

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

5η ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ – ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ – ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΚΥΛΙΣΗ

ΘΕΜΑ 5.1 (Θεωρία)

Σε ποιες περιπτώσεις το κέντρο μάζας ενός σώματος ταυτίζεται με το γεωμετρικό του κέντρο;

ΘΕΜΑ 5.2 (Θεωρία)

(α) Πως θα εξηγούσατε την έννοια της ροπής αδράνειας σε ένα που δεν γνωρίζει φυσική;

(β) Να αποδείξετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζεται η ροπή αδράνειας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Λεπτότοιχου σωλήνα ή δακτυλίου μάζας m και ακτίνας βάσης R ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του.
- Συμπαγούς κυλίνδρου ή δίσκου μάζας m και ακτίνας βάσης R ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του.
- Σφαιρικού φλοιού μάζας m και ακτίνας R ο οποίος περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του.
- Συμπαγούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας R η οποία περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

Τα παραπάνω σώματα είναι κατασκευασμένα από ομογενές υλικό.

ΘΕΜΑ 5.3 (Θεωρία)

(α) Πως σχετίζεται η ζυγοστάθμιση των τροχών του αυτοκινήτου με τη στροφορμή;

(β) Κατά τη ζυγοστάθμιση ενός τροχού αυτοκινήτου τοποθετείται συγκεκριμένη ποσότητα μάζας μόλυβδου σε συγκεκριμένη θέση της περιφέρειας της ζάντας του τροχού. Για ποιο λόγο γίνεται η προσθήκη αυτή της μικρής μάζας;

ΘΕΜΑ 5.4

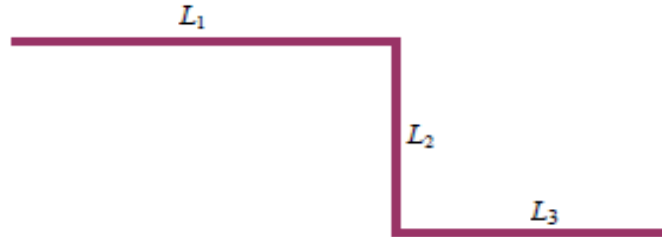
Τρεις μεταλλικές ράβδοι με μήκη $L_1 = 40,0 \text{ cm}$, $L_2 = 30,0 \text{ cm}$ και $L_3 = 50,0 \text{ cm}$ και με διατομή σχετικά πολύ μικρή, είναι ομογενείς και έχουν γραμμικές πυκνότητας μάζας $\mu_1 = 1,96 \text{ kg/m}$, $\mu_2 = 2,30 \text{ kg/m}$ και $\mu_3 = 1,50 \text{ kg/m}$, αντιστοίχα. Οι ράβδοι αυτοί είναι συναρμολογημένοι σε σχήμα ορθογωνίου τριγώνου.

α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.

β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής

ΘΕΜΑ 5.5

Τρεις ομογενείς μεταλλικοί ράβδοι με μήκη $L_1 = 1,0\text{m}$, $L_2 = 0,50\text{ m}$ και $L_3 = 0,75\text{ m}$ και με διατομή σχετικά πολύ μικρή, έχουν γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu_1 = 1,56\text{ kg/m}$, $\mu_2 = 2,00\text{ kg/m}$ και $\mu_3 = 2,50\text{ kg/m}$. Οι ράβδοι αυτοί είναι συναρμολογημένοι όπως το παρακάτω σχήμα:

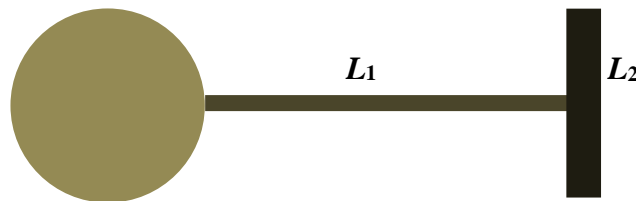


- Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της μεταλλικής κατασκευής.
- Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}})$ της θέσης του κέντρου μάζας της παραπάνω μεταλλικής κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.6

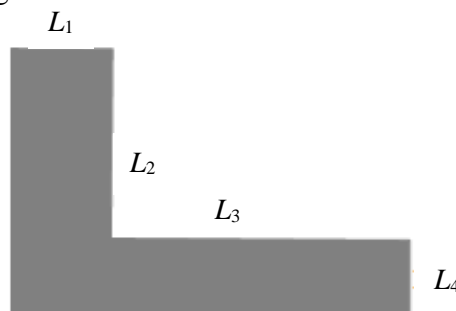
Μια κυκλική μεταλλική πλάκα και δυο μεταλλικές ράβδοι είναι συναρμολογημένοι όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Αν η κυκλική μεταλλική πλάκα έχει ακτίνα $R = 13,5\text{ cm}$ και επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma = 8,10\text{ kg/m}^2$, και οι δυο ράβδοι έχουν μήκη $L_1 = 55,5\text{ cm}$ και $L_2 = 25,2\text{ cm}$ με αντίστοιχες γραμμικές πυκνότητες μάζας $\mu_1 = 1,56\text{ kg/m}$ και $\mu_2 = 3,00\text{ kg/m}$, τότε:

- Να υπολογίσετε τη μάζα της μεταλλικής κατασκευής.
- Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}})$ της θέσης του κέντρου μάζας της παραπάνω μεταλλικής κατασκευής.



