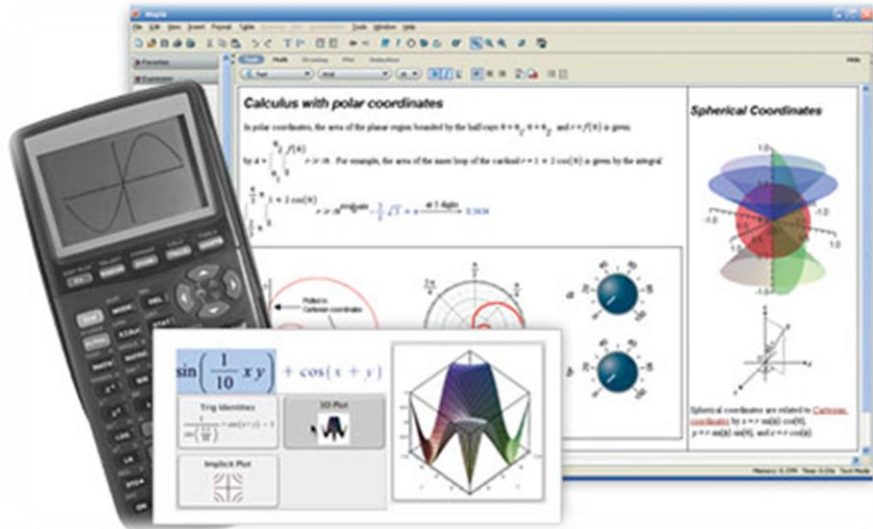


Αριθμητικοί Υπολογισμοί & Μεταβλητές

Κεφάλαιο 2^ο + 3^ο



Ά. Γιαννούλας

Γενικά

- Τα κενά στις εντολές αγνοούνται
 - Εξαιρούνται τα 'ψηφία των αριθμών' και οι 'εντολές Maple'

```
> (3 *4);  
12  
> (3*4);  
12  
> co s(45);  
Error, missing operator or `;`
```

- Στις μαθηματικές εκφράσεις χρησιμοποιούμε παρενθέσεις () και αγκύλες [] { }
Στο Maple **ΜΟΝΟ** παρενθέσεις
- Αν παραληφθεί η πράξη του πολλαπλασιασμού σε αριθμητικά δεδομένα, η πράξη υπολογίζεται σωστά, όχι όμως και σε μη-αριθμητικά ...

```
> 3cos(45);  
Error, missing operator or `;`  
> 3*cos(45);  
>  
3 cos(45)
```

Παρατηρήσεις & Σχόλια

1. Μετά το # αγνοείται όλη η υπόλοιπη σειρά στο φύλλο εργασίας

```
[ > # Κάθε τι που υπάρχει μετά αγνοείται  
[ > # έως το τέλος της σειράς  
[ > 45^2; # Όμοια και εδώ  
[  
[ > 2025  
[ >
```

2. Κάθε τι που υπάρχει μεταξύ του (* και του *) αγνοείται

Είναι πολύ χρήσιμος τρόπος να απενεργοποιείς ένα μέρος του φύλλου εργασίας, χωρίς όμως να το διαγράφεις

```
[ > (*  
[ > 'Ότι υπάρχει  
[ > εδώ μέχρι τον  
[ > επόμενο αστερίσκο  
[ > και παρένθεση  
[ > αγνοείται  
[ > *)  
[ >
```

Εκτελέσιμες Ομάδες (Execution Groups)

- Όλες οι εντολές που υπάρχουν μέσα σε έναν βραχίονα `[,]`, αποτελούν μία εκτελέσιμη ομάδα

```
> sqrt( 847 ); 5*%;  
11√7  
55√7
```

- Ο πιο απλός τρόπος να δημιουργήσουμε μια 'εκτελέσιμη ομάδα' είναι να γράψουμε τις εντολές μας στην ίδια σειρά

