ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1
ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ
Θεωρία και πρακτική της θεωρίας των σφαλμάτων των μετρήσεων

Η βάση σε **όλες τις μετρητικές διαδικασίες** που χρησιμοποιούν οι μηχανικοί

ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗ
    - Αμεση Μέτρηση
    - Εμμεση Μέτρηση
    - Σύνθετη Μέτρηση
3. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ
    - 3.1 Συστηματικά Σφάλματα
    - 3.2 Τυχαία Σφάλματα
4. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ (Αμεση Μέτρηση)
    - 4.1 Γραφή Αποτελέσματος Μέτρησης
5. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ (Αμεση Μέτρηση)
    - 5.1 Σχετικο Σφάλμα
    - 5.2 Σχετική Απόκλιση
6. ΣΥΜΨΗΦΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ
7. ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ (Εμμεση μέτρηση)

…στην καθημερινότητα ?

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σφαλματα Μετρήσεων πάντα υπάρχουν!

Από που προέρχονται;

Πώς υπολογίζονται;

Πώς περιορίζονται;

Πώς γράφονται;

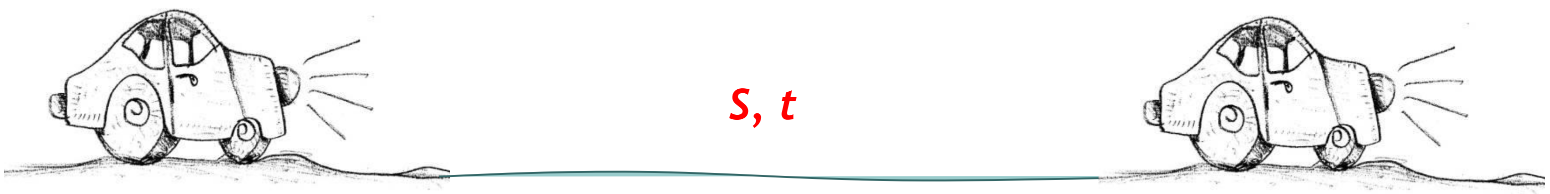
Πόσο αξιολογείται η πειραματική μέτρηση;

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σφαλματα μετρήσεων: Θα ασκηθούμε ...

- Πως τα υπολογίζουμε απο τις μετρήσεις (Στατιστική)
- Πως τα αναγράφουμε
- Πως αξιολογούμε την πειραματικη διαδικασία

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ



- ***Άμεση***

Π.χ. μέτρηση της απόστασης s που διανύει ένα σώμα και η μέτρηση του χρόνου t

- ***Έμμεση***

Π.χ. η μέτρηση της ταχύτητας u του σώματος: u=s/t

3. ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

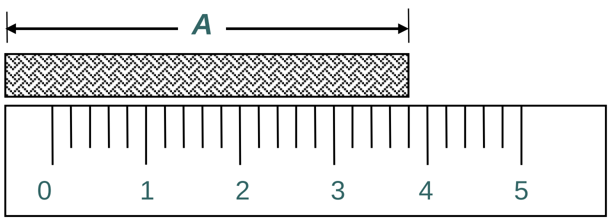
ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ	ΤΥΧΑΙΑ
α. οργάνων μέτρησης	α. παρατηρητής
β. θεωρητικά	β. συνθήκες τέλεσης πειράματος
γ. προσωπικά	

Επιδρούν στην μετρούμενη τιμή
προς μια κατεύθυνση:
Θετικά ή αρνητικά
+ ή -

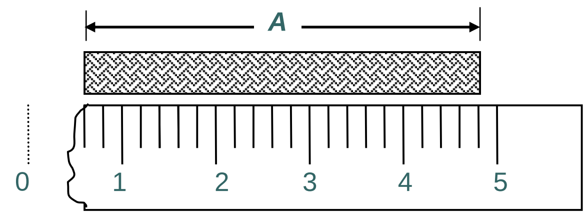
Επιδρούν στη μετρούμενη
και στις δύο κατευθύνσεις
Θετικά και αρνητικά
±