ΘΕΜΑ 5.7

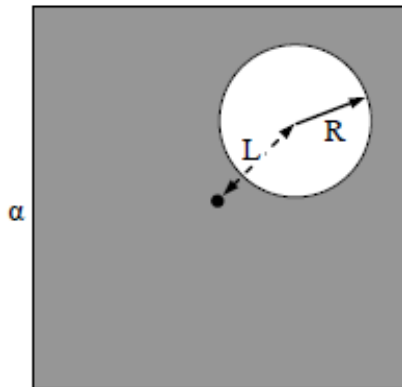
Στην παρακάτω μεταλλική κατασκευή $L_1 = 0,500\text{ m}$, $L_2 = 1,000\text{ m}$, $L_3 = 1,500\text{ m}$ και $L_4 = 0,400\text{ m}$. Η κατασκευή έχει προκύψει από ομογενή αλουμινένια πλάκα που έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma = 8,100\text{ kg/m}^2$



- α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της κατασκευής.
 β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.8

Μια τετράγωνη και επίπεδη μεταλλική κατασκευή που έχει πλευρά $a = 1,000 \text{ m}$ έχει μια κυκλική οπή ακτίνας $R = 25,0 \text{ cm}$ της οποίας το κέντρο βρίσκεται πάνω σε μια διαγώνιο και σε απόσταση $L = 30,0 \text{ cm}$ από το γεωμετρικό κέντρο της πλάκας. Η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής πλάκας που χρησιμοποιήθηκε είναι $\sigma = 31,20 \text{ kg/m}^2$.



- (α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της κατασκευής.
 (β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.9

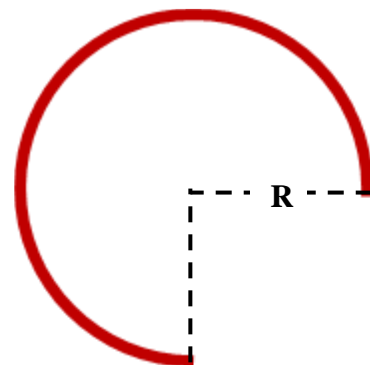
Σε μια μεταλλική πλάκα σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου, της οποίας η επιφανειακή πυκνότητα μάζας είναι $\sigma = 31,2 \text{ kg/m}^2$, η μεγάλη βάση B , η μικρή βάση β και το ύψος $υ$ είναι αντίστοιχα, $B = 1,50 \text{ m}$, $\beta = 0,60 \text{ m}$ και $υ = 1,00 \text{ m}$.

- (α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της κατασκευής.
 (β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.10

Το διπλανό σχήμα είναι μια μεταλλική κατασκευή που έχει μορφή κυκλικού τόξου ακτίνας $R = 0,500 \text{ m}$. Για την κατασκευή αυτή χρησιμοποιήθηκε μεταλλική ράβδος με γραμμική πυκνότητα μάζας $\mu = 2,56 \text{ kg/m}$.

- α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της κατασκευής.
 β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης μεταλλικής κατασκευής.



ΘΕΜΑ 5.11

Δίνεται μια μη ομογενής μεταλλική ράβδος με σταθερή διατομή η οποία έχει μήκος $L = 2,00$ m και γραμμική πυκνότητα μάζας η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση x από το ένα άκρο αυτής σύμφωνα με τη σχέση $\mu(x) = \frac{dm}{dx} = \mu_0 + \gamma x$, όπου $\mu_0 = 3,56$ Kg/m και $\gamma = 5,20$ g/cm⁻².
Να υπολογίσετε:

- (α) Τη μάζα της ράβδου.
- (β) Την απόσταση x_{cm} του κέντρου μάζας της ράβδου από το αριστερό άκρο της.
- (γ) Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κάθετο άξονα που διέρχεται από το αριστερό άκρο της ράβδου.
- (δ) Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κάθετο άξονα που διέρχεται από το δεξιό άκρο της ράβδου.
- (ε) Τη βαρυτική ροπή που δρα πάνω στη ράβδο στην περίπτωση που το αριστερό άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο και η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την κατακόρυφο.