- Σε μία εκτελέσιμη ομάδα αν αλλάξω οποιαδήποτε τιμή, εκτελώντας `↵` θα υπολογιστούν οι πράξεις όλης της ομάδας

```
> sqrt( 952 ); 5*%;  
2√238  
10√238
```

Βασικές πράξεις

- Σειρά επίλυσης πράξεων: από τα αριστερά στα δεξιά:
 1. παραστάσεις μέσα σε παρενθέσεις
 - από την πιο εσωτερική προς την επόμενη εξωτερική κ.ο.κ.
 2. δυνάμεις
 3. πολλαπλασιασμοί & διαιρέσεις
 4. προσθέσεις & αφαιρέσεις

[Προσοχή στον τρόπο με τον οποίο γράφουμε μια παράσταση

```
> 5^2/5*3;
```

15

[Είναι διαφορετικό από το:

```
> 5^2/(5*3);
```

$\frac{5}{3}$

[Όμοια για την παράσταση:

```
> -2^4;
```

-16

```
> (-2)^4;
```

16

Άσκηση: Εξηγήστε το αποτέλεσμα των επόμενων παραστάσεων

```
> 2^αβ;
```

$2^{\alpha\beta}$

```
> 2^α*β;
```

$2^{\alpha}\beta$

```
>
```

```
> 2^(α*β);
```

$2^{(\alpha\beta)}$

```
> 2^-4;
```

Error, '-' unexpected

```
> 2^(-4);
```

$\frac{1}{16}$

Βασικές συναρτήσεις

Συνάρτηση	Όρος (en)	Εντολή	Μαθηματικά	Αντίστροφη
απόλυτη τιμή	absolute value	<code>abs(x)</code>	$ x $	-
τετραγωνική ρίζα	square root	<code>sqrt(x)</code>	\sqrt{x}	x^2 ή x^{**2}
νιοστή ρίζα	n^{th} root	<code>surd(x,n)</code>	$\sqrt[n]{x}$	x^n ή x^{**n}
συνημίτονο	cosine	<code>cos(x)</code>	συν(x)	<code>arccos(x)</code>
ημίτονο	sine	<code>sin(x)</code>	ημ(x)	<code>arcsin(x)</code>
εφαπτομένη	tangent	<code>tan(x)</code>	εφ(x)	<code>arctan(x)</code>
εκθετική	exponential	<code>exp(x)</code>	e^x	<code>log(x)</code> ή <code>ln(x)</code>
λογάριθμος βάση 10	logarithm base 10	<code>log10(x)</code>	$\log_{10}(x)$	10^x ή 10^{**x}
λογάριθμος βάση a	logarithm base a	<code>log[a](x)</code>	$\log_a(x)$	a^x ή a^{**x}
λογάριθμος βάση e	logarithm base e	<code>ln(x)</code>	$\ln(x)$	e^x ή e^{**x}

βλ. πληρέστερη λίστα συναρτήσεων & σταθερών στο :
Ματζάκος, Ν. (2007), *Εισαγωγή στο Maple*, σελ. 39 - 40

Οι πιο γνωστές σταθερές

Σταθερά	Εντολή	Μαθηματικά
π	Pi	π
e	exp(1)	e
i	I ή sqrt(-1)	i
άπειρο	infinity	∞

βλ. πληρέστερη λίστα συναρτήσεων & σταθερών στο :
Ματζάκος, Ν. (2007), *Εισαγωγή στο Maple*, σελ. 39 - 40

Προσεγγιστικές & ακριβείς τιμές

- Το Maple χειρίζεται τα στοιχεία των παραστάσεων ως μαθηματικά αντικείμενα και κάνει ΑΚΡΙΒΕΙΣ υπολογισμούς

```
> (1/3)+(1/7);  

$$\frac{10}{21}$$
  
> 2*(3*Pi-12*Pi);  
-18 π
```

