

Εξισώσεις & Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Ασκήσεις



Άσκηση 1

Να βρεθούν τα κοινά σημεία του κύκλου $x^2+y^2=1$ και της ευθείας $x+2y=1$.

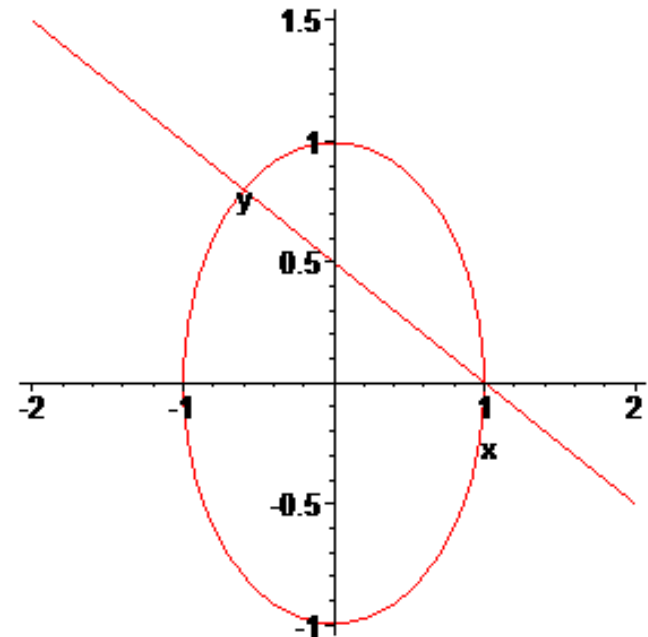
Να παρασταθούν επίσης σε ένα σύστημα αξόνων

Υπενθύμιση

	<code>solve (expr, μεταβλητή)</code>	Υπολογίζει τις λύσεις της μεταβλητής στην δοσμένη έκφραση
--	--------------------------------------	---

Λύση άσκησης 1

```
> eq1:=x^2+y^2=1;
                                eq1:=x^2+y^2=1
> eq2:=x+2*y=1;
                                eq2:=x+2*y=1
[ Θα βρω τα κοινά σημεία (σημεία τομής) λύνοντας τις 2 αυτές εξισώσεις
> sol:=solve({eq1,eq2},{x,y});
                                sol:={x=1,y=0},{x=-3/5,y=4/5}
[ Για το γράφημα και των δύο:
> with(plots):
> implicitplot({eq1,eq2},x=-2..2,y=-2..2);
```



Προσοχή: γράφημα
με **x & y** από .. έως
(**implicitplot**)

Η **implicitplot** εντολή μας δίνει το γράφημα μιας καμπύλης **2 μεταβλητών x και y** στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε
και να
υπολογίσετε
το εμβαδόν
του χωρίου
μεταξύ των
 $f(x)=2-x^2$ και
 $g(x)=-x$

Υπενθύμιση

	<code>solve (expr, μεταβλητή)</code>	Υπολογίζει τις λύσεις της μεταβλητής στην δοσμένη έκφραση
	<code>int (f(x), x=a..b)</code>	Υπολογίζει το ολοκλήρωμα της $f(x)$ για $x=a$ έως $x=b$

Λύση άσκησης 2

```
> f:=x->2-x^2;
```

$$f:=x \rightarrow 2-x^2$$

```
> g:=x->-x;
```

$$g:=x \rightarrow -x$$

Εξισώνω $f=g$ για να βρω τα κοινά τους σημεία (x,y)

```
> sol:=solve(f(x)=g(x),x);
```

$$sol := -1, 2$$

Για να βρω και τα y απλά λύνω μία από τις δύο με τα x αυτά

```
> y1:=f(sol[1]);
```

$$y1 := 1$$

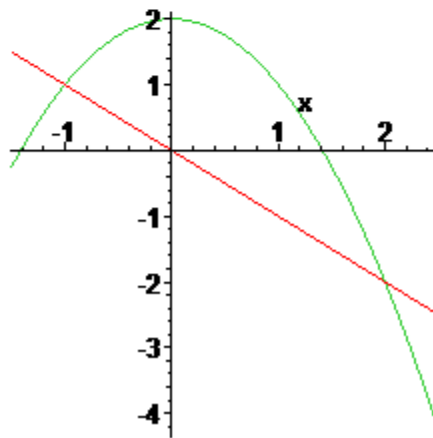
```
> y2:=f(sol[2]);
```

$$y2 := -2$$

Άρα τα κοινά σημεία τους είναι $(-1,1)$ και $(2,-2)$

Για το γράφημα:

```
> plot({f(x),g(x)},x=-1.5..2.5);
```



Προσοχή: γράφημα
με x μόνο από .. Έως
(plot)