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
α. Σφάλματα Οργάνων

α1. Μετάθεση του μηδενός



(α) από την ακρη

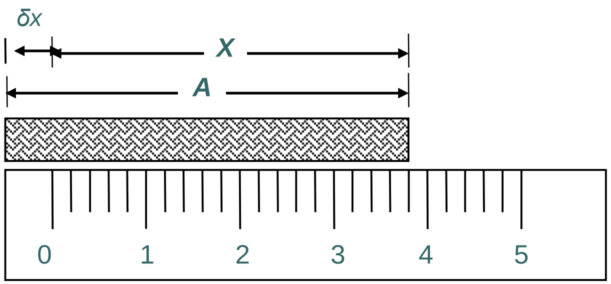


(β) σπασμένος χάρακας

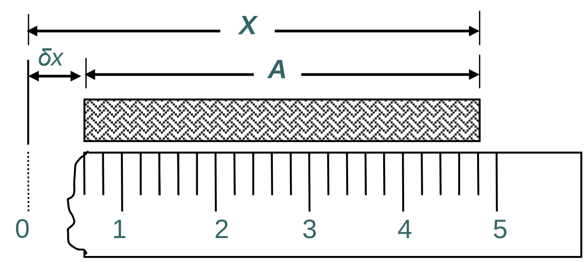
Πρέπει πάντα να ελέγχεται η αρχική ένδειξη του οργάνου και να απαλείφεται η μετάθεση από την τελική μέτρηση

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
α. Σφάλματα Οργάνων

α1. Μετάθεση του μηδενός (συνέχεια)



(α) από την ακρη



(β) σπασμένος χάρακας

Μέτρηση X= 3.8 cm,
Μετάθεση δx= –0.4 cm

➧ Αφαιρώ την μεταθεση με το πρόσημό της από τη μέτρηση:
Τελικά, Α = X-δx = **4.2 cm**

Μέτρηση X= 4.8 cm,
Μετάθεση δx= +0.6 cm

➧ Αφαιρώ την μεταθεση με το πρόσημό της:
Τελικά, Α = X-δx = **4.2 cm**

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
α. Σφάλματα Οργάνων

α.1 Μετάθεση του μηδενός (συνέχεια)

- Εντοπίζουμε την αρχική ένδειξη που έχει το όργανο όταν θα επρεπε να είναι μηδενισμένο.
- Εάν η ενδειξη είναι μικρότερη του μηδεν (αρνητική) δίνουμε πρόσημο πλήν.
- Εάν η ενδειξη είναι μεγαλύτερη του μηδεν δίνουμε πρόσημο σύν.
- Αφού μετρήσουμε την ποσότητα Χ που μας ενδιαφέρει, αφαιρούμε την μετάθεση του μηδεν αλγεβρικα

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

β. Θεωρητικά Σφάλματα

Προσεγγιστικές σχέσεις

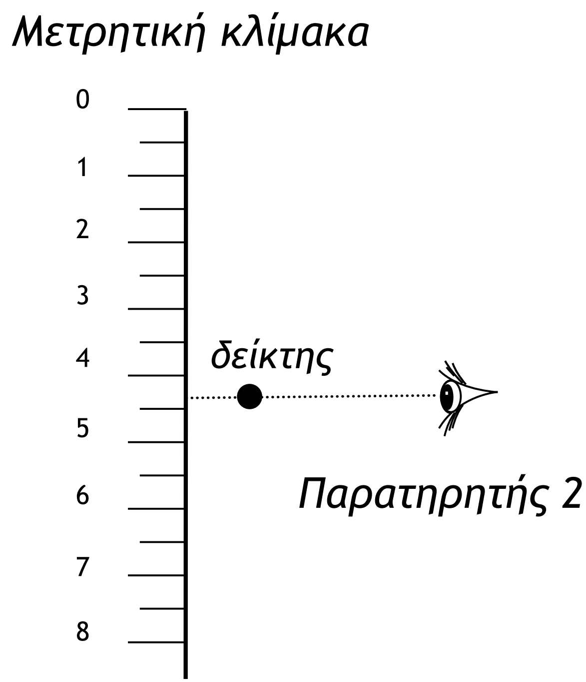
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4 + \frac{173}{737280}\theta^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta^8 + \dots\right)$$

