Εργαστήριο Μαθηματικών
Γενικό Τμήμα Γενικών Μαθημάτων
Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.

3ο Εργαστηριο

Ιδιοτιμές- Ιδιοδιανύσματα

Ειδικές μήτρες, εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Ν. Ματζάκος
Επ. Καθηγητής Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.
nikmatz@aspete.gr

1η Άσκηση

Δίνετε η μήτρα $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν :
a.το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A
b.οι ιδιοτιμές της A
c.τα ιδιοδιανύσματα της A.
d.μια διαγωνοποίηση της A.

```
> restart;
```

Φορτώνουμε το πακέτο εντολών LinearAlgebra

```
> with(LinearAlgebra):
```

Ορίζουμε την μήτρα A

```
> A:=<<1,1,-1>|<2,2,1>|<2,-1,4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

```
> p:=CharacteristicPolynomial(A,x);
```

$$p := -9 + x^3 - 7x^2 + 15x \quad (1.2)$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές, λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση

```
> solve(p=0,x);
```

$$1, 3, 3 \quad (1.3)$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές με χρήση της εντολής Eigenvalues

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Υπολογίζουμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

```
> l,P:=Eigenvectors(A);
```

$$l, P := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.5)}$$

Η διαγώνια μήτρα είναι:

```
> Diag:=Matrix(1..3,1..3,l,shape = diagonal);
```

$$Diag := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.6)}$$

Πράγματι:

```
> P.Diag.MatrixInverse(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.7)}$$

Η διαγώνια με χρήση της εντολής JordanForm

```
> JordanForm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.8)}$$

2η Άσκηση

Δίνετε η μήτρα $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Να βρεθούν :
a.το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A
b.οι ιδιοτιμές της A
c.τα ιδιοδιανύσματα της A.
d.μια διαγωνοποίηση της A.

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> B:=<<1,-1,-1>|<1,3,2>|<-1,-1,0>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1)}$$

```
> p:=CharacteristicPolynomial(B,x);
```

$$p := -2 + x^3 - 4\,x^2 + 5\,x \qquad (2.2)$$

```
> solve(p=0,x);
```

$$2, 1, 1 \qquad (2.3)$$

```
> Eigenvalues(B);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

```
> l,P:=Eigenvectors(B);
```

$$l, P := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Η μήτρα B δεν έχει 3 γραμμικός ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, άρα δεν μπορώ να σχηματίσω την P

```
> Diag:=Matrix(1..3,1..3,l,shape = diagonal);
```

$$Diag := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

```
> P.Diag.MatrixInverse(P);
Error, (in LinearAlgebra:-MatrixInverse) singular matrix
```

```
> MatrixInverse(P);
Error, (in LinearAlgebra:-MatrixInverse) singular matrix
```

Η Jordan μορφή της B είναι

```
> JordanForm(B);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$