση που το αυτοκίνητο κινείται με τη σταθερή αυτή ταχύτητα, η μηχανή του λειτουργεί στη μέγιστη ισχύ που είναι P_{max}=88300 W. Με την ισχύ αυτή η μηχανή ωθεί το αυτοκίνητο με μια δύναμη F_1 η οποία αντισταθμίζει τη συνισταμένη $f_{1,max}$ των δυνάμεων που αντιστέκονται στην κίνησή του:

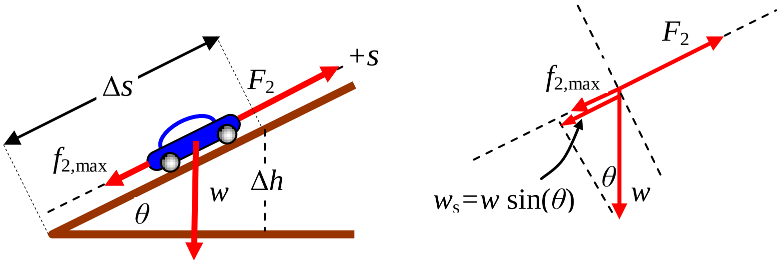
$$F_1 = f_{1,max} = a\upsilon_{1,max}$$

Στην κατάσταση αυτή, η μηχανή παρέχει τη μέγιστη ισχύ: $P_{max} = F_1\upsilon_{1,max} = a\upsilon_{1,max}^2 \quad \Rightarrow$

$$\upsilon_{1,max} = \pm\sqrt{\frac{P_{max}}{a}} = \pm\sqrt{\frac{88300W}{1{,}00\times 10^2\,Ns/m}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{1,max} = \pm 29{,}7\,m/s \quad \text{ή} \quad \upsilon_{1,max} = \pm 107\,km/h$$

Το πρόσημο ± σημαίνει ότι το αυτοκίνητο μπορεί να κινείται προς τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση.

β)



Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο ανέρχεται την ανηφόρα με τη μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{2,max}$ οπότε η μηχανή του παρέχει τη μέγιστη δυνατή ισχύ P_{max}=88300 W με την οποία το αυτοκίνητο ωθείται προς τα πάνω με τη δύναμη F_2. Η δύναμη αυτή πρέπει να αντισταθμίσει τη συνισταμένη $f_{2,max}=\alpha\upsilon_{2,max}$ των δυνάμεων αντίστασης καθώς και το βάρος $w=mg$ του αυτοκινήτου.

Σε χρονικό διάστημα Δt το αυτοκίνητο διάνυσε ένα διάστημα Δs κατά μήκος της ανηφόρας με σταθερή ταχύτητα: $\upsilon_{2,\max} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, η δύναμη F_2 παρήγαγε έργο:

$$W_2 = F_2\,\Delta s = P_{\max}\,\Delta t \qquad (11.1)$$

Επειδή το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{2,max}$, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο αυτοκίνητο στη s–διεύθυνση πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Από το παραπάνω διάγραμμα δυνάμεων προκύπτει ότι:

$$F_2 = f_{2,\max} + w\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad F_2 = a\upsilon_{2,\max} + mg\sin(\theta) \qquad (11.2)$$

Οπότε, η Σχέση (11.1) γίνεται:

$$W_2 = \left(a\upsilon_{2,\max} + mg\sin(\theta)\right)\Delta s \quad \Rightarrow \quad W_2 = a\upsilon_{2,\max}\,\Delta s + mg\sin(\theta)\,\Delta s \qquad (11.3)$$

Από τις Σχέσεις (11.1) και (11.3) προκύπτει ότι:

$$P_{\max}\,\Delta t = a\upsilon_{2,\max}\,\Delta s + mg\sin(\theta)\,\Delta s \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = a\,\upsilon_{2,\max}\frac{\Delta s}{\Delta t} + mg\sin(\theta)\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow$$

$$P_{\max} = a\,\upsilon_{2,\max}^2 + mg\sin(\theta)\,\upsilon_{2,\max} \quad \Rightarrow \quad \alpha\,\upsilon_{2,\max}^2 + mg\sin(\theta)\,\upsilon_{2,\max} - P_{\max} = 0 \qquad (4)$$

Η Σχέση (11.4) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $\upsilon_{2,max}$ της οποίας η λύση είναι:

$$\upsilon_{2,\max} = \frac{-mg\sin(\theta) \pm \sqrt{\left(mg\sin(\theta)\right)^2 + 4aP_{\max}}}{2a} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_{2,\max} = \frac{-(1000kg)(9{,}80m/s^2)\sin 30 \pm \sqrt{\left((1000kg)(9{,}80m/s^2)\sin 30\right)^2 + 4\times(100Ns/m)(88300W)}}{2\times 100\,Ns/m} \quad \Rightarrow$$