Αγνοώντας όρους μεγάλης τάξης …

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{για} \quad \theta << 1\,rad$$

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ
γ. Σφάλματα Σχεδιασμού/Εκτέλεσης

Εσφαλμένη θέση παρατήρησης
«σφαλμα παράλλαξης»



Ορθή θέση παρατήρησης

3.2 ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ο Παρατηρητής εισάγει σφάλμα όταν:

- διαβάζει τις ενδείξεις σε όργανο με αναλογική ή ψηφιακή κλίμακα (*σφάλμα ανάγνωσης*) ή
- χρονομετρά ένα γεγονός (*χρόνος αντίδρασης*, **δ*t* = ±0.2 sec**).

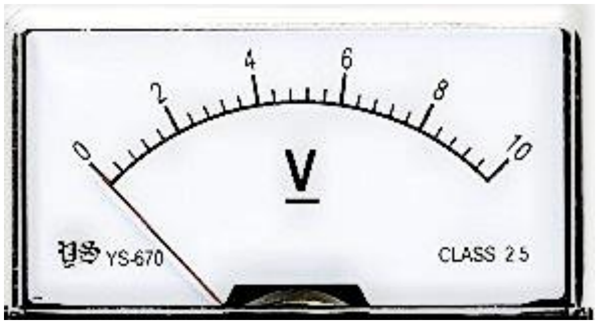
Οι διακυμάνσεις των περιβαλλοντικών συνθηκών εισάγουν σφάλμα:

- θερμοκρασίας, πίεσης, υγρασίας, φωτισμού, σύστασης αέρα, αέριων ρευμάτων, της τροφοδοσίας των οργάνων μέτρησης, των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, μηχανικών δονήσεων κ.α.

Οι μετρούμενες τιμές (έχει αποδειχθεί) ότι κατανέμονται γύρω από τη μέση τιμή, συνήθως με ***κατανομή Gauss*** ή *κανονική κατανομή*

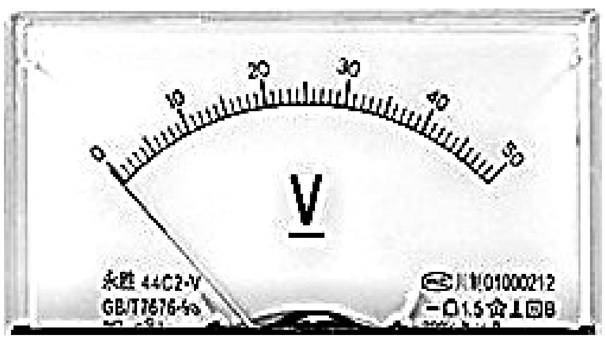
3.2 ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

α. Σφάλμα ανάγνωσης - Αναλογικό όργανο



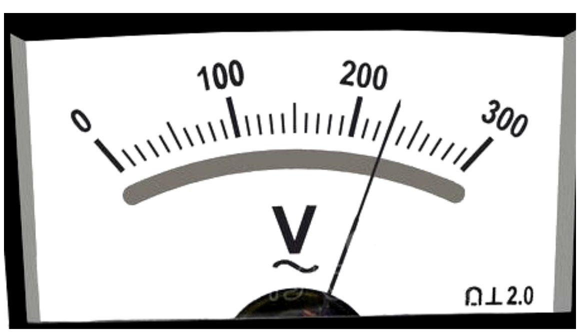
min = 0.2

δV= 0.1



min = 1

δV= 0.5



min = 10

δV= 5

Αναλογική κλίμακα

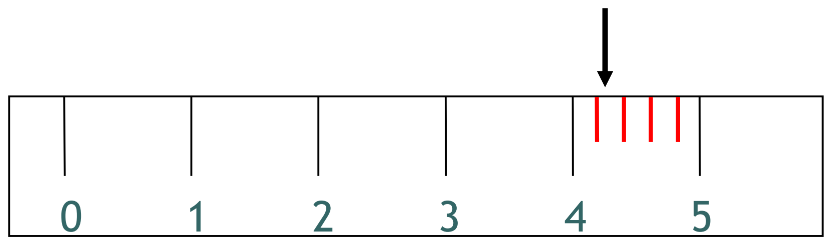
Σφάλμα ανάγνωσης =

½ της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας

3.2 ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

α. Σφάλμα ανάγνωσης - Αναλογικό όργανο (συνεχεια)

