

Εργαστήριο Μαθηματικών Γενικό Τμήμα Γενικών Μαθημάτων Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.

5ο Εργαστήριο Λογισμός συναρτήσεων μιας μεταβλητής

N. Ματζάκος
Επ. Καθηγητής Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.
nikmatz@aspete.gr

Άσκηση 1η

Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = |x^2 - 4|$: $h(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1 \\ x^2, & x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1}, & 1 < x \end{cases}$: και στη

συνέχεια να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις τους

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό ":=>"

```
f := x -> x^3;
```

$$x \rightarrow x^3 \quad (1.1.1)$$

Η τιμή της συνάρτησης στο $x=2$ είναι:

```
f(2);
```

$$8 \quad (1.1.2)$$

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε μια συνάρτηση είναι η εντολή unapply

```
g := unapply(abs(x^2-4), x);
```

$$x \rightarrow |x^2 - 4| \quad (1.1.3)$$

Η τιμή της g στο $x=3$ είναι:

```
g(3);
```

$$5 \quad (1.1.5)$$

Για να ορίσουμε μια πολύκλαδη συνάρτηση χρησιμοποιούμε την εντολή piecewise

```
h := x -> piecewise(x <= -1, -x, x <= 1, x^2, x > 1, sin(x-1)/(x-1));
```

$$x \rightarrow \text{piecewise}\left(x \leq -1, -x, x \leq 1, x^2, 1 < x, \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right) \quad (1.1.6)$$

```
h(1);
```

