ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Δίνονται τα παρακάτω δυο διανύσματα θέσης:
   $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$
   Να υπολογίσετε:
   (α) Τα μέτρα $A = |\vec{A}|$ $\kappa\alpha\iota$ $B = |\vec{B}|$ των δυο διανυσμάτων.
   (β) Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\hat{B}$ των διανυσμάτων $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.
   (γ) Το διάνυσμα μετατόπισης $\vec{R}$ το οποίο αντιστοιχεί στα διανύσματα $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.
   (δ) Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{R}$ του διανύσματος μετατόπισης και να αποδείξετε ότι $|\hat{R}| = 1$.
   (ε) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{B}$ των διανυσμάτων $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.
   (στ) Τη γωνία φ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.
   (ζ) Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{A} \times \vec{B}$ των διανυσμάτων $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.

2. Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ ενός κινητού εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:
   $\vec{r}(t) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = (2t^2 - 3t + 1)\,\hat{\imath} + (2t - 1)\hat{\jmath}$
   (α) Να προσδιορίσετε τις μονάδες μέτρησης των αριθμητικών τιμών που υπάρχουν στην παραπάνω σχέση.
   (β) Να υπολογίσετε το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}(t)$ του κινητού τη χρονική στιγμή t = 3,0 s
   (γ) Να υπολογίσετε την προβολή του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{\upsilon}(t)$ του κινητού πάνω στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα θέσης $\vec{b} = 3\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$
   (δ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}(t)$. Να γράψετε το συμπέρασμά σας αναφορικά με το είδος της κίνησης του κινητού.

3. Δίνονται οι παρακάτω δυο συναρτήσεις:
   $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 1} \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x^2 + x + 2$
   Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραγώγους:
   $\frac{df}{dx}, \quad \frac{dg}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(fg), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)$

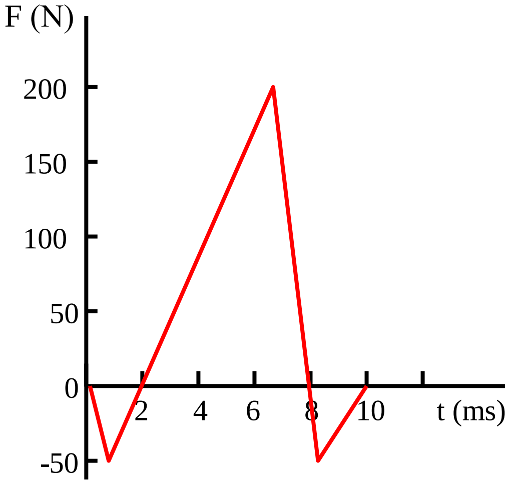
4. Δίνεται η κυματοσυνάρτηση:
   $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$
   όπου A, k και ω είναι το πλάτος, ο κυματαριθμός και η γωνιακή συχνότητα του κύματος. Οι παράμετροι A, k και ω είναι σταθερές ποσότητες. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους:
   $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ και $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$
   (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης)

5. Σε ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων η δυναμική ενέργεια σε κάθε σημείο του χώρου εξαρτάται από τις συντεταγμένες (x, y, z) του σημείου σύμφωνα με τη σχέση:
$U(x, y, z) = -xy^2z + 4xy$
Να υπολογίσετε το ολικό διαφορικό dU της δυναμικής ενέργειας.

6. Πάνω σε ένα σώμα δρα μια δύναμη η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με το γράφημα F=F(t) του διπλανού σχήματος. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{t=0}^{t=10s} F(t)dt = ???$$

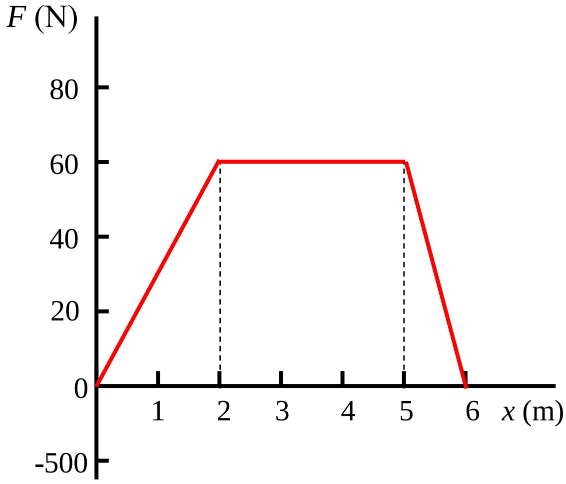
Θα μάθετε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με την ώθηση δύναμη στο χρονικό διάστημα από t=0 s έως t=10 s.



7. Πάνω σε ένα σώμα που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση x ασκείται δύναμη F η οποία μεταβάλλεται με τη μετατόπιση x όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.
Να υπολογίσετε του ολοκλήρωμα:

$$\int_{x=0\ m}^{x=6,0m} F(x)dx = ????$$

Θα μάθετε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το έργο που παράγει η δύναμη F στο διάστημα από x=0 m έως x = 6,0 m.



8. Η δύναμη F που ασκείται πάνω σε ένα σώμα αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την σχέση F = α + β t^2, όπου α = 45 N και β=3,0 N/s^2. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{t=0}^{t=3\ s} F(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=3,0\ s} (a+\beta t^2)\,dt = ???$$

της συνάρτησης αυτής στο χρονικό διάστημα από t=0 s έως t=3,0 s. Θα μάθετε ότι το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει την ώθηση δύναμης στο χρονικό διάστημα από t=0 s έως t=3 s.
Δίνονται:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \int_{x=x_1}^{x_2} cx^n dx = \frac{c}{n+1}(x_2^{n+1} - x_1^{n+1})$$

9. Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα στο χρονικό διάστημα από t_1 = 0 s έως t_2 = 3,0 s:

$$\int_{t=0}^{t=3,0s} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = ???$$

όπου T = 3,0 s

Δίνεται ο γενικός τύπος ολοκλήρωσης:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}(\cos ax_2 - \cos ax_1)$$

10. Να υπολογίσετε το παρακάτω ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{y=0}^{y=3,0\,m} y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy = ???$$

Δίνεται ο γενικός τύπος ολοκλήρωσης:

$$\int x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$$