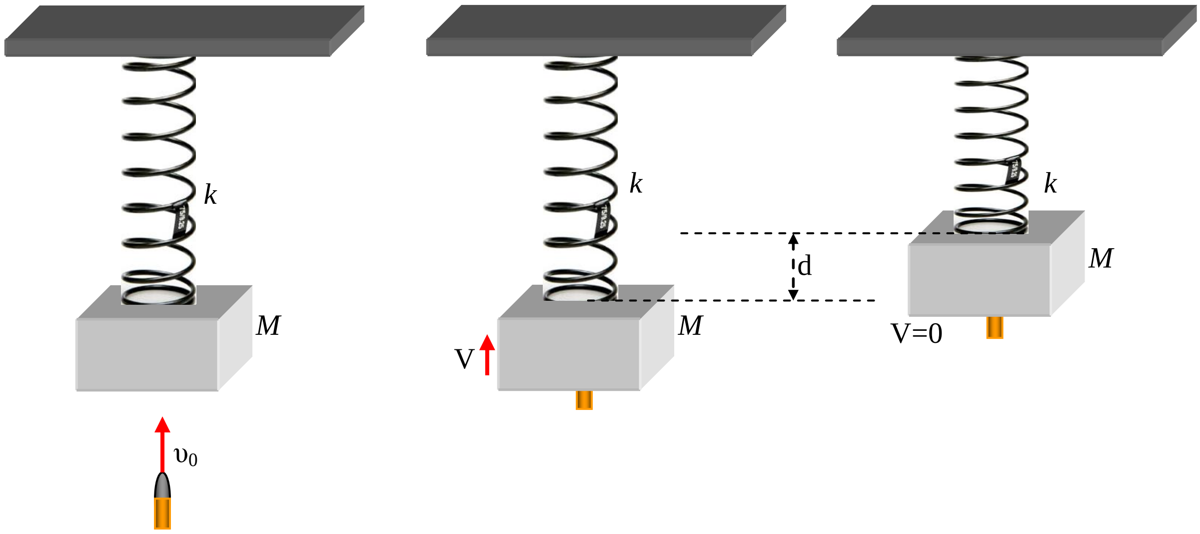
$\upsilon_{2,\max} = 14{,}0m/s = 50{,}4km/h$ όταν το αυτοκίνητο κινείται προς την θετική s-διεύθυνση.

και $\upsilon_{2,\max} = -63{,}0m/s = -227km/h$ όταν το αυτοκίνητο κινείται προς την αρνητική s-διεύθυνση.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε ένα "βαλλιστικό σύστημα ελατηρίου" για να μετρήσετε τις ταχύτητες των σφαιρών ενός όπλου. Το σύστημα αυτό αποτελείται από ένα ελατήριο με σταθερά k=50,0 N/m το οποίο είναι αναρτημένο κατακόρυφα στην οροφή της αίθουσας δοκιμών. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι αναρτημένο ένα κομμάτι ξύλο που έχει μάζα M=2,0 kg. Το όπλο τοποθετείται ακριβώς κάτω από το ξύλο και η σφαίρα που έχει μάζα m=10 g βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω έτσι ώστε αυτή να ενσωματώνεται μέσα στο ξύλο. Σε μια τέτοια δοκιμή, με την ενσωμάτωση της σφαίρας μέσα στο ξύλο, το ελατήριο συμπιέζεται κατά διάστημα d=45 cm. Να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει την αρχική ταχύτητα υ_0 της σφαίρας με τις γνωστές παραμέτρους m, M, k και d.

ΛΥΣΗ



Αρχική Κατάσταση Χρονική στιγμή κρούσης Τελική Κατάσταση

Το σύστημα που μελετάμε περιλαμβάνει τη σφαίρα και τη μάζα M που είναι αναρτημένη στο ελατήριο. Η αρχική κατάσταση αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή λίγο πριν λάβει χώρα η κρούση της σφαίρας με το ξύλο. Η αρχική ορμή $J_{αρχ}$ του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση της σφαίρας.

