

Εργαστήριο Μαθηματικών Γενικό Τμήμα Γενικών Μαθημάτων Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.

Εργαστήριο Λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

N. Ματζάκος
Επ. Καθηγητής Α.Σ.Παι.ΤΕ.
nikmatz@aspete.gr

Άσκηση 1η

Να γίνει η γραφική παράσταση και να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης για $x \in [-2,2]$, $y \in [-2,2]$

Λύση

```
> restart;
```

Ορίζουμε την συνάρτηση f

```
> f:=(x,y)->sin(x)*cos(4*y);
```

$$f := (x, y) \rightarrow \sin(x) \cos(4y)$$

(1.1.1)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τιμές της συνάρτησης γράφουμε

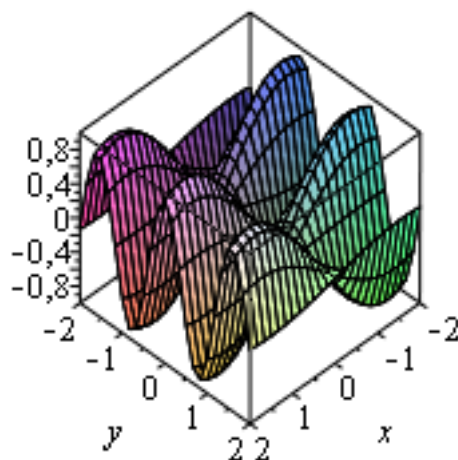
```
> f(2,1);
```

$$\sin(2) \cos(4)$$

(1.1.2)

Με χρήση της εντολής plot3d μπορούμε να έχουμε την γραφική παράσταση της f

```
> plot3d(f(x,y), x=-2..2, y=-2..2, axes=boxed);
```



Άσκηση 2η

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1ης και δευτέρας τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = e^x \cos y + xy^2$:

Λύση

```
> restart;
```

Ορίζουμε την συνάρτηση f

```
> f := (x, y) -> exp(x) * cos(y) + x * y^2;
```

$$f := (x, y) \rightarrow e^x \cos(y) + xy^2 \quad (2.1.1)$$

Η μερική παράγωγος της f ως προς x

```
> diff(f(x, y), x);
```

$$e^x \cos(y) + y^2 \quad (2.1.2)$$

χρησιμοποιώντας το Diff μπορούμε να εμφανίσουμε και την μαθηματική έκφραση της μερικής παραγώγου

```
> Diff(f(x, y), x) = diff(f(x, y), x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos(y) + xy^2) = e^x \cos(y) + y^2 \quad (2.1.3)$$

Η μερική παράγωγος της f ως προς y

```
> diff(f(x, y), y);
```

$$-e^x \sin(y) + 2xy \quad (2.1.4)$$

Η δευτερη μερική παράγωγος της f ως προς x

```
> diff(f(x, y), x$2);
```

$$e^x \cos(y) \quad (2.1.5)$$

Η δευτερη μερική παράγωγος της f ως προς y

```
> diff(f(x, y), y$2);
```

$$-e^x \cos(y) + 2x \quad (2.1.6)$$

Οι μεικτές δευτέρας τάξης

```
> diff(f(x, y), x, y);
```

$$-e^x \sin(y) + 2y \quad (2.1.7)$$

```
> diff(f(x, y), y, x);
```

$$-e^x \sin(y) + 2y \quad (2.1.8)$$

```
>
```

Άσκηση 3η

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$: ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

(Δίνεται ότι η τρισδιάστατη εξίσωση του Laplace είναι: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$)

Λύση

```
> restart;
```

```
Ορίζουμε την συνάρτηση f
```

```
> f:=(x,y,z)->x^2+y^2-2*z^2;
```

$$f := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 - 2z^2$$

(3.1.1)

```
πράγματι η συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace
```

```
> diff(f(x,y,z),x$2)+diff(f(x,y,z),y$2)+diff(f(x,y,z),z$2);
```

0

(3.1.2)

Άσκηση 4η

Να βρεθεί η κλίση της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$: στο σημείο (2,1).

Λύση

```
> restart;
```

```
Ορίζουμε τη συνάρτηση f
```

```
> f:=(x,y)->x^2+y^2;
```

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

(4.1.1)

```
Δημιουργούμε το διάνυσμα της κλίση στο σημείο (2,1) με χρήση του ορισμού της
```

```
> k:=<diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y)>;
```

$$k := \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

(4.1.2)

```
Η κλίση στο σημείο (2,1) είναι:
```

```
> subs({x=2,y=1},k);
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(4.1.3)