ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 7

7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$

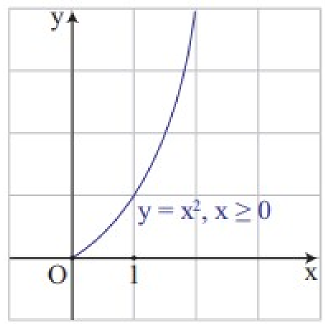
Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$.

• ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του *x*:

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	...	$\to +\infty$
$g(x)=x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	$10^{\cdots}$	$\to +\infty$

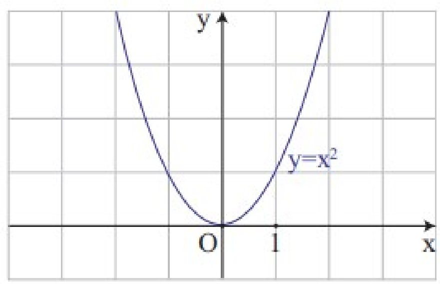
Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "τείνει στο +∞", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "τείνει στο +∞ ". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το +∞.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και παίρνοντας ένα πίνακα τιμών της g για μη αρνητικές τιμές του x, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Αν τώρα πάρουμε το συμμετρικό της παραπάνω καμπύλης ως προς τον άξονα y'y, τότε θα έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ σε όλο το $\mathbb{R}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι:

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$:

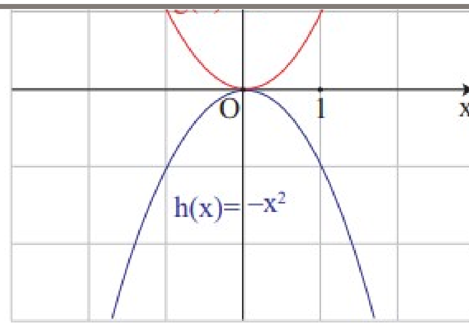


- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $g(0) = 0$
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x τείνει είτε στο -∞, είτε στο +∞.

Η συνάρτηση h(x) = -x²

$$h(x) = -g(x)$$

Άρα, η γραφική παράσταση της $h(x) = -x^2$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2$ ως προς τον άξονα x'x.



Επομένως η συνάρτηση $h(x) = -x^2$:

- Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, το $h(0) = 0$
- Έχει γραφική παράσταση που προεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, καθώς το x τείνει είτε στο $-\infty$ είτε
- στο$+\infty$.

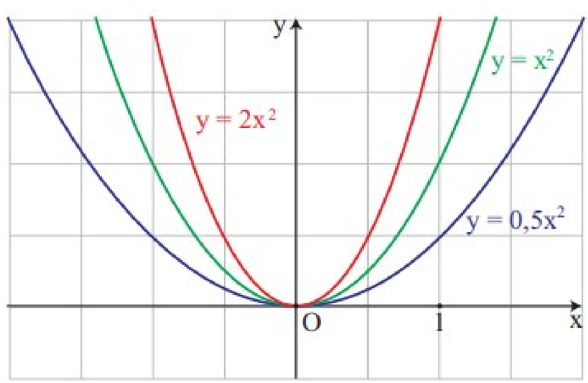
Η συνάρτηση f(x) = αx²

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν **α > 0**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha > 0$	$+\infty$	$\searrow$	**0** **min**	$\nearrow$	$+\infty$

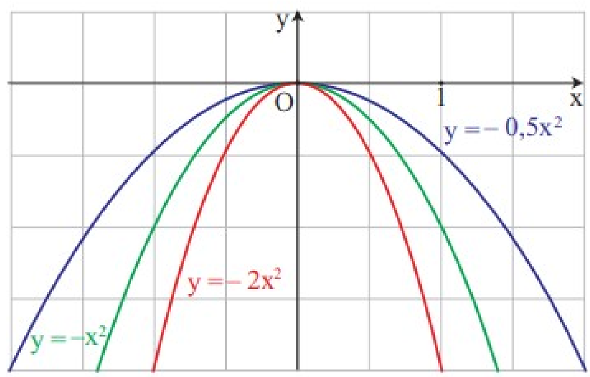
Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



- Αν **α < 0**, τότε εργαζόμαστε όπως εργαστήκαμε για τη συνάρτηση $h(x) = -x^2$ και καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty \nearrow$	max 0	$\searrow -\infty$

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = -0,5$, $\alpha = -1$, $\alpha = -2$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων και **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y'y .

Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι "ανοικτή" προς τα κάτω.

✓ Καθώς η |α| μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο "κλειστή", δηλαδή "πλησιάζει" τον άξονα y'y .