ΘΕΜΑ 5.12

Δίνεται μια επίπεδη μεταλλική κατασκευή που έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη $a = 1,500$ m και $\beta = 2,000$ m. Η κατασκευή αυτή προέκυψε από ομογενή μεταλλική πλάκα με επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma = 31,20$ kg/m².

- (α) Να υπολογίσετε τη μάζα της μεταλλικής κατασκευής.
- (β) Να επιλέξετε ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y) και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της μεταλλικής κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.13

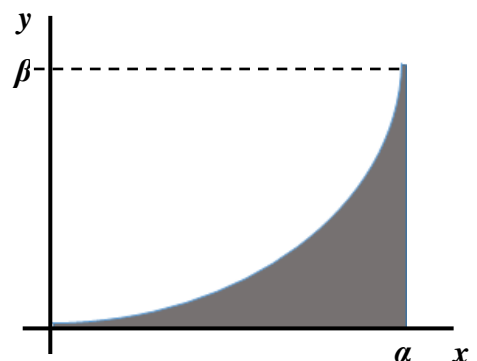
Μια ημικυκλική μεταλλική πλάκα έχει ακτίνα $R = 1,500$ m, πάχος $h = 5,00$ cm και είναι κατασκευασμένη από ομογενές μέταλλο που έχει πυκνότητα $\rho = 2,700$ g/cm³.

- α) Να υπολογίσετε τη συνολική μάζα της κατασκευής.
- β) Να επιλέξετε το σύστημα συντεταγμένων που σας βολεύει καλύτερα για να υπολογίσετε τις συνιστώσες (x_{cm}, y_{cm}) της θέσης του κέντρου μάζας της συγκεκριμένης κατασκευής.

ΘΕΜΑ 5.14

Μια μεταλλική κατασκευή έχει δημιουργηθεί από μια αλουμινένια πλάκα που έχει επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = 8,10$ kg/m² και έχει τη μορφή που δείχνει το διπλανό σχήμα.

Στο σύστημα συντεταγμένων (x, y) , το καμπύλο τμήμα της κατασκευής είναι παραβολή και αντιστοιχεί στην εξίσωση $y = cx^2$ όπου $c = 0,375$ m⁻¹. Το μήκος και το ύψος της κατασκευής είναι αντίστοιχα $a=2,000$ m και $\beta=1,500$ m, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:



- α) Τη μάζα της κατασκευής.
- β) Τις συντεταγμένες της θέσης του κέντρου μάζας της κατασκευής στο προκαθορισμένο σύστημα συντεταμένων (x, y) .
- γ) Τις ροπές αδράνειας της κατασκευής I_y και I_x , όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από τους άξονες y και x , αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 5.15

Τέσσερα σώματα, ένας συμπαγής κύλινδρος, ένας λεπτότοιχος σωλήνας, μια συμπαγής σφαίρα και ένας λεπτότοιχος σφαιρικός φλοιός, όλα μάζας m και ακτίνας R , τοποθετούνται σε ύψος h πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Και τα τέσσερα σώματα αφήνονται από την ηρεμία την ίδια χρονική στιγμή και κυλάνε προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς αυτά να ολισθαίνουν. Για να γίνει το πρόβλημα πιο ενδιαφέρον, τα παραπάνω τέσσερα σώματα συναγωνίζονται με ένα κύβο ίδιας μάζας m ο οποίος ολισθαίνει χωρίς τριβή προς τα κάτω στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Με ποια σειρά θα φθάσουν τα πέντε σώματα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;

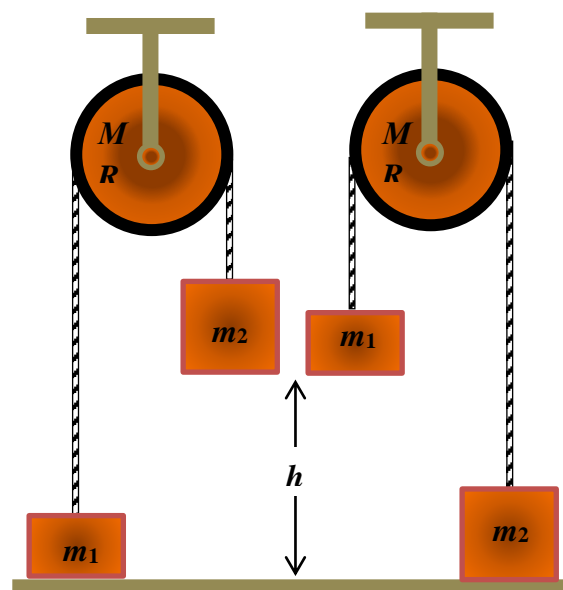
ΘΕΜΑ 5.16

Ένας τροχός ακονίσματος ειδικών προδιαγραφών έχει ακτίνα $R = 0,300$ m και μάζα $m = 25,0$ kg. Ο τροχός αυτό περιστρέφεται με συχνότητα $f = 900$ rev/min και τροχίζει ένα αντικείμενο το οποίο ασκεί στην περιφέρειά του κάθετη δύναμη $N = 160$ N. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ τροχού και αντικειμένου είναι $\mu_k = 0,22$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s γίνεται διακοπή του ηλεκτρικού ρεύματος.