Το εμβαδόν μεταξύ των 2 χωρίων δίνεται από το ολοκλήρωμα από
το σημείο $sol[1]$ στο σημείο $sol[2]$

```
> int(f(x)-g(x),x=sol[1]..sol[2]);
```

$$\frac{9}{2}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Να εξετάσετε αν έχει τοπικό ακρότατο στο διάστημα $[0,3]$

(δημιουργείστε και το γράφημά της ώστε να έχετε και οπτική απόδοση της απάντησής σας (για x από 0 έως 25 & y από -1 έως 0,5))

Υπενθύμιση

	<code>solve (expr, μεταβλητή)</code>	Υπολογίζει τις λύσεις της μεταβλητής στην δοσμένη έκφραση
	<code>subs (x=a, expr)</code>	Αντικαταστέί σε μια έκφραση το x με a ($x=a, y=b$ κ.ο.κ. για πολλές αντικαταστάσεις)
	<code>diff (f(x), x\$n)</code>	Υπολογίζει την παράγωγο της $f(x)$ στον n -οστό βαθμό

Λύση άσκησης 3

Αρχικά ορίζω την συνάρτηση $f(x)$

> $f := x \rightarrow \ln(x) / x;$

$$f := x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x}$$

Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο x μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο αν:

1) $\frac{d}{dx} f(x) = 0$

2) ή αν δεν ορίζεται το $\frac{d}{dx} f(x)$

3) ή αν είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f Π.Ο. = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Η 1η παράγωγος της f είναι:

> $\text{Diff}(f(x), x) = \text{diff}(f(x), x);$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Βρίσκω τα σημεία που η 1η παράγωγος μηδενίζεται

> $x1 := \text{solve}(\text{diff}(f(x), x) = 0, x);$

$$x1 = e$$

Ψάχνω την 2η παράγωγο για να δω αν το $x=e$ είναι τοπικό ακρότατο

> $\text{Diff}(f(x), x\$2) = \text{diff}(f(x), x\$2);$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = -\frac{3}{x^3} + \frac{2 \ln(x)}{x^3}$$

Αντικαθιστών στην 2η παράγωγο την τιμή $x1=e$

> $\text{subs}(x = \text{exp}(1), \text{diff}(f(x), x\$2));$

$$-\frac{3}{(e)^3} + \frac{2 \ln(e)}{(e)^3}$$

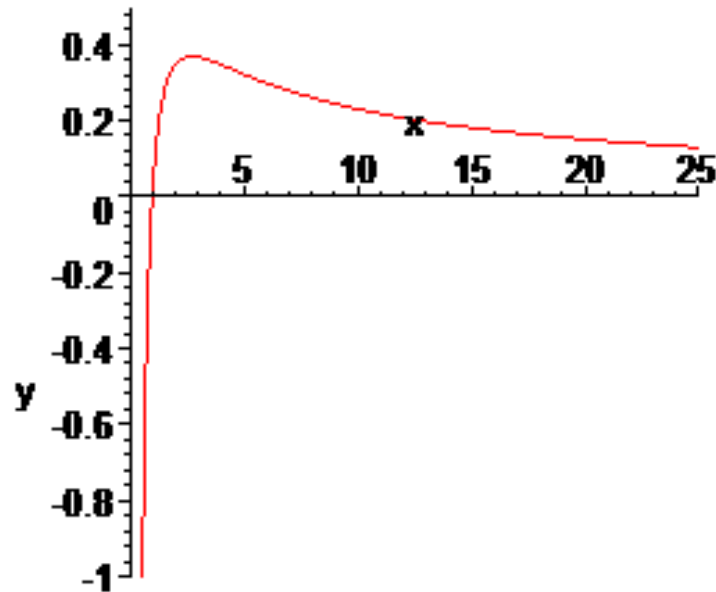
Δεν υπάρχουν σημεία άκρων στο Π.Ο.
& αν θέλω να ψάξω άλλο πιθανό σημείο
για ακρότατο, αυτό είναι το σημείο 0
όπου η 1^η παράγωγος δεν ορίζεται