Αρχική ορμή συστήματος: $J_{αρχ} = m\upsilon_0$ (12.1)

Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα ήδη έχει ενσωματωθεί στο ξύλο και το σύστημα ξύλο-σφαίρα θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα V. Τη χρονική στιγμή της κρούσης, η ορμή του συστήματος ξύλο-σφαίρα $J_{τελ}$ θα είναι:

Χρονική στιγμή κρούσης: $J_{τελ} = (M+m)V$ (12.2)

Αρχή διατήρησης της ορμής: $J_{αρχ} = J_{τελ} \Rightarrow m\upsilon_0 = (M+m)V \Rightarrow V = \dfrac{m}{M+m}\upsilon_0$

Εξ αιτίας της ταχύτητας V, το σύστημα ξύλο-σφαίρα ωθείται προς τα πάνω συμπιέζοντας το ελατήριο. Επειδή η μάζα m=10 g της σφαίρας είναι πολλές φορές μικρότερη από τη μάζα M=2,0 kg του ξύλου (η μάζα της σφαίρας είναι μικρότερη από την ακρίβεια μέτρησης της μάζας του ξύλου), μπορούμε να γράψουμε M+m≈M. Οπότε, η τελευταία σχέση που δίνει την αρχική ταχύτητα του συστήματος ξύλο-σφαίρα γίνεται:

$$V = \frac{m}{M}\upsilon_0 \qquad (12.3)$$

Τη στιγμή της κρούσης, το σύστημα ξύλο-σφαίρα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}\upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{m^2\upsilon_0^2}{2M} \qquad (12.4)$$

Όπως ήδη αναφέραμε, η μάζα ωθείται προς τα πάνω συμπιέζοντας το ελατήριο. Στο διάστημα d=45cm στο οποίο συμπιέζεται το ελατήριο, η δυναμική του ενέργεια θα είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος ξύλο-σφαίρα:

Τελική κατάσταση συστήματος ξύλου-σφαίρας.

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου : $U_{sp} = \frac{1}{2}k\,d^2$ (12.5)

Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: $K = U_{sp} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2\upsilon_0^2}{2M} = \frac{1}{2}k\,d^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \sqrt{\frac{k\,M\,d^2}{m^2}}$

Οπότε: $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{k\,M\,d^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{(50N/m)\times(2{,}0kg)\times(0{,}45m)^2}{(0{,}010kg)^2}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = 450\,m/s$

ΑΣΚΗΣΗ 13

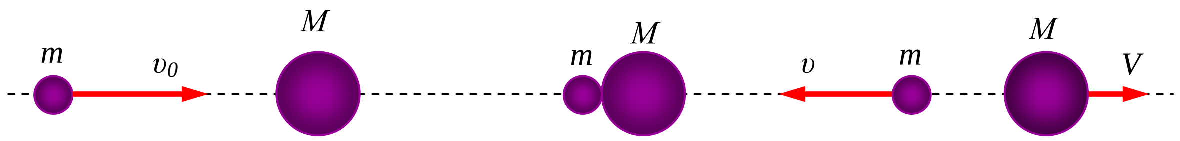
Μια σφαίρα μάζας m η οποία έχει ταχύτητα υ συγκρούεται μετωπικά και τελείως ελαστικά με μια άλλη σφαίρα η οποία έχει μάζα M και η οποία αρχικά ήταν ακίνητη. Να δείξετε ότι η μεταβολή ΔK της κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα m θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta K = \frac{4mM}{(M+m)^2}\kappa_0$$

όπου κ_0 είναι η αρχική κινητική ενέργεια της μάζας m.

ΛΥΣΗ

Πριν (Κατάσταση Α) Κρούση Μετά (Κατάσταση Β)



	Πριν από την κρούση	**Μετά από την κρούση**
Ορμής σφαίρας με μάζα m:	$p_0 = m\upsilon_0$	$p = -m\upsilon$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m:	$\kappa_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$	$\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα M:	$P_0 = 0$	$P = MV$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα M:	$K_0 = 0$	$K = \frac{1}{2}MV^2$

Διατήρηση της ορμής:

$$p_0 = p + P \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0 = -m\upsilon + MV \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0 + m\upsilon = MV \quad \Rightarrow \quad m(\upsilon_0 + \upsilon) = MV$$

$$\upsilon_0 + \upsilon = \frac{M}{m}V \qquad (1)$$

Διατήρηση της Ενέργειας:

$$\kappa_0 + K_0 = \kappa + K \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0^2 - m\upsilon^2 = MV^2 \Rightarrow$$

$$m(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) = MV^2 \quad \Rightarrow \quad m(\upsilon_0 - \upsilon)\,(\upsilon_0 + \upsilon) = MV^2 \qquad (2)$$

Διαιρώντας κατά μήλη τις Εξισώσεις 1 και 2 βρίσκουμε:

$$\upsilon_0 - \upsilon = V \qquad (3)$$

Οι Εξισώσεις 1 και 3 αποτελούν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με δυο αγνώστων. Λύση του συστήματος αυτού δίνει:

$$V = \frac{2m}{M+m}\upsilon_0 \qquad (4)$$

$$\upsilon = \frac{M-m}{M+m}\upsilon_0 \qquad (5)$$

Αρχική κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m: $\kappa_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$