Μια περίπτωση αναλογικής κλίμακας …



Νοερός χωρισμός της υποδιαίρεσης της κλίμακας,

π.χ. έστω 5 υποδιαιρέσεις, τότε η min υποδιαίρεση πλέον της κλίμακας θα είναι 0.2 V

Σφάλμα = min/2

Ο παρατηρητής εκτιμά ότι η ένδειξη είναι 4.2V με σφάλμα ±0.1 V.

Αναμενόμενη τιμή *V*=(4.2±0.1) *V*

3.2 ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

β. Σφάλμα ανάγνωσης: Ψηφιακό όργανο

min = 0.1

δV= 0.05

min = 0.01

δV= 0.005

min = 0.0001

δV=0.00005

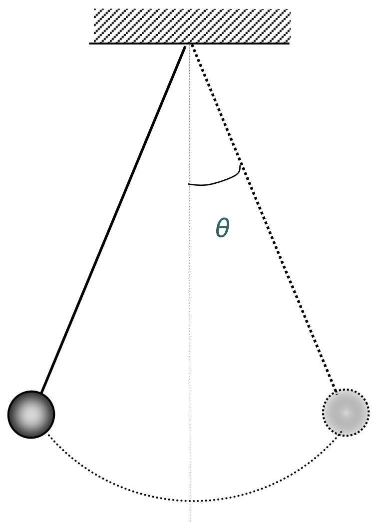
Ψηφιακή κλίμακα

Σφάλμα ανάγνωσης =

½ της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας

4. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Πείραμα μέτρησης της περιόδου *T* ενός εκκρεμούς



Αύξων αριθμός μέτρησης	Μετρούμενες τιμές
i	T_i (sec)
1	1.21
2	1.24
3	1.22
4	1.27
5	1.26
6	1.24
7	1.26

4. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Μέση τιμή

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_N}{N}$$

Τυπική απόκλιση

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x} - x_i\right)^2}{N-1}} = \pm\sqrt{\frac{\left(\overline{x} - x_1\right)^2 + \left(\overline{x} - x_2\right)^2 + \ldots\left(\overline{x} - x_N\right)^2}{N-1}}$$

Σφάλμα μέσης τιμής

$$\delta\overline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x} - x_i\right)^2}{N\cdot\left(N-1\right)}}$$

4. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Αύξων αριθμός μέτρησης	Μετρούμενες τιμές T_i	Μέση τιμή $\overline{T}$	Απόκλιση κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή $\left(\overline{T}-T_i\right)$	Τετράγωνο της απόκλισης κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή $\left(\overline{T}-T_i\right)^2$
i	(sec)	(sec)	(sec)	$(\text{sec})^2$
1	1.21	1.242857	0.032857	0.00107959
2	1.24		0.002857	0.00000816
3	1.22		0.022857	0.00052245
4	1.27		-0.027143	0.00073673
5	1.26		-0.017143	0.00029388
6	1.24		0.002857	0.00000816
7	1.26		-0.017143	0.00029388

4. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Αλγεβρικοί υπολογισμοί:

$$\bar{T} = \frac{1.21+1.24+1.22+1.27+1.26+1.24+1.26}{7}\ \text{sec} = 1.242857\ \text{sec}$$

$$\delta\bar{T} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm 0.00837066\ \text{sec}$$

$$T = \bar{T} \pm \delta\bar{T} = \left(1.242857 \pm 0.00837066\right)\text{sec}$$

Σωστό αλγεβρικό αποτέλεσμα,

όμως…έχει όμως αποδοθεί σωστά το αποτέλεσμα αυτό;

Η γραφή πρέπει να αντανακλά την ***ακρίβεια*** της πειραματικής διαδικασίας !