- Μόνο όταν γίνεται εσκεμμένα χρήση δεκαδικών ο υπολογισμός είναι προσεγγιστικός
- Αν έχω αριθμό μπορώ στο τέλος του να βάλω τελεία → ζητάω δηλ. προσεγγιστική τιμή

```
> sqrt(2);  

$$\sqrt{2}$$
  
> sqrt(2.);  
1.414213562
```

- Για την δεκαδική μορφή ενός αποτελέσματος χρησιμοποιούμε την εντολή **evalf(expression)**

```
> 1/17;  

$$\frac{1}{17}$$
  
> evalf(1/17);  
0.05882352941
```

- Για περισσότερη ακρίβεια στη δεκαδική μορφή: **evalf(expression,n);**

όπου n ο αριθμός των επιθυμητών δεκαδικών

- Αν θέλουμε σε όλο το φύλλο εργασίας η δεκαδικά ψηφία: **Digits:=n;**

- Για την αντίστροφη πορεία (από δεκαδικό σε κλάσμα): **convert(%,fraction);**

```
> evalf(1/17,50);  
0.058823529411764705882352941176470588235294117647059  
> Digits:=50;  
>  

$$Digits := 50$$
  
> evalf(1/17);  
0.058823529411764705882352941176470588235294117647059
```


Λίστα Εντολών

- Για την διευκόλυνσή σας δημιουργήστε σε ένα A4 φύλλο μία «Λίστα Εντολών» όπως:

α/α	Εντολή	Χρήση
1	<code>evalf (expr)</code> <code>evalf (expr,n)</code>	Επιστρέφει το αποτέλεσμα σε δεκαδική μορφή Ομοίως αλλά με n δεκαδικά ψηφία
2	<code>Digits:=n</code>	Παρουσιάζει τα αποτελέσματα δεκαδικών με n ψηφία
3	<code>convert (expr, form)</code>	Μετατρέπει εκφράσεις σε άλλη μορφή (π.χ. <code>convert(%,fraction); convert(%,polar);</code>)
4		
5		

- Στο εξής να τη συμπληρώνετε σε κάθε μάθημα με τις νέες εντολές που θα μαθαίνουμε (αν τύχει να την επαναλάβουμε με περισσότερες πληροφορίες, απλά αντιγράψτε τη στην παλαιότερη).
- Ακόμα καλύτερα να την μετατρέψετε και σε ψηφιακή μορφή ώστε στο τέλος να μπορείτε να κατατάσσετε τις εντολές σε αλφαριθμητική σειρά

Απλοποίηση / Ανάπτυξη παραστάσεων

4	simplify (expr)	Απλοποιεί μια αριθμητική παράσταση
---	-----------------	------------------------------------

[Να απλοποιήσετε την έκφραση $e^{(a + \ln(b e^c))}$

5	expand (expr)	Αναπτύσσει μια αριθμητική παράσταση
---	---------------	-------------------------------------

[Να αναπτύξετε την έκφραση $(x + 1)(x + 2)$

Απλοποίηση / Ανάπτυξη παραστάσεων

4	simplify (expr)	Απλοποιεί μια αριθμητική παράσταση
---	-----------------	------------------------------------

```
> exp(a+ln(b*exp(c)));  
e(a+ln(b ec))  
> simplify(%);  
b e(a+c)
```

5	expand (expr)	Αναπτύσσει μια αριθμητική παράσταση
---	---------------	-------------------------------------

```
> (x+1)*(x+2);  
>  
(x+1)(x+2)  
> expand((x+1)*(x+2));  
x2+3x+2
```

Άσκηση:

Δώστε την εντολή για ανάπτυξη των παραστάσεων: $\sin(x+y)$, $(x+1)(y+z)$

Όμοια την εντολή για απλοποίηση στην: $\sin x^2 + \ln(2x) + \cos x^2$

Μιγαδικοί αριθμοί ($a+bi$)