Τελική κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m: $\quad \kappa_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Μεταβολή κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m: $\Delta K = \kappa_0 - \kappa_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Η ενέργεια ΔK μεταφέρθηκε στην αρχικά ακίνητη σφαίρα με μάζα M η οποία απέκτησε ταχύτητα V. Οπότε, η κινητική ενέργεια της σφαίρας με μάζα M θα είναι ίση με:

$$\Delta K = \frac{1}{2}MV^2$$

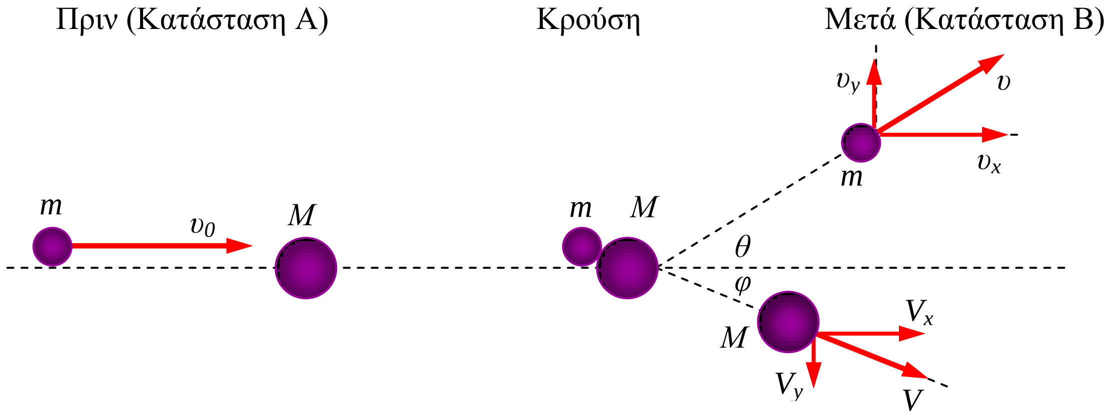
Η τελευταία Εξίσωση, σε συνδυασμό με την Εξίσωση 4, γίνεται:

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\left(\frac{2m}{M+m}\upsilon_0\right)^2 = \frac{4mM}{(M+m)^2}\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = \frac{4mM}{(M+m)^2}\kappa_0$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Μια μάζα m κινείται με ταχύτητα υ_0 παράλληλα με τη διεύθυνση x και συγκρούεται τελείως ελαστικά με ακίνητη μάζα M. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη απώλεια κινητικής ενέργειας της μάζας m συμβαίνει όταν η κρούση είναι μετωπική (κεντρική).

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική τελείως ελαστική κρούση, η μάζα m έχει ταχύτητα υ η οποία σχηματίζει γωνία $+\theta$ με τον άξονα x και η μάζα M έχει ταχύτητα V που σχηματίζει γωνία $-\varphi$ με τον άξονα x. Οι ποσότητες θ και φ είναι θετικοί αριθμοί.

	Πριν από την κρούση	**Μετά από την κρούση**
Ορμής σφαίρας με μάζα m:	$\vec{p}_0 = m\upsilon_0\hat{\imath}$	$\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m:	$\kappa_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$	$\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα M:	$P_0 = 0$	$\vec{P} = P_x\hat{\imath} + P_y\hat{\jmath}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα M:	$K_0 = 0$	$K = \frac{1}{2}MV^2$

Μετά από την κρούση:

$$\Delta K = \kappa_0 - \kappa \quad \Rightarrow \quad \Delta K = \frac{1}{2}m(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) \qquad (1)$$

$\mathit{Συνιστώσα\ x\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ m}$: $p_x = m\upsilon_x = m\upsilon\cos\theta$

$\mathit{Συνιστώσα\ y\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ m}$: $p_y = m\upsilon_y = m\upsilon\sin\theta$

$\mathit{Διάνυσμα\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ m}$: $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} = (m\upsilon\cos\theta)\hat{\imath} + (m\upsilon\sin\theta)\hat{\jmath}$ (2)

$\mathit{Συνιστώσα\ x\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ M}$: $P_x = MV_x = MV\cos\varphi$

$\mathit{Συνιστώσα\ y\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ M}$: $P_y = MV_y = -MV\sin\varphi$

$\mathit{Διάνυσμα\ της\ ορμής\ της\ μάζας\ m}$: $\vec{P} = P_x\hat{\imath} + P_y\hat{\jmath} = (MV\cos\varphi)\hat{\imath} - (MV\sin\varphi)\hat{\jmath}$ (3)

