ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Η παρούσα άσκηση διαπραγματεύεται τη θεωρία και την πρακτική της θεωρίας των σφαλμάτων των μετρήσεων.

Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι ο σπουδαστής:

- να κατανοήσει ότι η πειραματική μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους συνοδεύεται αναπόφευκτα από σφάλματα και να μπορεί να προσδιορίσει την προέλευσή τους
- να υπολογίζει στατιστικά την αναμενόμενη (μέση) τιμή και το σφάλμα μέσης τιμής από ένα πλήθος πειραματικών μετρήσεων
- να αποδίδει ορθά τη μέση τιμή και το σφάλμα ενός μετρούμενου φυσικού μεγέθους, ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά των δυνατοτήτων της πειραματικής διαδικασίας
- με βάση τα παραπάνω, να μπορεί να αξιολογεί την ακρίβεια και την αξιοπιστία της πειραματικής διαδικασίας

Οι έννοιες που θα αναπτυχθούν αποτελούν την βάση σε όλες τις μετρητικές διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μηχανικοί.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Μέτρηση είναι η σύγκριση ενός μεγέθους με ένα πρότυπο αναφοράς. Ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η σύγκριση αυτή, διακρίνουμε τις μετρήσεις σε **άμεσες** και **έμμεσες**.

Άμεση είναι η μέτρηση όταν η τιμή του μετρούμενου μεγέθους προκύπτει από μια και μόνο σύγκριση με ένα συγκεκριμένο πρότυπο αναφοράς. Για παράδειγμα, η μέτρηση του μήκους ενός δρόμου είναι άμεση αφού το μήκος αυτό είναι ίσο με τον αριθμό των διαδοχικών προτύπων μέτρων που απαιτούνται για να καλυφθεί το διάστημα από την αρχή μέχρι το τέλος του δρόμου.

Έμμεση είναι μια μέτρηση, όταν η τιμή του μετρούμενου μεγέθους προκύπτει από τον αλγεβρικό συνδυασμό παραμέτρων των οποίων η τιμή έχει προκύψει από άμεσες μετρήσεις. Για παράδειγμα, η μέτρηση της ταχύτητας ενός κινητού είναι έμμεση δεδομένου ότι για τον προσδιορισμό της πρέπει πρώτα να μετρήσουμε με χρονόμετρο το χρόνο που απαιτείται να διανύσει το κινητό κάποιο διάστημα. Το διάστημα και ο χρόνος μετρούνται άμεσα ενώ η ταχύτητα προκύπτει από το πηλίκο «διάστημα δια χρόνος».

Με τα δεδομένα της σύγχρονης τεχνολογίας μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι είναι αδύνατη η πραγματοποίηση μιας μέτρησης με απόλυτη ακρίβεια. Δεν επιτρέπεται σε καμιά περίπτωση να δηλώνουμε ότι το «μέγεθος Χ μετρήθηκε με απόλυτη ακρίβεια». Αυτό προκύπτει και από την εξέλιξη του Μετρικού Συστήματος η οποία έχει ως στόχο τον προσδιορισμό Προτύπων Αναφοράς τα οποία να εξασφαλίζουν την μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Σε κάθε μέτρηση απαιτείται όπως κάθε μετρούμενο μέγεθος να συνοδεύεται και με μια παράμετρο η οποία να δηλώνει το μέτρο της ακρίβειας της μέτρησης. Η παράμετρος αυτή εκφράζει το **σφάλμα** της μέτρησης. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή του σφάλματος τόσο πιο μεγάλη είναι και η ακρίβεια της μέτρησης.

1.2 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Σε κάθε πειραματική διαδικασία, η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους δίνει μια αριθμητική τιμή *x* η οποία αποκλίνει πάντοτε από την πραγματική τιμή Α κατά ποσότητα δx. Η απόκλιση αυτή οφείλεται σε ανακρίβειες ή σφάλματα τα οποία είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένα τόσο με τα μετρητικά όργανα και τον τρόπο χρήσης των οργάνων αυτών, όσο και με τον παρατηρητή που κάνει τη μέτρηση. Τα σφάλματα μπορούν να ελαχιστοποιηθούν, είναι *αδύνατον* όμως να εξαλειφθούν πλήρως. Ανεξάρτητα της προέλευσής τους, τα σφάλματα διακρίνονται σε *συστηματικά* και σε *τυχαία*.