- α) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που απαιτείται μέχρι ο τροχός να ακινητοποιηθεί.
- β) Πόσες στροφές θα κάνει ο τροχός μέχρι αυτός να σταματήσει;

ΘΕΜΑ 5.17

Το διπλανό σχήμα αναπαριστά τη μηχανή του Atwood. Αυτή αποτελείται από μια τροχαλία ακτίνας R και μάζας M και από ένα μάντα ο οποίος περνά από το πάνω μέρος της τροχαλίας στα άκρα του οποίου αναρτώνται δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 , με $m_2 > m_1$. Αρχικά, το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος ενώ το σώμα με μάζα m_2 βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο οπότε το σώμα με μάζα m_2 θα αρχίσει να κινείται προς τα κάτω θέτοντας ταυτόχρονα την τροχαλία σε περιστροφή και το σώμα με μάζα m_1 σε κίνηση προς τα πάνω. Η μηχανή Atwood θα είναι σε κίνηση έως ότου το σώμα με μάζα m_2 έρθει σε επαφή με το έδαφος. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία η μάζα m_2 προσκρούει στο έδαφος.



ΘΕΜΑ 5.18

(Πραγματικό γεγονός) Σε μια διασταύρωση δυο δρόμων ο ένας από τους δρόμους αυτούς έχει STOP. Ένα αυτοκίνητο ΙΧ κινείται στο δρόμο με το STOP, και καθώς αυτό περνούσε τη διασταύρωση, μια μηχανή που κινούταν στον άλλο δρόμο της διασταύρωσης προσέκρουσε κάθετα στο μπροστινό τροχό του αυτοκινήτου. Στο σημείο της σύγκρουσης κατέφθασε η τροχαία για να καταγράψει το γεγονός και να συντάξει σχετική έκθεση. Από την έκθεση αυτή προκύπτουν τα εξής στοιχεία:

- Δεν βρέθηκαν σημάδια ολίσθησης πάνω στην ασφαλτο, τόσο της μηχανής όσο και του αυτοκινήτου.
- Το αυτοκίνητο είχε στραφεί σε γωνία $\varphi = 60^\circ$ ως προς την αρχική κατεύθυνση του δρόμου που κινούνταν.

Οι δυο οδηγοί κατέθεσαν στον τροχονόμο τα εξής:

Οδηγός ΙΧ: Σταμάτησα στο STOP, έλεγξα τη διασταύρωση και προσπάθησα να περάσω τη διασταύρωση με την ελάχιστη ταχύτητα. Η μηχανή κινούνταν με μεγάλη ταχύτητα, δεν πρόλαβα να αντιδράσω με αποτέλεσμα να γίνει η σύγκρουση.

Οδηγός Μηχανής: Πήγαινα με ταχύτητα 40 km/h όταν ξαφνικά μπροστά μου βρέθηκε το ΙΧ αυτοκίνητο το οποίο παραβίασε το STOP χωρίς να σταματήσει. Δεν πρόλαβα να πατήσω φρένο με αποτέλεσμα να γίνει η σύγκρουση.

Αν ο οδηγός του ΙΧ έχει δίκιο τότε ο οδηγός της μηχανής είναι συνυπαίτιος για το ατύχημα με ότι αυτό συνεπάγεται για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Αν ο οδηγός της μηχανής έχει δίκιο τότε ο οδηγός του ΙΧ είναι αποκλειστικά υπεύθυνος για το ατύχημα. Εσείς, ως πραγματογνώμονας μηχανικός, κληθήκατε να διαλευκάνετε τις συνθήκες του ατυχήματος. Για το σκοπό αυτό ζητήσατε και πήρατε τις εξής πληροφορίες:

Μάζα αυτοκινήτου μαζί με τον οδηγό: $M = 1280 \text{ kg}$ με το 60% του βάρους του αυτοκινήτου να ασκείται στους μπροστινούς τροχούς. Απόσταση τροχών (εμπρός με πίσω): $L = 2,00 \text{ m}$.

Μάζα μηχανής μαζί με το οδηγό: $m = 200 \text{ kg}$.

Συντελεστής κινητικής τριβής: $\mu_k = 0,72$

Με βάση τα στοιχεία που έχετε στη διάθεσή σας, ποια θα είναι η γνωμάτευση σας;