Διατήρηση της Ορμής:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_0\hat{\imath} = (m\upsilon\cos\theta)\hat{\imath} + (m\upsilon\sin\theta)\hat{\jmath} + (MV\cos\varphi)\hat{\imath} - (MV\sin\varphi)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$m\upsilon_0\hat{\imath} = [(m\upsilon\cos\theta) + (MV\cos\varphi)]\hat{\imath} + [(m\upsilon\sin\theta) - (MV\sin\varphi)])\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$m\upsilon_0 = (m\upsilon\cos\theta) + (MV\cos\varphi) \qquad (4)$$

$$0 = (m\upsilon\sin\theta) - (MV\sin\varphi) \qquad (5)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις Εξισώσεις 4 και 5 και μετά τις αθροίζουμε κατά μέλη:

$$m^2\upsilon_0^2 = m^2\upsilon^2\cos^2\theta + M^2V^2\cos^2\varphi + 2m\upsilon MV\cos\theta\cos\varphi$$

$$\underline{\quad 0 = m^2\upsilon^2\sin^2\theta + M^2V^2\sin^2\varphi - 2m\upsilon MV\sin\theta\sin\varphi \qquad +}$$

$$m^2\upsilon_0^2 = m^2\upsilon^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + M^2V^2(\cos^2\varphi + \sin^2\theta) +$$

$$+2m\upsilon MV(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$m^2\upsilon_0^2 = m^2\upsilon^2 + M^2V^2 + 2m\upsilon MV\cos(\theta + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$m^2\upsilon_0^2 - m^2\upsilon^2 = M^2V^2 + 2m\upsilon MV\cos(\theta + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$m(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) = M^2V^2 + 2m\upsilon MV\cos(\theta + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m(\upsilon_0^2 - \upsilon^2) = \frac{M^2V^2}{2m} + \upsilon MV\cos(\theta + \varphi) \qquad (6)$$

Από τις Εξισώσεις 1 και 6 παίρνουμε:

$$\Delta K = \frac{M^2V^2}{2m} + \upsilon MV\cos(\theta + \varphi) \qquad (7)$$

Για να είναι η μεταβολή ΔK της κινητικής ενέργειας της μάζας m μέγιστη, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $\Delta K = f(\theta+\varphi)$ να είναι ίση με μηδέν και η δεύτερη παράγωγος (στην τιμή που μηδενίζετε η πρώτη παράγωγος) να είναι αρνητική.

Παίρνουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $\Delta K = f(\Theta)$ ως προς Θ, όπου $\Theta = \theta + \varphi$:

$$\frac{d(\Delta K)}{d\Theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{M^2V^2}{2m}\right)} + \frac{d}{d\Theta}[\upsilon MV\cos(\Theta)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon MV\frac{d}{d\Theta}[\cos(\Theta)] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d(\Delta K)}{d\Theta} = -\upsilon MV\sin(\Theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \theta + \varphi = 0 \qquad (8)$$

Η Εξίσωση 8 μας λέει ότι η μεταβολή ΔK της κινητικής ενέργειας έχει ακρότατο (είναι μέγιστη ή ελάχιστη) όταν $\Theta = \theta + \varphi = 0$.

Παρατηρούμε ότι, όταν $\Theta = 0$, η δεύτερη παράγωγος της ΔK είναι:

$$\frac{d^2(\Delta K)}{d\Theta^2} = -\upsilon MV\cos(\Theta) = -\upsilon MV\cos(0) = -\upsilon MV < 0$$

Συνεπώς, η ΔK είναι μέγιστη όταν $\Theta = \theta + \varphi = 0$

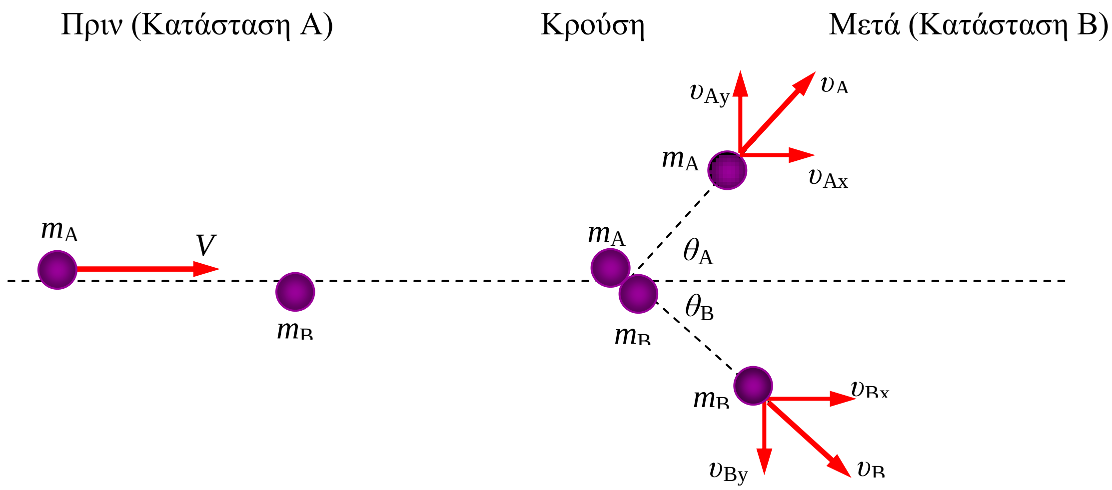
Και επειδή οι ποσότητες θ και φ είναι εξ ορισμού θετικές ποσότητες, για να είναι το άθροισμά τους μηδέν θα πρέπει $\theta = \varphi = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η κρούση είναι μετωπική (κεντρική).

ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια ατσάλινη μπίλια που έχει μάζα m_A κινείται με ταχύτητα υ_0 παράλληλα με την θετική x-κατεύθυνση, συγκρούεται τελείως ελαστικά και όχι μετωπικά με μια άλλη πανομοιότυπη αλλά ακίνητη μπίλια που έχει μάζα $m_B = m_A$. Μετά την κρούση, η πρώτη μπίλια κινείται με ταχύτητα υ_A η κατεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία θ_A με τον άξονα x, ενώ η δεύτερη μπίλια κινείται με ταχύτητα υ_B η κατεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία θ_B με τον άξονα x. Να αποδείξετε ότι $\theta_A + \theta_B = \pi/2$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική τελείως ελαστική κρούση, η μάζα m_A έχει ταχύτητα υ_A η οποία σχηματίζει γωνία $+\theta_A$ με τον άξονα x και η μάζα m_B έχει ταχύτητα υ_B που σχηματίζει γωνία $-\theta_B$ με τον άξονα x.



	Πριν από την κρούση	**Μετά από την κρούση**
Ορμής σφαίρας με μάζα m_A:	$\vec{p}_{A0} = m_A V\hat{\imath}$	$\vec{p}_A = p_{Ax}\hat{\imath} + p_{Ay}\hat{\jmath}$

Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m_A: $K_{A0} = \frac{1}{2} m_A V^2$ $K_A = \frac{1}{2} m_A \upsilon_A^2$

Ορμής σφαίρας με μάζα m_B: $p_{B0} = 0$ $\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{\imath} + p_{By}\hat{\jmath}$

Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m_B: $K_{B0} = 0$ $K_B = \frac{1}{2} m_B \upsilon_B^2$

Μετά από την κρούση:

Διατήρηση της Ενέργειας: $K_{A0} = K_A + K_B \Rightarrow \frac{1}{2} m_A V^2 = \frac{1}{2} m_A \upsilon_A^2 + \frac{1}{2} m_B \upsilon_B^2 \Rightarrow$

$V^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_B^2$ (1)

Η απλοποίηση έγινε επειδή $m_A = m_B$.

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας m_A: $p_{Ax} = m_A \upsilon_{Ax} = m_A \upsilon_A \cos\theta_A$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας m_A: $p_{Ay} = m_A \upsilon_{Ay} = m_A \upsilon_A \sin\theta_A$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m_A:

$\vec{p}_A = p_{Ax}\hat{\imath} + p_{Ay}\hat{\jmath} = (m_A \upsilon_A \cos\theta_A)\hat{\imath} + (m_A \upsilon_A \sin\theta_A)\hat{\jmath}$ (2)

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας m_B: $p_{Bx} = m_B \upsilon_x = m_A \upsilon_B \cos\theta_B$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας m_B: $p_{By} = m_B \upsilon_y = -m_B \upsilon_B \sin\theta_B$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m_B:

$\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{\imath} + p_{By}\hat{\jmath} = (m_B \upsilon_B \cos\theta_B)\hat{\imath} - (\, m_B \upsilon_B \sin\theta_B)\hat{\jmath}$ (3)

Διατήρηση της Ορμής:

$\vec{p}_{A0} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \Rightarrow$

$m_A V\hat{\imath} = (m_A \upsilon_A \cos\theta_A)\hat{\imath} + (m_A \upsilon_A \sin\theta_A)\hat{\jmath} + (m_B \upsilon_B \cos\theta_B)\hat{\imath} - (m_B \upsilon_B \sin\theta_B)\hat{\jmath} \Rightarrow$