Λύση άσκησης 3

Το τελευταίο είναι αρνητικό $\frac{-3 + 2(1)}{e^3} < 0$

Άρα στο $x=e$ έχουμε τοπικό μέγιστο (αφού $f'(e) = 0$ & $f''(e) < 0$
για κάθε x στην γειτονιά του e

```
> plot(f(x), x=0..25, y=-1..0.5);
```



Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$

Να βρεθούν:

α) Τα τοπικά ακρότατα

β) Να δοθεί η γραφική της παράσταση

Υπενθύμιση

	solve (expr, μεταβλητή)	Υπολογίζει τις λύσεις της μεταβλητής στην δοσμένη έκφραση
	subs (x=a, expr)	Αντικαταστέι σε μια έκφραση το x με a (x=a, y=b κ.ο.κ. για πολλές αντικαταστάσεις)
	diff (f(x), x\$n)	Υπολογίζει την παράγωγο της f(x) στον n-οστό βαθμό

Λύση άσκησης 4

Αρχικά ορίζω την συνάρτηση $f(x)$

```
> f:=x->(x^4/9)-(4*x^3/9);
```

$$f:=x \rightarrow \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το \mathbb{R}

Η 1η παράγωγος της f είναι:

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3 \right) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2$$

Βρίσκω τα σημεία που η 1η παράγωγος μηδενίζεται

```
> sol:=solve(diff(f(x),x)=0,x);
```

$$sol := 0, 0, 3$$

```
>
```

Ψάχνω την 2η παράγωγο για να δω αν κάποιο x είναι τοπικό ακρότατο

```
> Diff(f(x),x$2)=diff(f(x),x$2);
```

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3 \right) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$$

Αντικαθιστών στην 2η παράγωγο την τιμή $sol[1]=sol[2]=0$

```
> subs(x=sol[1],diff(f(x),x$2));
```

$$0$$

Δεν υπάρχουν σημεία άκρων στο Π.Ο.
& δεν υπάρχουν σημεία όπου η 1^η
παράγωγος να μην ορίζεται

Λύση άσκησης 4

Από το τελευταίο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν για $x=0$ έχουμε κάποιο ακρότατο

Θα ελέγξουμε για $x=\text{sol}[3]=3$

```
> subs(x=sol[3], diff(f(x), x$2)) ;
```

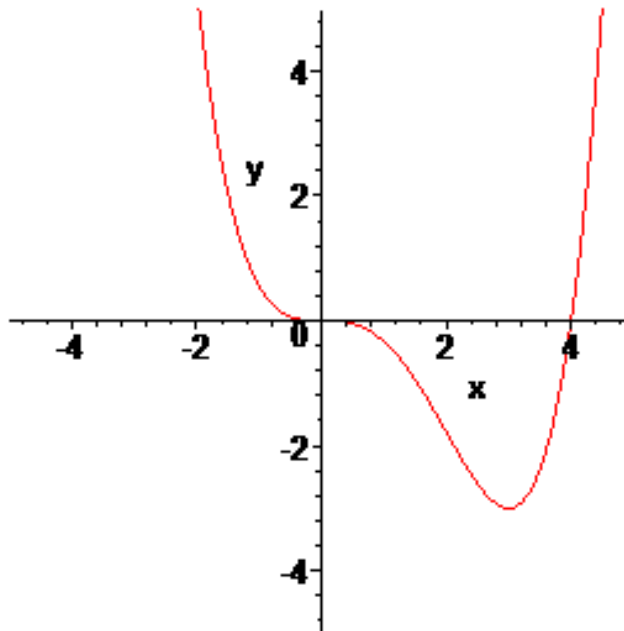
4

Το τελευταίο είναι θετικό

Άρα στο $(3, f(3))$ έχουμε τοπικό ελάχιστο (αφού $f'(3) = 0$ & $f''(3) > 0$)

για κάθε x στην γειτονιά του 3

```
> plot(f(x), x=-5..5, y=-5..5);
```



The
End