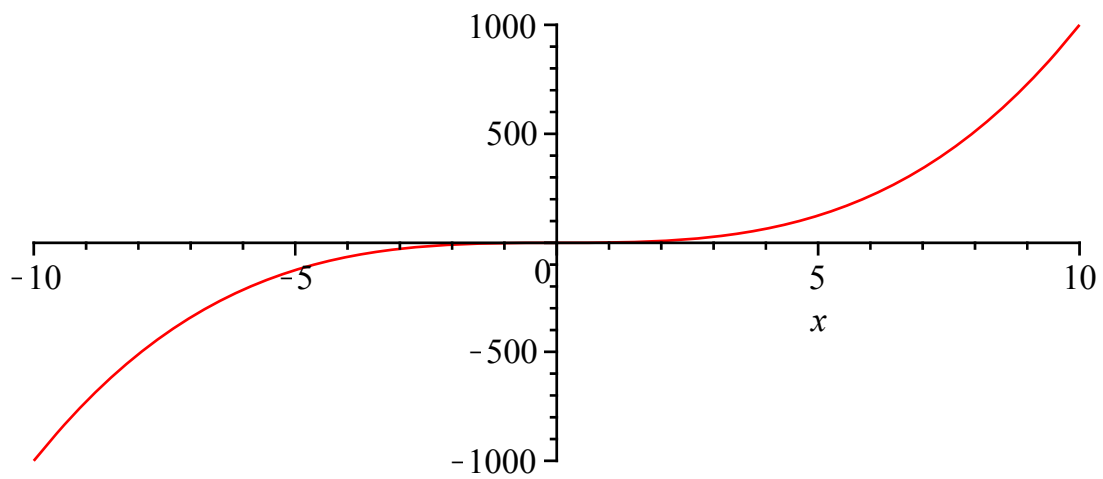
$$1 \quad (1.1.7)$$

```
h(2);
```

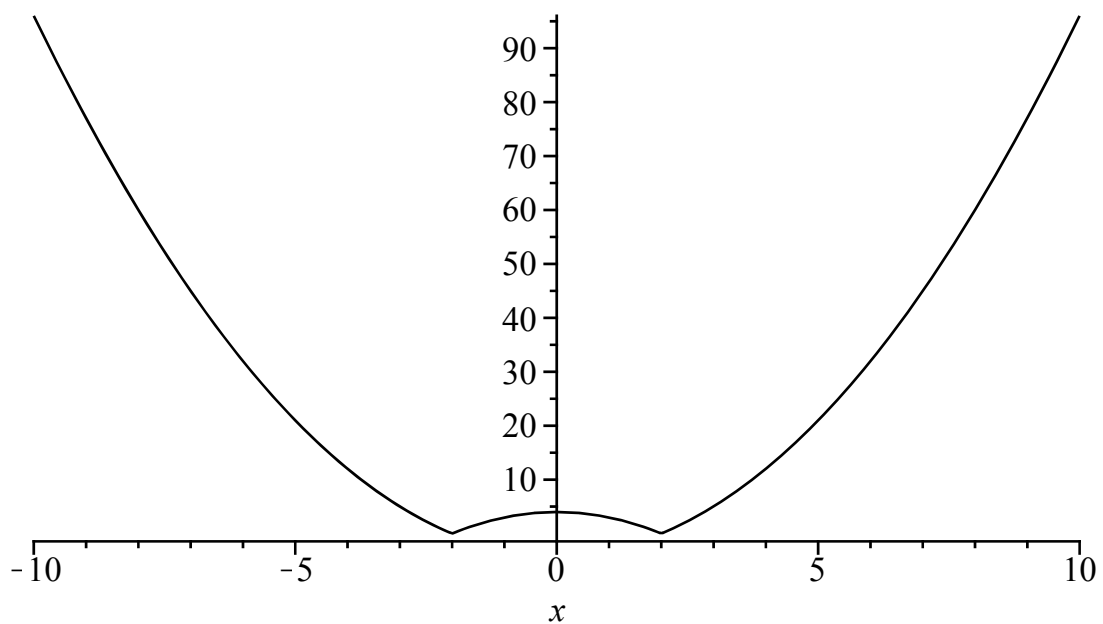
$$\sin(1) \quad (1.1.8)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δημιουργούνται με την εντολή plot

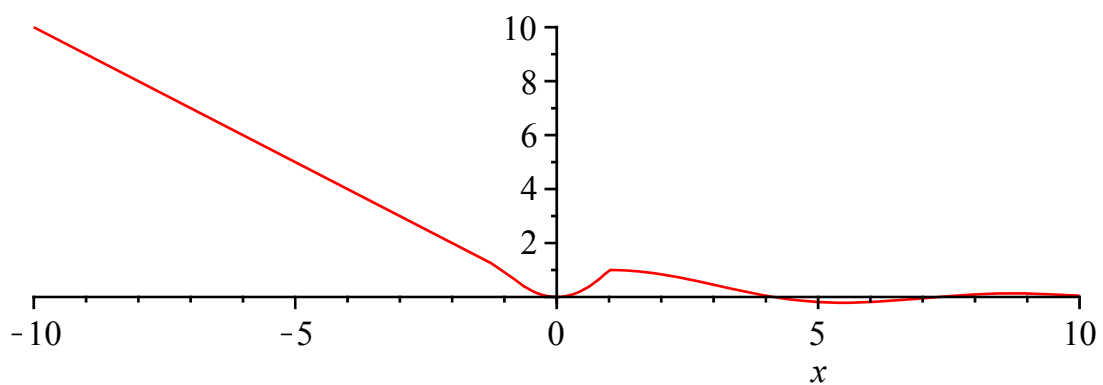
```
plot(f(x), x);
```



```
plot(g(x),x,color=black);
```

