
4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
4.1 Η συνάρτηση y = αx² με α ≠ 0
4.2 Η συνάρτηση y = αx² + βx + γ με α ≠ 0
Γενικές ασκήσεις 4ου κεφαλαίου
Επανάληψη – Ανακεφαλαίωση
$\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$

Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε ότι μια ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές x, y καθορίζει μια διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση, όταν σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή του y. Για παράδειγμα, η ισότητα $y = x^2$ καθορίζει μια συνάρτηση, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του y.

Π.χ. Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$,

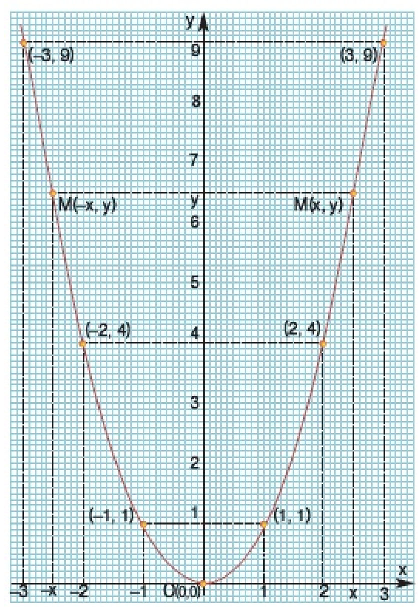
για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$ κ.τ.λ.

Σ΄ ένα σύστημα αξόνων, αν παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη (x, y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μια τιμή του x, τότε το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί τη **γραφική παράστασή** της.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Σ΄ ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **παραβολή** και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

− Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.

− Η συνάρτηση $y = x^2$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** $y = 0$, όταν $x = 0$.

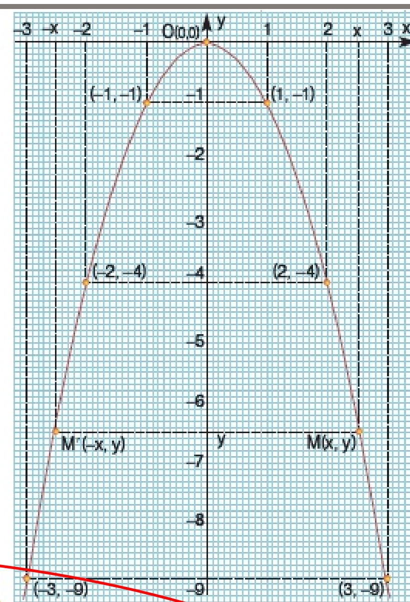
− Για $x = -3$ ή $x = 3$ έχουμε $y = 9$ και τα σημεία (-3, 9) και (3, 9) της παραβολής είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.Γενικά σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2$, η οποία είναι επίσης μια παραβολή.

– Η παραβολή έχει **κορυφή** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει y 0.

– Η συνάρτηση $y = -x^2$ παίρνει **μέγιστη τιμή** y = 0, όταν x = 0.

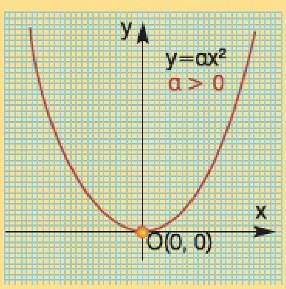
– Σε αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = -x^2$ έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

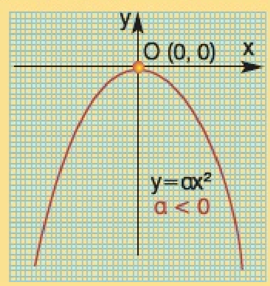


Γενικά

Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α \neq 0$.

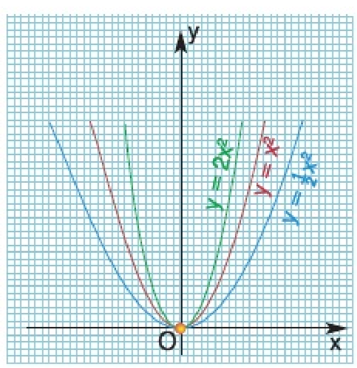
- Έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.
- Αν $α > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω και η συνάρτηση παίρνει **ελάχιστη τιμή** y = 0, όταν x = 0.
- Αν $α < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω και η συνάρτηση παίρνει **μέγιστη τιμή** y = 0, όταν x = 0.