Πρέπει να αναγραφει το αποτέλεσμα με τα σωστά ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ …

4.1 ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

ΕΙΝΑΙ…

- Όλα τα μη-μηδενικά ψηφία : 1,2,3,4,5,6,7,8,9
- Όλα τα μηδέν που ευρίσκονται μεταξύ μη-μηδενικών ψηφίων

  πχ 123045.2703
- Όλα τα μηδέν που ευρίσκονται δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο δεκαδικού αριθμού πχ 3.4500

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ…

- Τα μηδέν που βρίσκονται δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο ακέραιου αριθμού. Πχ 1200
- Τα μηδέν που βρίσκονται αριστερά από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεκαδικού αριθμού δεν είναι σημαντικά ψηφία. Πχ 0.013

4.1 ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Παραδείγματα

- **Ένα** σημαντικό ψηφίο: **5**, **1**0, **2**00, **3**000, 0.000**6**, 0.00**2**, 0.**5**.
- **Δυο** σημαντικά ψηφία: 0.00**30**, **2.0**, **35**, **15**00, **25**000.
- **Τρία** σημαντικά ψηφία: 0.00**200**, 0.0**508**, **5.00**, **205**, **105**00.
- Ο αριθμός **2**000 έχει **ένα** σημαντικό ψηφίο. Αν ο αριθμός αυτός είχε προκύψει από μέτρηση με ακρίβεια **δύο** σημαντικών ψηφίων, τότε θα γραφόταν: **2.0**x103.

4.2 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εντοπίζουμε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο (*a*) που μας ενδιαφέρει να κρατήσουμε και εξετάζουμε το αμέσως επόμενο φηφίο (*β*).

Π.χ. Στρογγυλοποιείστε τους παρακάτω αριθμούς με ***3 ΣΨ***

- **Αν *β* < 5 τότε *a* => *a***

$$17.24798 \qquad \underline{17.\overset{\alpha}{2}}\Big|\overset{\beta}{4}798 \longrightarrow 17.2$$

$$436476 \qquad 43\underline{\overset{a}{6}}\Big|\overset{\beta}{4}76 \longrightarrow 436000$$

- **Αν *β* > 5 τότε *a* => *a* + 1**

$$0.0206723 \qquad 0.0\underline{20\overset{\alpha}{6}}\Big|\overset{\beta}{7}23 \longrightarrow 0.0207$$

$$3236784 \qquad \underline{32\overset{a}{3}}\Big|\overset{\beta}{6}784 \longrightarrow 3240000$$

4.2 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

- **Αν *β* = 5** τότε διακρίνουμε **2** περιπτώσεις:

i) Αν μετά το ψηφίο β (σε οποιαδήποτε θέση) υπάρχει έστω και ένα ψηφίο γ>0, τότε ***a* = *a* +1**

$$\pi.\chi. \quad 0.032450102 \qquad 0.0\underline{32\overset{a}{4}}\,\big|\,\overset{\beta}{5}\,0\,\overset{\gamma}{1}\,02 \longrightarrow 0.0325$$

ii) Αν μετά το *β* δεν υπάρχει κανένα ψηφίο ή αν υπάρχουν μηδενικά ψηφία, ισχύει η εξής σύμβαση:

- *Αν a είναι <u>άρτιος</u> αριθμός, τότε* ***a* = *a***

$$\pi.\chi. \quad 2325 \qquad \underline{23\overset{a}{2}}\,\big|\,\overset{\beta}{5} \longrightarrow 2320$$

- *Αν το ψηφίο a είναι <u>περιττός</u> αριθμός, τότε* ***a* = *a* + *1***

$$\pi.\chi. \quad 0.02335 \qquad \underline{0.023\overset{a}{3}}\,\big|\,\overset{\beta}{5} \longrightarrow 0.0234$$

4.2 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

- Πρόσθεση και Αφαίρεση

$$15.265+8.72-10.\overset{\downarrow}{8}=\underline{\overset{\alpha}{8.1}}\Big|\overset{\beta}{85}=8.2$$