$m_A V\hat{\imath} = [(m_A \upsilon_A \cos\theta_A) + (m_B \upsilon_B \cos\theta_B)]\hat{\imath} + [(m_A \upsilon_A \sin\theta_A) - (m_B \upsilon_B \sin\theta_B)])\hat{\jmath} \Rightarrow$

$m_A V = (m_A \upsilon_A \cos\theta_A) + (m_B \upsilon_B \cos\theta_B) \Rightarrow V = (\upsilon_A \cos\theta_A) + (\upsilon_B \cos\theta_B)$ (4)

$0 = (m_A \upsilon_A \sin\theta_A) - (m_B \upsilon_B \sin\theta_B) \Rightarrow 0 = (\upsilon_A \sin\theta_A) - (\upsilon_B \sin\theta_B)$ (5)

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις Εξισώσεις 4 και 5 και μετά τις αθροίζουμε κατά μέλη:

$$V^2 = \upsilon_A^2 \cos^2\theta_A + \upsilon_B^2 \cos^2\theta_B + 2\upsilon_A \upsilon_B \cos\theta_A \cos\theta_B$$

$$0 = \upsilon_A^2 \sin^2\theta_A + \upsilon_B^2 \sin^2\theta_B - 2\upsilon_A \upsilon_B \sin\theta_A \sin\theta_B \quad +$$

$$V^2 = \upsilon_A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \upsilon_B^2(\cos^2\varphi + \sin^2\theta) + 2\upsilon_A \upsilon_B(\cos\theta \cos\varphi - \sin\theta \sin\varphi) \Rightarrow$$

$V^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_B^2 + 2\upsilon_A \upsilon_B \cos(\theta_A + \theta_B)$ (6)

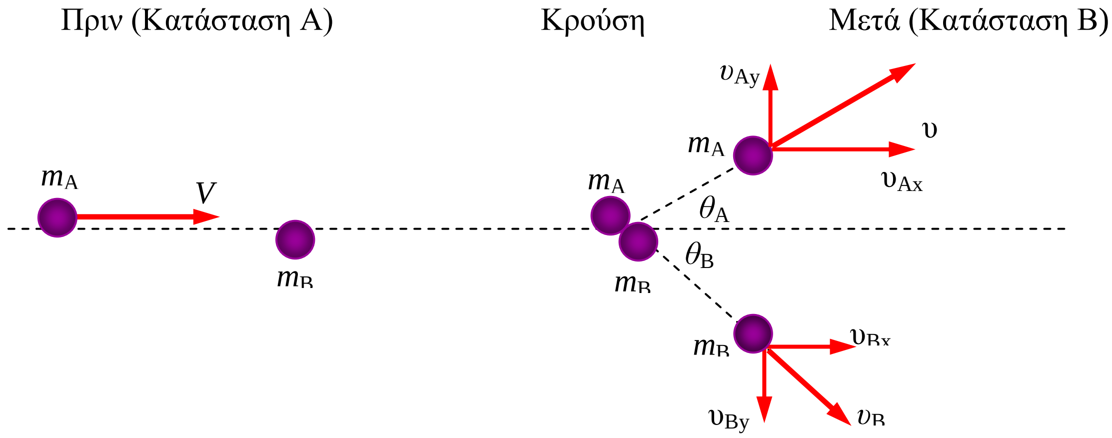
Από το συνδυασμό των Εξισώσεων 1 και 6 προκύπτει ότι:

$$2\upsilon_A\upsilon_B\cos(\theta_A+\theta_B)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_A+\theta_B)=0 \quad \Rightarrow \quad \theta_A+\theta_B=\frac{\pi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Ένας δίσκος του χόκεϊ με μάζα m, τον οποίο συμβολίζουμε με Β, είναι ακίνητος πάνω σε λεία επιφάνεια πάγου. Ένας δεύτερος δίσκος με ίδια μάζα m, ο οποίος συμβολίζεται με Α και ο οποίος κινείται με ταχύτητα V = 40,0 m/s παράλληλα με τη διεύθυνση x, συγκρούεται όχι ελαστικά με τον ακίνητο δίσκο Β. Μετά την κρούση, οι δίσκοι Α και Β κινούνται προς κατευθύνσεις που σχηματίζουν γωνίας $\theta_A = 30{,}0^0$ και $\theta_B = 45{,}0^0$ ως προς τη διεύθυνση x. Να υπολογίσετε: (α) τις ταχύτητες των δυο δίσκων μετά από την κρούση και (β) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του δίσκου Α που χάνεται κατά την κρούση.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική μη ελαστική κρούση, η μάζα m_A έχει ταχύτητα υ_A η οποία σχηματίζει γωνία $+\theta_A$ με τον άξονα x και η μάζα m_B έχει ταχύτητα υ_B που σχηματίζει γωνία $-\theta_B$ με τον άξονα x. Οι ποσότητες θ_A και θ_B είναι θετικοί αριθμοί.

