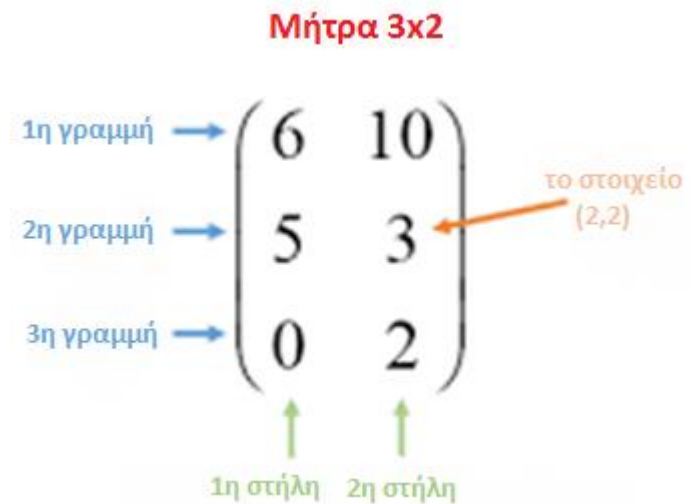


Διανύσματα – Μήτρες α' μέρος

Κεφάλαιο 6



Διανύσματα (Vectors)

- Για χειροκίνητη δημιουργία ενός διανύσματος αναφέρουμε τα στοιχεία του μέσα σε μικρές αγκύλες '< ... >' έτσι ώστε:

- [`> <a, b, c>`; για διάνυσμα στήλη (*column vector*)
- [`> <a|b|c>`; για διάνυσμα γραμμή (*row vector*)

```
[> <a,b,c>;
```

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

```
[> <a|b|c>;
```

$$[a, b, c]$$

52	Vector [row] (n, L)	Επιστρέφει ένα διάνυσμα (όπου n η διάσταση, L η λίστα των στοιχείων)
----	---------------------	--

```
[> Vector[row] (3, 0);
```

$$[0, 0, 0]$$

```
[> Vector (3, 0);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
[> Vector [row] (3, Pi);
```

$$[\pi(1), \pi(2), \pi(3)]$$

```
[> Vector [row] (3, 5);
```

$$[5, 5, 5]$$

```
[> Vector [row] (3, fill=Pi);
```

$$[\pi, \pi, \pi]$$

```
[> Vector (3, fill=1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
[> Vector (3, [1, a, s]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ s \end{bmatrix}$$

Αν δεν δηλώσω στο Vector λίστα στοιχείων θα μου επιστρέψει διάνυσμα με μηδενικά στοιχεία

Bug: Αν δεν δηλώσω τη συνάρτηση fill, ενδέχεται να μου επιστρέψει την $\pi(i)$, δηλ. μία συνάρτηση $\pi(i)$, αντί του π

Μήτρες (Matrix)

- Για χειροκίνητη δημιουργία μίας μήτρας αναφέρουμε τα στοιχεία του μέσα σε μικρές αγκύλες '< ... >' έτσι ώστε:
 - [`> <a, b, c; d, e, f; g, h, i>`]; για να δηλώσω την μήτρα ανά γραμμή
 - [`> <a, b | c, d | e, f>`]; για να δηλώσω την μήτρα ανά στήλη

```
> <a,b,c; d,e,f; g,h,i>; 3
      [ a  b  c ]
      [ d  e  f ]
      [ g  h  i ]
> <a,b | c,d | e,f>;
      [ a  c  e ]
      [ b  d  f ]
```

53	Matrix (n, m, L)	Επιστρέφει μία μήτρα n x m (όπου n, m οι διαστάσεις, L η λίστα των στοιχείων) (Αν δοθεί μία διάσταση n, η μήτρα θεωρείται τετραγωνική n x n)
----	------------------	---

```
> Matrix(2, [1, 3, -2, 4]);
      [ 1  3 ]
      [-2  4 ]
> Matrix(2);
      [ 0  0 ]
      [ 0  0 ]
> Matrix(2, 3, 1);
      [ 1  1  1 ]
      [ 1  1  1 ]
```

```
> Matrix(2, shape=identity);
      [ 1  0 ]
      [ 0  1 ]
> Matrix(2, 3*x+2, shape=triangular);
      [ 3 x(1, 1)+2  3 x(1, 2)+2 ]
      [ 0           3 x(2, 2)+2 ]
```