- Γινόμενο και Διαίρεση

$$\frac{134\times235.7\times28.9}{1.2}=\underline{\overset{\alpha}{76}}\Big|\overset{\beta}{0}643.1833=760000$$

- Δύναμη - Ρίζα, Λογάριθμος και Τριγωνομετρικός Αριθμός

$$1.6^{4}=6.6 \qquad \ln(7.24)=1.98$$

$$\sqrt[3]{12.3}=2.31 \qquad \sin(0.87^{o})=0.76$$

4.3 ΓΡΑΦΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Αλγεβρικά... $T = \overline{T} \pm \delta\overline{T} = \left(1.242857 \pm 0.00837066\right)\ \text{sec}$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ «ΚΑΝΟΝΕΣ»

1. «Αν πλήθος μετρήσεων 5<N<20 τότε το σφάλμα της μέσης τιμής θα γράφεται με ένα σημαντικό ψηφίο»

$$\delta\overline{T} = \pm\underline{0.00\overset{\alpha}{8}}\Big|\overset{\beta}{3}7066\ \text{sec} = \pm 0.008\ \text{sec}$$

2. «Η μέση τιμή στρογγυλοποιείται στο ψηφίο το οποίο είναι ίδιας τάξης μεγέθους (ακρίβειας) με το σημαντικό ψηφίο του σφάλματος»

$$\overline{T} = \underline{1.24\overset{a}{2}}\Big|\overset{\beta}{8}57\ \text{sec} = 1.243\ \text{sec}$$

$$\boxed{T = \overline{T} \pm \delta\overline{T} = \left(1.243 \pm 0.008\right)\text{sec}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΕΩΝ

1ο παράδειγμα : «*μέτρηση χωρητικότητας πυκνωτή*»

Αριθμός επαναλήψεων N=15… αρα σφάλμα με ***1*** *ΣΨ*

$$\delta\overline{C} = \pm 37\,\mu F = \pm \overset{\alpha}{\underline{3}}\,\big|\,\overset{\beta}{7}\,\mu F = \pm 40\,\mu F$$

$$\overline{C} = 2586\,\mu F = 25\overset{\alpha}{\underline{8}}\,\big|\,\overset{\beta}{6}\,\mu F = 2590\,\mu F$$

Τελικά… $\overline{C} \pm \delta\overline{C} = \left(2590 \pm 40\right)\mu F$

5. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Σύγκριση του σφάλματος με τη μέση τιμή

Μέτρο της Αξιοπιστίας της μέτρησης (=επαναληψιμότητα μετρήσεων)

*Η τιμή του σφάλματος δεν λέει **τίποτα** από μόνη της*
Π.χ. $\delta x = \pm 1$ είναι σημαντικό όταν η μέση τιμή είναι $x=5$,
Πολύ-πολύ λιγότερο όμως αν ήταν $x=100$

$$\text{σχετικό σφάλμα } (\%) = \frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Αποδεκτό για το εργαστήριο μας όταν είναι <10%

5. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Σύγκριση του της μέσης τιμής του μετροούμενου μεγέθους με την ακριβή τιμή από τη βιβλιογραφία