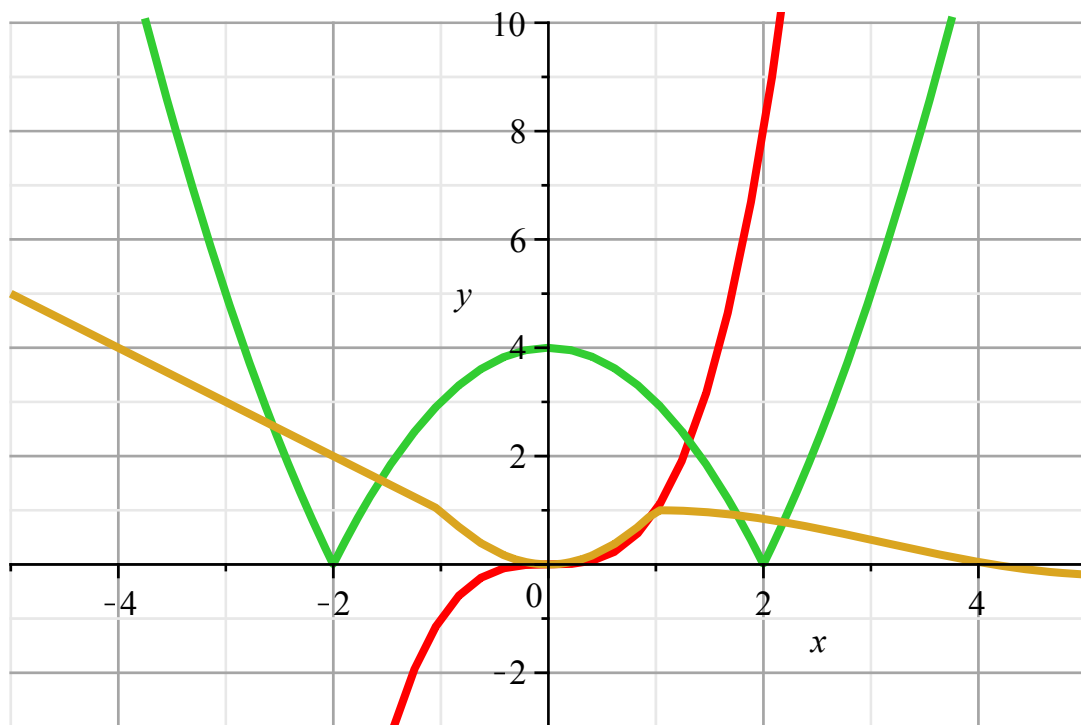


```
plot(h(x),x);
```



Η γραφικές παραστάσεις και των τριών συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων με το x από -5 έως 5 και το y από -3 έως 10 εμφανίζοντας και το πλεγμά

```
plot({f(x),g(x),h(x)},x=-5..5,y=-3..10,thickness=3,gridlines=true);
```



Άσκηση 2η

Να υπολογισθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$: (εάν υπάρχουν)

Λύση:

limit(cos(x), x=Pi);

-1

(2.1.1)

Χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα της εντολής κεφαλαίο μπορούμε να παρουσιάσουμε τον μαθηματικό συμβολισμό του οριου, έτσι:

Limit(cos(x), x=Pi)=limit(cos(x), x=Pi);

$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) = -1$

(2.1.2)

Ορίζουμε την συνάρτηση f

f:=x->abs(x)/x;

$x \rightarrow \frac{|x|}{x}$

(2.1.3)

limit(f(x), x=0);

undefined

(2.1.4)

Το από αριστερά πλευρικό όριο είναι :

limit(f(x), x=0, left);

-1

(2.1.5)

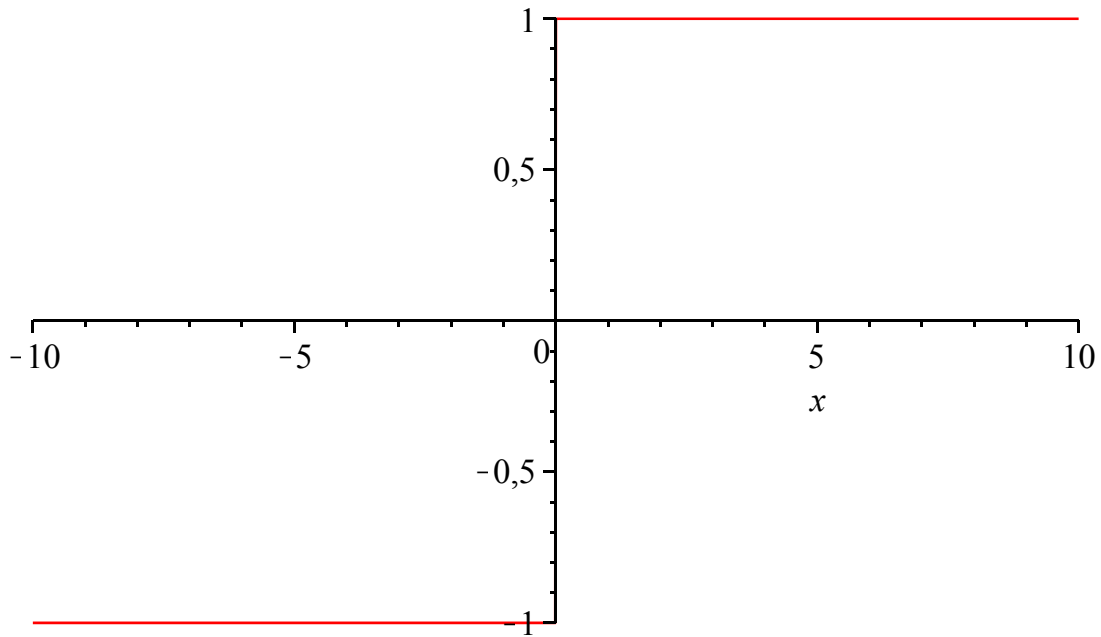
Το από δεξιο πλευρικό όριο είναι:

limit(f(x), x=0, right);