Για την σωστή απόδοση της αναμενόμενης τιμής ενός μετρούμενου φυσικού μεγέθους *Α*, είναι απαραίτητο να αναπτύξουμε βασικές έννοιες της θεωρίας σφαλμάτων. Γενικά θα είναι της μορφής:

$$A = \overline{x} \pm \delta\overline{x}$$

Αναμενόμενη τιμή = (μέση τιμή ± σφάλμα) ***μονάδα μέτρησης***

1.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Τα συστηματικά σφάλματα ονομάζονται και σταθερά σφάλματα επειδή αυτά επηρεάζουν κατά τον *ίδιο* τρόπο μια πειραματική μέτρηση. Αυτό σημαίνει ότι η απόκλιση δx από τη πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους έχει την *ίδια* τιμή, όσες φορές και αν γίνει η μέτρηση με το ίδιο μετρητικό σύστημα. Με άλλα λόγια, η μετρούμενη τιμή θα είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη πραγματική τιμή κατά δx.

Ανάλογα με τα αίτια που προκαλούν τα συστηματικά σφάλματα, αυτά διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες: *σφάλματα οργάνων, θεωρητικά και προσωπικά σφάλματα.*

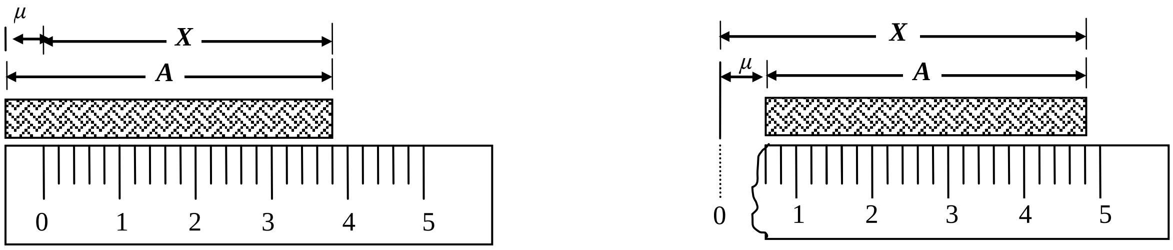
α. Σφάλματα Οργάνων

Τα μετρητικά όργανα αποτελούν τη βάση τόσο των μετρήσεων όσο και των σφαλμάτων που υπεισέρχονται σε αυτές. Κάθε όργανο μέτρησης αποτελείται κυρίως από ένα μηχανικό ή ηλεκτρονικό σύστημα του οποίου η λειτουργία στηρίζεται πάνω σε συγκεκριμένη φυσική αρχή και το οποίο προσδιορίζει την τιμή που αντιστοιχεί στο μετρούμενο μέγεθος. Η τιμή αυτή αποδίδεται στον παρατηρητή κατά έμμεσο τρόπο με τη βοήθεια βαθμονομημένης κλίμακας (π.χ. μετροταινίες, αναλογικά ηλεκτρικά όργανα) ή άμεσα με τη βοήθεια ειδικής οθόνης (π.χ. ψηφιακά πολύμετρα). Όσον αφορά στο μηχανικό ή στο ηλεκτρονικό σύστημα του οργάνου, είναι δυνατό δυο όργανα με τις ίδιες λειτουργικές δυνατότητες, το ένα να έχει διαφορετική αξιοπιστία από το άλλο και φυσικά το όργανο με την καλύτερη αξιοπιστία να είναι και ακριβότερο. Λέγοντας «αξιοπιστία» χαρακτηρίζουμε την επαναληψιμότητα που έχουν οι μετρήσεις ενός μεγέθους[1]. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι συνιστώσες των οργάνων με μεγάλη αξιοπιστία είναι κατασκευασμένες από υλικά ειδικών προδιαγραφών τα οποία δεν επηρεάζονται από τις επιδράσεις του περιβάλλοντος (π.χ. τη θερμοκρασία, την υγρασία, τη σκόνη, τα εξωτερικά

---

[1] Η «ακρίβεια» και η «αξιοπιστία» όταν μπορούν να ποσοτικοποιηθούν, αποτελούν μέτρο αξιολόγησης της πειραματικής διαδικασίας ως προς: την ικανότητα να μετρά την πραγματική τιμή ενός φυσικού μεγέθους και την επαναληψιμότητα των μετρήσεων που πάρθηκαν. Περισσότερα σε επόμενο εδάφιο.

ηλεκτρικά πεδία, τους κραδασμούς κλπ.) αλλά και από τους αδέξιους χειρισμούς των παρατηρητών.



(α) *(β)*

ΣΧΗΜΑ 1.1

Το πιο κλασικό συστηματικό σφάλμα που εισάγει ένα όργανο σε μια μέτρηση είναι η **μετάθεση του μηδενός**, όταν δηλαδή η *αρχική* ένδειξη στην κλίμακα ενός οργάνου δεν αντιστοιχεί στην τιμή μηδέν «0». Η τιμή της μετάθεσης αποδίδεται αλγεβρικά, έχει δηλαδή πρόσημο σύν (+) ή πλήν (-). Γενικά, όταν γνωρίζουμε το σφάλμα της μετάθεσης, τότε πάντα θα το αφαιρούμε από την μετρούμενη τιμή, για να προκύψει η αναμενόμενη τιμή.