	Πριν από την κρούση	**Μετά από την κρούση**
Ορμής σφαίρας με μάζα m_A:	$\vec{p}_{A0}=m_A V\hat{\imath}$	$\vec{p}_A=p_{Ax}\hat{\imath}+p_{Ay}\hat{\jmath}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m_B:	$K_{A0}=\frac{1}{2}m_A V^2$	$K_A=\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα m_B:	$p_{B0}=0$	$\vec{p}_B=p_{Bx}\hat{\imath}+P_{By}\hat{\jmath}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα m_B:	$K_{B0}=0$	$K_B=\frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2$

Μετά από την κρούση:

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας m_A: $p_{Ax}=m_A\upsilon_{Ax}=m_A\upsilon_A\cos\theta_A$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας m_A: $p_{Ay}=m_A\upsilon_{Ay}=m_A\upsilon_A\sin\theta_A$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m_A:

$$\vec{p}_A=p_{Ax}\hat{\imath}+p_{Ay}\hat{\jmath}=(m_A\upsilon_A\cos\theta_A)\hat{\imath}+(m_A\upsilon_A\sin\theta_A)\hat{\jmath} \qquad (2)$$

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας m_B: $p_{Bx} = m_B\upsilon_x = m_A\upsilon_B\cos\theta_B$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας m_B: $p_{By} = m_B\upsilon_y = -m_B\upsilon_B\sin\theta_B$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m:

$$\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{\imath} + p_{By}\hat{\jmath} = (m_B\upsilon_B\cos\theta_B)\hat{\imath} - (\, m_B\upsilon_B\sin\theta_B)\hat{\jmath} \qquad (3)$$

Διατήρηση της Ορμής:

$$\vec{p}_{A0} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \quad \Rightarrow$$

$$m_AV\hat{\imath} = (m_A\upsilon_A\cos\theta_A)\hat{\imath} + (m_A\upsilon_A\sin\theta_A)\hat{\jmath} + (m_B\upsilon_B\cos\theta_B)\hat{\imath} - (m_B\upsilon_B\sin\theta_B)\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$m_AV\hat{\imath} = [(m_A\upsilon_A\cos\theta_A) + (m_B\upsilon_B\cos\theta_B)]\hat{\imath} + [(m_A\upsilon_A\sin\theta_A) - (m_B\upsilon_B\sin\theta_B)])\hat{\jmath} \quad \Rightarrow$$

$$m_AV = (m_A\upsilon_A\cos\theta_A) + (m_B\upsilon_B\cos\theta_B) \quad \Rightarrow \quad V = (\upsilon_A\cos\theta_A) + (\upsilon_B\cos\theta_B) \qquad (4)$$

$$0 = (m_A\upsilon_A\sin\theta_A) - (m_B\upsilon_B\sin\theta_B) \quad \Rightarrow \quad 0 = (\upsilon_A\sin\theta_A) - (\upsilon_B\sin\theta_B) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των γωνιών στις Εξισώσεις 4 και 5 παίρνουμε το σύστημα:

$$V = (\upsilon_A\cos(30{,}0) + (\upsilon_B\cos(45{,}0)) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_A + \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_B \qquad (6)$$

$$0 = (\upsilon_A\sin(30{,}0) - (\upsilon_B\sin(45{,}0)) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}\upsilon_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_B \qquad (7)$$

(α) **Υπολογισμός ταχυτήτων υ_A και υ_B:**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις Εξισώσεις 6 και 7:

$$V = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\upsilon_A \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\,V = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\left(40{,}0\frac{m}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = 14{,}6\,m/s$$

Από την Εξίσωση 7 παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\upsilon_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_B \quad \Rightarrow \quad \upsilon_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\upsilon_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(14{,}6\frac{m}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = 10{,}3\,m/s$$

(β) **Υπολογισμός του ποσοστού απώλειας της αρχικής ενέργειας:**

Ποσοστό απώλειας αρχικής ενέργειας:

$$\lambda(\%) = \frac{K_{A0} - K_A}{K_{A0}} = \frac{\frac{1}{2}m_AV^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2}{\frac{1}{2}m_AV^2} \times 100 = \frac{V^2 - \upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}{V^2} \times 100 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda(\%) = \frac{V^2 - \upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}{V^2} \times 100 = \frac{(40{,}0\frac{m}{s})^2 - (14{,}6\frac{m}{s})^2 - (10{,}3\frac{m}{s})^2}{(40{,}0\frac{m}{s})^2} \times 100 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda(\%) = 80{,}0\%$$