- Ένας μιγαδικός αριθμός δηλώνεται στο Maple με 2 τρόπους:
 - είτε με την μαθηματική μορφή του $a+bi$, π.χ. $3+4*I$
 - είτε με την εντολή `Complex(α,β)`, π.χ. `Complex(3,4)`

6	<code>Complex (α,β)</code>	Δηλώνει τον μιγαδικό αριθμό $a+bi$
7	<code>Re</code> (μιγαδικός)	Επιστρέφει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού (το a)
8	<code>Im</code> (μιγαδικός)	Επιστρέφει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού (το b)
9	<code>conjugate</code> (μιγαδικός)	Επιστρέφει τον συζυγή του μιγαδικού (το $a-bi$)
10	<code>abs</code> (μιγαδικός)	Επιστρέφει την απόλυτη τιμή του μιγαδικού
11	<code>argument</code> (μιγαδικός)	Επιστρέφει το πρώτο όρισμα του μιγαδικού μεταξύ $(-\pi,\pi]$
12	<code>evalc</code> (μιγαδικός)	Κάνει συμβολικές πράξεις με μιγαδικούς και τους φέρνει στην μορφή $a+bi$

Άσκηση: υπολογίστε τις επόμενες εκφράσεις:

- Την απόλυτη τιμή του $1-i$
- Τον συζυγή μιγαδικό του $-45 + 32i$
- Το πρώτο όρισμα του $1-i$
- Υπολογίστε το $1-i$ στην εκθετική του μορφή δηλ. με πολικές τιμές (υπενθύμιση: $z=|z| \cdot e^{i\phi}$, όπου $|z|$ & ϕ οι πολικές συντεταγμένες)



1.03.a.maple

Μεταβλητές

- Μεταβλητή είναι η τιμή που δίνουμε σε μία έκφραση με σκοπό την επανάκλησή της στη συνέχεια
(ισχύει σε όλο το φύλλο εργασίας μέχρι την διαγραφή της ή την αλλαγή της τιμής της)
- Αυτό το όνομα μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύνολο αλφαριθμητικών αρκεί:
 - να μην ξεκινάει από αριθμό ή κάποιον ειδικό χαρακτήρα (π.χ. @, #, \$, κ.λπ.)
 - να μην αφορά δεσμευμένες λέξεις του Maple (π.χ. evalc, int, ... κ.λπ.)
- Η απόδοση τιμής σε μια μεταβλητή γίνεται με 2 τρόπους:

Για τη λίστα των δεσμευμένων λέξεων πληκτρολογήστε [`>reserved;`]

1. με τον τελεστή απόδοσης τιμής `:=`
2. με την εντολή `assign(μεταβλητή, όνομα/τιμή)`

```
[ > a:=2;
  >
  > a+3;
  > assign(b, -3);
  > a+b; ]
```

a = 2
5
-1

13

`assign` (μεταβλητή, τιμή)

Δηλώνει την τιμή σε μια μεταβλητή

Προσοχή: η μεταβλητή $a \neq A$

Διαχείριση των μεταβλητών

- Αποδέσμευση της μεταβλητής από μία τιμή:
 - ή της αποδίδω νέα τιμή
 - ή κάνω χρήση της εντολής `unassign('όνομα')`

```
[ > a:=2;  
[ > assign(b,-3);  
[ > a+b;                                     -1  
[ > unassign('b');  
[ > a+b;                                     2+b  
[ > a:=5;  
[ > a+b;                                     5+b
```

14	<code>unassign('όνομα')</code>	Αποδεσμεύει την μεταβλητή (ή της δίνω νέα τιμή)
----	--------------------------------	-------------------------------------------------

- Έστω ονομάζουμε eq1 την εξίσωση $2x^2=3x+2$

```
[ > eq1:=2*x^2=3*x+2;  
[ >  
[ > rhs(eq1);                                 $3x+2$ 
```

15	<code>rhs</code> (σχέση)	Επιστρέφει το δεξί μέρος μιας σχέσης (εξίσωσης, ανίσωσης κ.λπ.)
16	<code>lhs</code> (σχέση)	Επιστρέφει το αριστερό μέρος μιας σχέσης (εξίσωσης, ανίσωσης κ.λπ.)