1

(2.1.6)

```
plot(f(x),x);
```



Άσκηση 3η

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = e^{2 \cdot x}$: Να βρεθούν η πρώτη και δευτερης τάξης παράγωγος

Λύση

```
restart;
```

Ορίζουμε την συνάρτηση f

```
f:=x->exp(2*x);
```

$$x \rightarrow e^{2x} \quad (3.1.1)$$

Η πρώτη παράγωγος της f

```
diff(f(x),x);
```

$$2 e^{2x} \quad (3.1.2)$$

Η δευτερη παράγωγος της f

```
diff(f(x),x$2);
```

$$4 e^{2x} \quad (3.1.3)$$

```
Diff(f(x),x$2)=diff(f(x),x$2);
```

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{2x} = 4 e^{2x} \quad (3.1.4)$$

Άσκηση 4η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Να ορισθεί η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

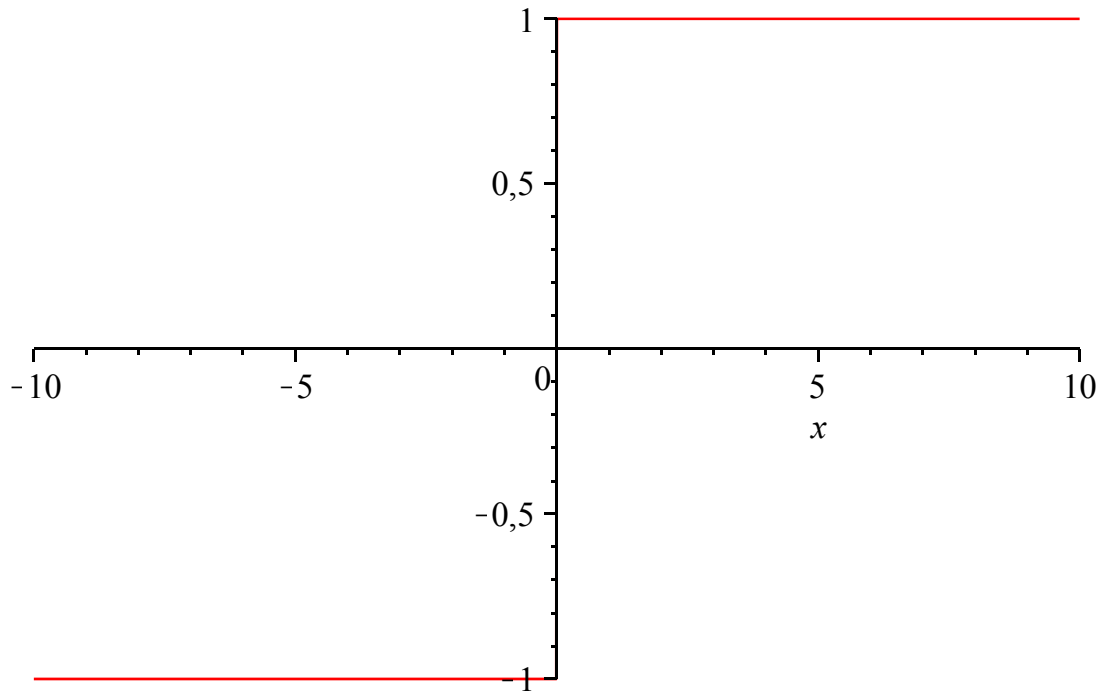
```
restart;  
f:=x->abs(x);
```

$$x \rightarrow |x| \quad (4.1.1)$$

```
df:=D(f);
```

$$x \rightarrow \text{abs}(1, x) \quad (4.1.2)$$

```
plot(df(x),x);
```



Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

```
df(0);
```

Error, (in simpl/abs) abs is not differentiable at 0