Μέτρο της <u>ακρίβειας</u> της μέτρησης

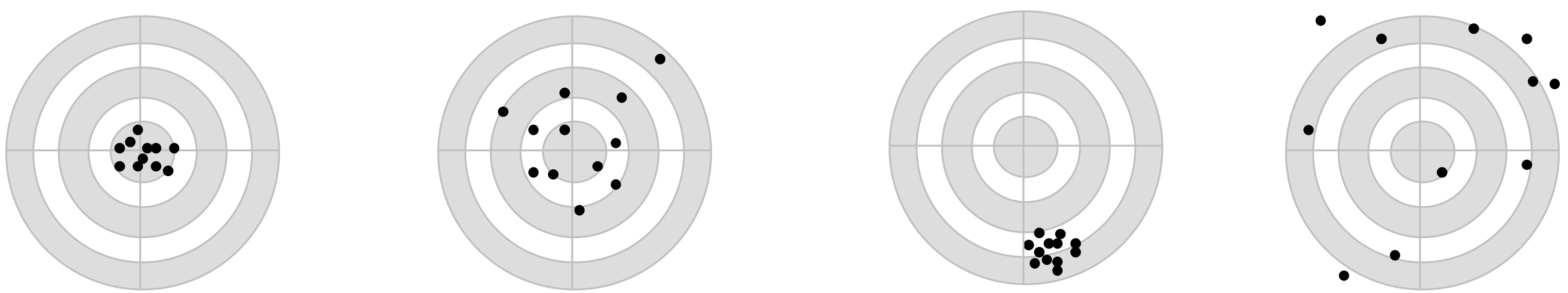
$$\text{σχετική απόκλιση } (\%) = \left|\frac{\Delta x}{x_{\text{γνωστό}}}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{x_{\text{γνωστό}} - x_{\text{πειραματικό}}}{x_{\text{γνωστό}}}\right| \cdot 100\%$$

Αποδεκτό για το εργαστήριο μας όταν είναι <10%

5. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

- «Ακριβής» **= μέτρηση απαλλαγμένη από συστηματικά σφάλματα**

- «Αξιόπιστη» **= τυχαία σφάλματα μέτρησης περιορισμένα στο ελάχιστο**



(α)
Ακριβής=συστ/κά μικρά

Αξιόπιστη=τυχαία μικρά

(β)
Ακριβής=συστ/κά μικρά

Μικρή αξιοπιστία=τυχαία μεγάλα

(γ)
Μικρή ακρίβεια=συστ/κά μεγάλα

Αξιόπιστη=τυχαία μικρά

(δ)
Μικρή ακρίβεια

Μικρή αξιοπιστία
Σφαλματα μεγάλα

6. ΣΥΜΨΗΦΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Το **τελικό σφάλμα θα κριθεί από το μέγιστο όλων**, ώστε να μην γίνεται υπερκτίμηση των δυνατοτήτων της πειραματικής διαδικασίας

Παράδειγμα: «Ο χρόνος ενός γεγονότος μετρήθηκε πολλές φορές, χειροκίνητα με ψηφιακό χρονόμετρο, ακρίβειας 0.01 sec»

πολλές φορές…	Σφάλμα μέσης τιμής	$\delta t = \pm 0.08$ sec
Χειροκίνητα…	Χρόνος αντίδρασης	$\delta t =$ **± 0.2 sec**
ψηφιακό χρονόμετρο…	Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου	$\delta t = \pm 0.005$ sec

Μέγιστο σφάλμα: Χρόνος αντίδρασης

Προσοχή δεν αθροίζουμε τα σφάλματα

7. ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ - ΣΦΑΛΜΑ ΕΜΜΕΣΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Πως βρίσκω το σφάλμα μέτρησης (*δu*) ενός μεγέθους (*u*) που <u>υπολογίζεται</u> από <u>**άμεσα**</u> μετρούμενα μεγέθη (x,y,z) ;

Αν η σχέση που συνδέει το μέγεθος *u* με τα x,y,z είναι:

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$$

και *δx*, *δy*, *δz* είναι τα (στατιστικά) σφάλματα των μέσων τιμών. Τότε:

$$\delta u = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\delta z\right)^2 + \ldots}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: «Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Εύρεση επιτάχυνσης *a*.»

Οι μετρήσεις...

$$S = (32.5 \pm 0.2)\, m$$

$$t = (12.3 \pm 0.5)\, \sec$$

Η σχέση...

$$a = \frac{2S}{t^2}$$

Οι μερικές παράγωγοι...

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial S} &= \frac{2}{t^2} \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= -\frac{4S}{t^3} \end{aligned}\right\} \quad \delta a = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial S}\delta \bar{S}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\delta \bar{t}\right)^2} = 0.0350495 \frac{m}{\sec^2}$$

Τελικό αποτέλεσμα...

$$\boxed{a = (0.43 \pm 0.04) \frac{m}{\sec^2}}$$