Τύποι μεταβλητών

Τύπος	Περιγραφή	Τύπος	Περιγραφή
integer	ακέραιος	boolean	λογικός
fraction	κλάσμα	rational	ρητός (p/q)
float	κινητή υποδιαστολή	set {...}	σύνολο
complex	μιγαδικός	list [...]	λίστα
string	αλφαριθμητικός	seq (...)	ακολουθία
nonreal	μη πραγματικός	indexed	δείκτης

βλ. λίστα τύπων μεταβλητών στο :
Ματζάκος, Ν. (2007), *Εισαγωγή στο Maple*, σελ. 56

```

> eq1 := 2*x^2 = 3*x + 2;
>
> whattype (eq1);
                                eq1 := 2 x2 = 3 x + 2
                                =
> type (eq1, integer);
                                =
                                false
> Describe (eq1);
eq1::`=` = 2*x^2 = 3*x+2
    
```

17	whattype (μεταβλητή)	Επιστρέφει τον τύπο της μεταβλητής
18	type (έκφραση, τύπος)	Ελέγχει αν ο τύπος της μεταβλητής συμφωνεί με αυτόν που λέει η εντολή (Boolean)
19	Describe (μεταβλητή)	Όπως και το whattype αλλά με περισσότερες πληροφορίες

Υποθέσεις (για μεταβλητές)

20	assume (μεταβλητή, υπόθεση)	Αποδίδει στην μεταβλητή μια υπόθεση
21	about (μεταβλητή)	Επιστρέφει την υπόθεση που έχει αποδοθεί στην μεταβλητή

Όταν αποδώσουμε μια υπόθεση σε μια μεταβλητή (π.χ. στην a), αυτή θα εμφανίζεται στο φύλλο εργασίας με μία παύλα (δηλ. $a\sim$)


```
[ > simplify(sqrt(x^2), assume=positive);  
                                     x  
[ > simplify(sqrt(x^2), assume=negative);  
                                     -x
```

```
[ > assume( a > 0 );  
[ >  
[ > Re(a+1);  
                                     a~ + 1  
[ > Im(a+1);  
                                     0  
[ > sqrt(a^2);  
                                     a~  
[ > about(a);  
Originally a, renamed a~:  
is assumed to be: RealRange(Open(0), infinity)
```


Γενικά στις μεταβλητές

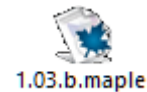
22	anames (παράμετρος)	Επιστρέφει όλες τις μεταβλητές του φύλλου εργασίας (π.χ. anames() ;))
23	unprotect (δεσμευμένη μεταβλητή)	Αφαιρεί από μια δεσμευμένη μεταβλητή την προστασία ονόματος

Με την γνωστή εντολή [**> restart;** όλες οι μεταβλητές θα αποδεσμευτούν

Αντίστοιχα, μετά το άνοιγμα ενός αποθηκευμένου φύλλου εργασίας, οι τιμές που έχουν αποδοθεί στις μεταβλητές έχουν αποδεσμευτεί (χαθεί από την μνήμη).  Χρειάζεται εκτέλεση όλων εκ νέου για να εργαστούμε με τις ίδιες ..

Άσκηση:

1. Αποδώστε στην μεταβλητή p την τιμή x^2+8+x
Στην μεταβλητή q την τιμή x^2-x-7
Βρείτε την $p+q$
2. Αποδώστε στο αποτέλεσμα σας το όνομα Pi
Υπολογίστε την παράσταση: $2 \cdot Pi$



The
End