```
> Matrix(4, {(1, 2)=5, (1, 3)=6, (1, 4)=7}, fill=1, shape=symmetric);
      [ 1  5  6  7 ]
      [ 5  1  1  1 ]
      [ 6  1  1  1 ]
      [ 7  1  1  1 ]
> Matrix(2, 3, symbol=m);
      [ m1,1  m1,2  m1,3 ]
      [ m2,1  m2,2  m2,3 ]
```

Επιπλέον shapes (σχήματα)
triangular[lower]: κάτω τριγωνική
antisymmetric: αντισυμμετρική
diagonal: διαγώνια

Αναφορά στα στοιχεία

- Έστω [`> V:=Vector(3);`] (δηλ. ένα διάνυσμα στήλη με 3 στοιχεία μηδενικά)

- για να φωνάξω π.χ. το 2^ο στοιχείο: [`> V[2];`]
- για να ορίσω νέα τιμή στο 2^ο στοιχείο, π.χ. : [`> V[2]:=5;`]

```
> V:=Vector(3);  
V:=  
[ 0  
 0  
 0]  
> V[2];  
0  
> V[2]:=5;  
V2:=5  
> V;  
[ 0  
 5  
 0]
```

- Όμοια εργαζομαι και στις μήτρες, π.χ. αν

[`> M:=Matrix(2,3,fill=Pi);`]

- για να φωνάξω π.χ. το 2^ο στοιχείο της 1^{ης} γραμμής:
[`> M[1,2];`]
- για να ορίσω νέα τιμή στο 2^ο στοιχείο της 1^{ης} γραμμής,
π.χ. : [`> M[1,2]:=-5;`]

```
> M:=Matrix(2,3,fill=Pi);  
M:=  
[ π π π  
 π π π]  
> M[1,2];  
π  
> M[1,2]:=-5;  
M  
> M;  
[ π -5 π  
 π π π]
```

Πράξεις

Πράξη	Περιγραφή
$A + B$	Προσθέτει 2 διανύσματα ή μήτρες
$A \cdot B$	Πολλαπλασιάζει διανύσματα ή μήτρες
$\lambda * A$ ή $A * \lambda$	Βαθμωτό γινόμενο διανύσματος ή μήτρας
$A ^ n$	Δύναμη μήτρας

Προσοχή το επί
εδώ με τελεία '.'

1. Να δημιουργήσετε τους πίνακες: $A := \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix}$
2. Να βρείτε τον $A*B$
3. Να βρείτε και τους πίνακες:
 - a) B^2
 - b) $(A*B)^{-1}$
 - c) $\kappa*(A*B)$, κ φυσικός αριθμός



02.01.maple

Πράξεις

Πράξη	Περιγραφή
A + B	Προσθέτει 2 διανύσματα ή μήτρες
A . B	Πολλαπλασιάζει διανύσματα ή μήτρες
$\lambda * A$ ή $A * \lambda$	Βαθμωτό γινόμενο διανύσματος ή μήτρας
$A ^ n$	Δύναμη μήτρας

Προσοχή το επί
εδώ με τελεία '.'

```
> A:=Matrix(2, [[a1,a2],[a3,a4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix}$$

```
> B:=Matrix(2, [[b1,b2],[b3,b4]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix}$$

```
> A.B;
```

$$\begin{bmatrix} a1 b1 + a2 b3 & a1 b2 + a2 b4 \\ a3 b1 + a4 b3 & a3 b2 + a4 b4 \end{bmatrix}$$

```
> B^2;
```

$$\begin{bmatrix} b1^2 + b2 b3 & b1 b2 + b2 b4 \\ b3 b1 + b4 b3 & b2 b3 + b4^2 \end{bmatrix}$$

```
> (A.B)^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{a3 b2 + a4 b4}{a1 b1 a4 b4 + a2 b3 a3 b2 - a1 b2 a4 b3 - a2 b4 a3 b1} & -\frac{a1 b2 + a2 b4}{a1 b1 a4 b4 + a2 b3 a3 b2 - a1 b2 a4 b3 - a2 b4 a3 b1} \\ -\frac{a3 b1 + a4 b3}{a1 b1 a4 b4 + a2 b3 a3 b2 - a1 b2 a4 b3 - a2 b4 a3 b1} & \frac{a1 b1 + a2 b3}{a1 b1 a4 b4 + a2 b3 a3 b2 - a1 b2 a4 b3 - a2 b4 a3 b1} \end{bmatrix}$$

```
> k*(A.B);
```

$$\begin{bmatrix} k(a1 b1 + a2 b3) & k(a1 b2 + a2 b4) \\ k(a3 b1 + a4 b3) & k(a3 b2 + a4 b4) \end{bmatrix}$$

Πακέτο εντολών: **LinearAlgebra**

- Επιπλέον πράξεις και εντολές στο Maple ενεργοποιούνται μέσα από την ‘φόρτωση’ πακέτων (εντολών)
- Για να γίνει η ενεργοποίηση ενός πακέτου, το καλούμε με την εντολή ‘**with**’ ή το απενεργοποιούμε με την ‘**unwith**’
- Για τη χρήση των εντολών στα διανύσματα και στις μήτρες, είναι απαραίτητη η ενεργοποίηση του πακέτου ‘LinearAlgebra’, ήτοι:

```
– [> with (LinearAlgebra);
```

- Η ενεργοποίηση γίνεται μία φορά για κάθε φύλλο εργασίας. Θεωρούμε εις το εξής ότι το πακέτο είναι θα το έχετε ενεργοποιημένο από την έναρξη του μαθήματος...