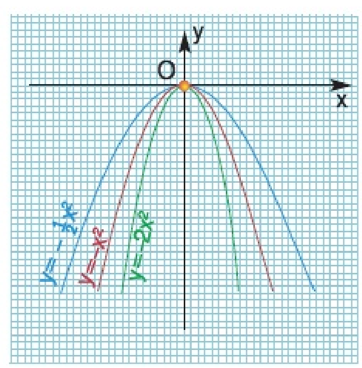




Στα παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει την παραβολή $y = αx^2$ για διάφορες τιμές του αριθμού α. Παρατηρούμε ότι:

α) Ο συντελεστής α δεν καθορίζει μόνο τη θέση της παραβολής $y = αx^2$ ως προς τον άξονα x΄x, αλλά καθορίζει και το «άνοιγμα» της. Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε η παραβολή «κλείνει».





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **α) Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η παραβολή $y = \alpha x^2$ να διέρχεται από το σημείο Α (-1, 3).**

Λύση

Για να διέρχεται η παραβολή $y = \alpha x^2$ από το σημείο Α(-1, 3), πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου Α, να επαληθεύουν την εξίσωση $y = \alpha x^2$. Άρα, για x = -1 και y = 3, έχουμε $3 = \alpha(-1)^2$, οπότε α = 3.

2 **Να σχεδιαστεί η παραβολή $y = -2x^2$ όταν $-2 \leq x \leq 2$ και να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή που παίρνει η μεταβλητή y. Ποια σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη** $-\frac{9}{2}$

Λύση

Σχηματίζουμε πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = -2x^2$.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–2	0	–2	–8

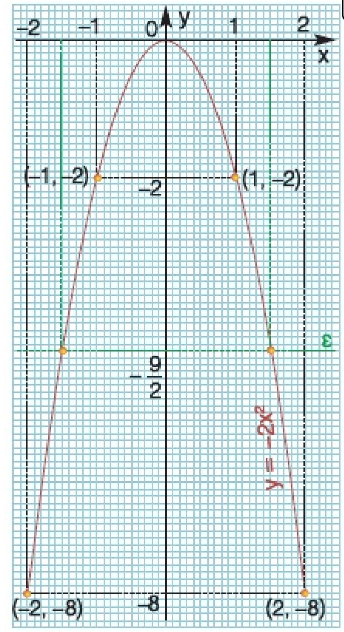
Με τη βοήθεια των τιμών αυτών σχεδιάζουμε την παραβολή. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι, για όλες τις τιμές του x, από το -2 έως και το 2 ($-2 \leq x \leq 2$) οι αντίστοιχες τιμές του y είναι από το -8 έως και το 0 ($-8 \leq y \leq 0$). Άρα, η μέγιστη τιμή του y είναι το 0, όταν x = 0 και η ελάχιστη τιμή του y είναι το -8, όταν x = -2 ή x = 2.

Για $y = -\frac{9}{2}$ έχουμε:

$-\frac{9}{2} = -2x^2$ ή $x^2 = \frac{9}{4}$, οπότε $x = \pm\frac{3}{2}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Τα σημεία αυτά μπορούν να βρεθούν και από τη γραφική παράσταση, αφού είναι τα κοινά σημεία της ευθείας ε : $y = -\frac{9}{2}$ και της παραβολής $y = -2x^2$.



3 **Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, τότε σε χρόνο t διανύει διάστημα S, που δίνεται από τον τύπο** $S = \frac{1}{2}gt^2$ ($g \approx 10 m/sec^2$). **. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διαστήματος - χρόνου.**

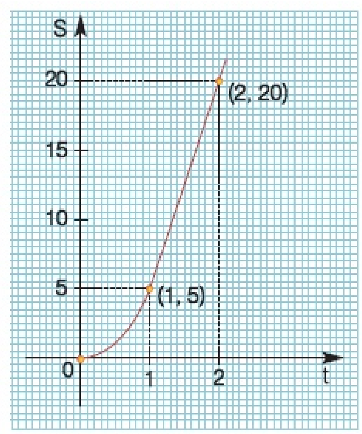
Λύση

Το διάστημα S για g = 10 m/sec^2 δίνεται από τον

τύπο $S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5t^2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S = 5t^2$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο O(0, 0) και διέρχεται από τα σημεία (1, 5), (2, 20) κ.τ.λ.

Ο χρόνος όμως δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οπότε το διάγραμμα του διαστήματος - χρόνου είναι το τμήμα της προηγούμενης παραβολής που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.



4 Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην παραβολή $y = -2x^2$;

α) $A(-1, 2)$ **β)** $B(2, -8)$ **γ)** $\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **δ)** $\Delta(-2, 8)$