



ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 6

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f , g , h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το A στο B , το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$





συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση f με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

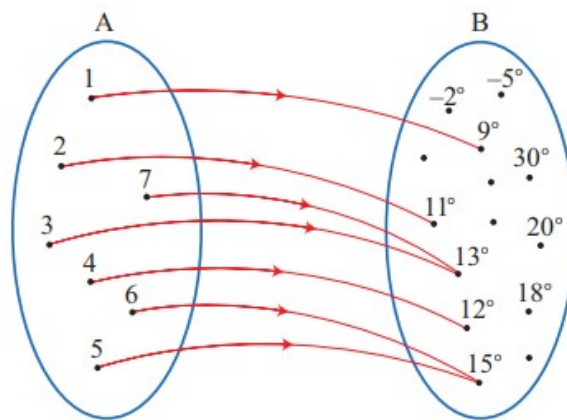
$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Έστω f η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

$$f(A) = \{9^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 15^\circ\} \subseteq B$$

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$.

- Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B .
- Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18°).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

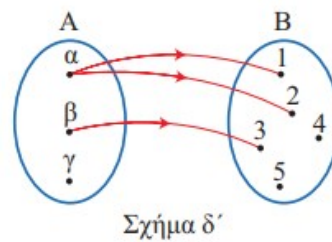
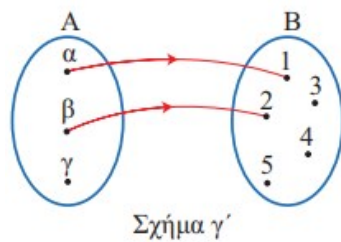
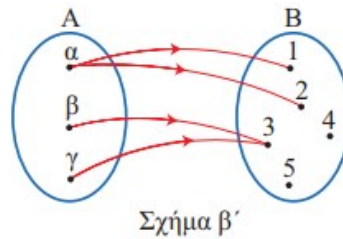
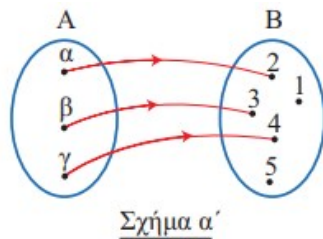
Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

- ✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B .





σεπτάρων είναι το $\alpha \in A$ αντιστοιχείται σε δύο στοιχεία του B .



Συνομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f , πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της A
- Το σύνολο B και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f: A \rightarrow B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - 4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του \mathbb{R} στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1 - 4x \geq 0$, ενώ το σύνολο B είναι όλο το \mathbb{R} .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1 , 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

- ✓ Για $x = -1 < 0$, από τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1$, έχουμε:





✓ Τέλος, για $x = 1 \geq 0$, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(1) = 1 - 1 = 0.$$

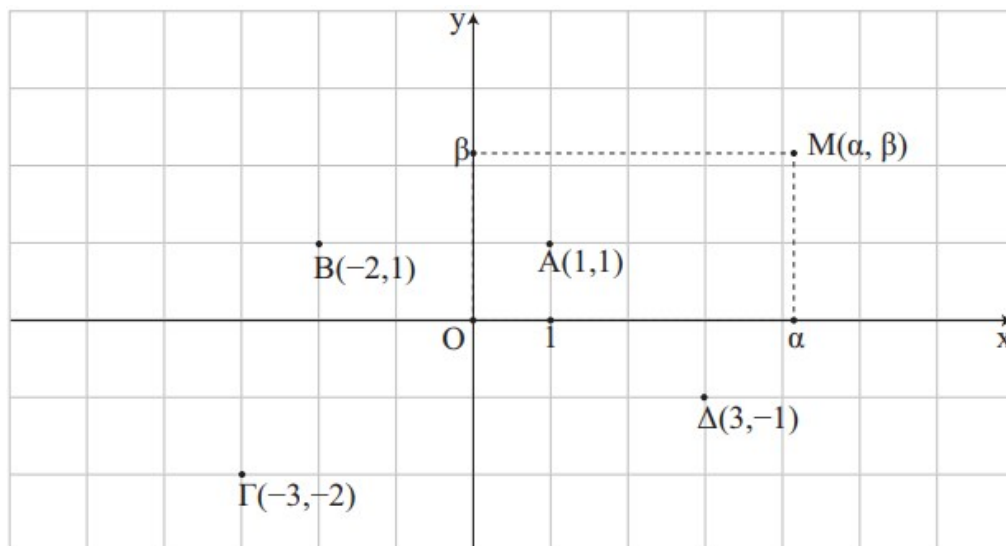


6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O . Από αυτούς ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** , ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y** .



Οι αριθμοί a , β λέγονται **συντεταγμένες** του M . Ειδικότερα ο a λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου M . Το σημείο M που έχει συντεταγμένες a και β συμβολίζεται με $M(a, \beta)$ ή, απλά, με (a, β) .

Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