Επιπλέον εντολές

54	Add (A, B)	Προσθέτει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
55	Multiply (A, B)	Πολλαπλασιάζει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
56	ZeroMatrix (n, m)	Δημιουργεί μηδενική μήτρα n x m
57	IdentityMatrix (n)	Δημιουργεί ταυτοτική μήτρα n x n
58	RandomMatrix (n, m)	Δημιουργεί μήτρα n x m τυχαίων στοιχείων
59	RandomVector (n)	Δημιουργεί διάνυσμα n τυχαίων στοιχείων
60	Determinant (Μήτρα)	Επιστρέφει την ορίζουσα της μήτρας
61	Adjoint (Μήτρα)	Επιστρέφει την προσαρτημένη μήτρα
62	Minor (Μήτρα, i, j)	Επιστρέφει την ελάσσονα ορίζουσα ως προς την γραμμή i και την στήλη j
63	Rank (Μήτρα)	Υπολογίζει την τάξη (τον βαθμό) μιας μήτρας μετά την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss
64	MatrixInverse (Μήτρα)	Υπολογίζει την αντίστροφη μήτρα
65	SingularValues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μιας μήτρας
66	Trace (Μήτρα)	Επιστρέφει το ίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας
67	Transpose (Μήτρα)	Επιστρέφει την ανάστροφη μήτρα (<i>ισχύει και για διάνυσμα</i>)

Ασκήσεις

1. Να ορίσετε δύο διανύσματα v & u : $v = (1, 2, 3)$ & $u = (4, 5, 6)$ ως στήλες.

- Πόσο είναι το $v + u$;
- Το βαθμωτό γινόμενο $3 * v$;
- Πόσο το $\% - u$ (δηλ. ditto- u);



2. Να ορίσετε τις μήτρες A (2×2) & B (2×2) έ. ώ.:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a2 \\ a3 & a4 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix}$$

- $A+B=$;
- $A*B=$;
- $\kappa*A=$;
- $\kappa*A+\lambda*B=$;

- Αν τώρα C (2×3) τ.ώ.: $C := \begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 \\ c4 & c5 & c6 \end{bmatrix}$

- Υπολογίστε το $A+C=$; Τι παρατηρείτε;
- Ομοίως το $C*A=$;
- $A*C=$; Τι παρατηρείτε;
- $A^2=$;
- $A^{-1}=$;



Ασκήσεις

- Να ορίσετε μία μήτρα (3x3) τ.ώ.: $C = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

- Πόσο είναι το ίχνος της C;



02.04.maple

- Βρείτε τις ελάχιστονες ορίζουσες της C



- Ομοίως να βρείτε την ορίζουσα $|C|$

Άσκηση βιβλίου σελ. 123

	Matrix (n, m, L)	Επιστρέφει μία μήτρα n x m (όπου n, m οι διαστάσεις, L η λίστα των στοιχείων) (Αν δοθεί μία διάσταση n, η μήτρα θεωρείται τετραγωνική n x n)
	Add (A, B)	Προσθέτει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
	Multiply (A, B)	Πολλαπλασιάζει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
	ZeroMatrix (n, m)	Δημιουργεί μηδενική μήτρα n x m
	IdentityMatrix (n)	Δημιουργεί ταυτοτική μήτρα n x n
	RandomMatrix (n, m)	Δημιουργεί μήτρα n x m τυχαίων στοιχείων
	RandomVector (n)	Δημιουργεί διάνυσμα n τυχαίων στοιχείων
	Determinant (Μήτρα)	Επιστρέφει την ορίζουσα της μήτρας
	Adjoint (Μήτρα)	Επιστρέφει την προσαρτημένη μήτρα
	Minor (Μήτρα, i, j)	Επιστρέφει την ελάσσονα ορίζουσα ως προς την γραμμή i και την στήλη j
	Rank (Μήτρα)	Υπολογίζει την τάξη (τον βαθμό) μιας μήτρας μετά την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss
	MatrixInverse (Μήτρα)	Υπολογίζει την αντίστροφη μήτρα
	SingularValues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μιας μήτρας
	Trace (Μήτρα)	Επιστρέφει το ίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας
	Transpose (Μήτρα)	Επιστρέφει την ανάστροφη μήτρα (ισχύει και για διάνυσμα)

The
End