αναμενόμενη τιμή	=	μετρούμενη τιμή	—	μετάθεση
A		**X**	**—**	***μ***

(1.1)

Για την κατανόηση του σφάλματος αυτού δίνουμε το ΣΧΗΜΑ 1.1.

Στο ΣΧΗΜΑ 1.1(α) παρατηρούμε ότι το μηδέν «0» της κλίμακας απέχει από την αρχή του μετρητικού συστήματος απόσταση μ = -0.4 cm, και η μετρούμενη τιμή του μήκους του αντικειμένου είναι X = 3.8 cm. Τότε η αναμενόμενη θα είναι μεγαλύτερη από αντίστοιχη μετρούμενη X = 3.8 cm κατά 0.4 cm. Πράγματι : A = X – μ = 3.8 *cm* – (-0.4 *cm*) = 3.8 *cm*+ 0.4 *cm* = **4.2 *cm***

Αντίθετα, στο ΣΧΗΜΑ 1.1(β) παρατηρούμε ότι η αρχή του μετρητικού συστήματος είναι μετατοπισμένη δεξιά από το μηδέν της κλίμακας κατά ποσότητα μ = + 0.6 *cm*. Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη τιμή θα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη μετρούμενη τιμή κατά 0.6 *cm*. Πράγματι: A = X – μ = 4.8 *cm* – (+0.6 *cm*) = 4.8 *cm* - 0.6 *cm* = **4.2 *cm***

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και στην περίπτωση όπου η μέτρηση γίνεται με αναλογικό ηλεκτρικό όργανο στο οποίο η βελόνη ενδείξεων *δεν* δείχνει μηδέν όταν το μετρούμενο μέγεθος (π.χ. η διαφορά δυναμικού, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κλπ.) είναι μηδέν.

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι τα συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στην μετάθεση του μηδενός της κλίμακας του μετρητικού συστήματος είναι δυνατόν να εκτιμηθούν και να απαλειφθούν από την μέτρηση.

β. Θεωρητικά Σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά εκδηλώνονται στις περιπτώσεις όπου η τιμή ενός φυσικού μεγέθους είναι αποτέλεσμα έμμεσης μέτρησης και ειδικότερα στις περιπτώσεις εκείνες όπου η θεωρητική σχέση που χρησιμοποιείται είναι προσεγγιστική. Για παράδειγμα σε πείραμα ταλάντωσης ενός εκκρεμούς μήκους L, η περίοδος T υπολογίζεται αναλυτικά από την παρακάτω σχέση που περιέχει άπειρο πλήθος όρων που εξαρτώνται από τη γωνία θ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta^2+\frac{11}{3072}\theta^4+\frac{173}{737280}\theta^6+\frac{22931}{1321205760}\theta^8+\dots\right) \quad \text{(i)}$$

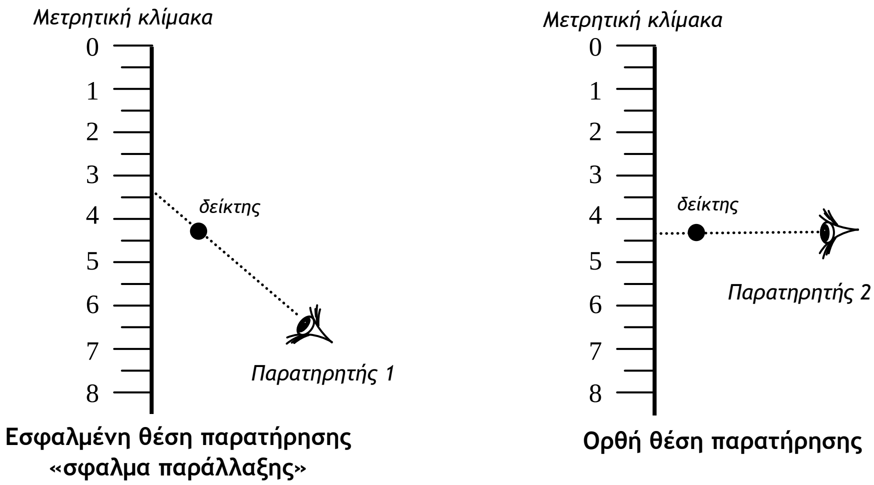
Όταν ωστόσο επιλεχθεί πολύ μικρή γωνία εκτροπής (θ<<1 rad), οι όροι στο άθροισμα μέσα στην παρένθεση συνεισφέρουν ελάχιστα στην τελική τιμή της περίοδου οπότε μπορούν και να παραληφθούν στους υπολογισμούς. Η έκφραση (i) γράφεται προσεγγιστικά ως εξής:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{για} \quad \theta << 1rad \qquad \text{(ii)}$$

Εάν η γωνία εκτροπής είναι για παράδειγμα θ = 10°, 20°, 30°, 40° το σφάλμα στον υπολογισμό της περίοδου χρησιμοποιώντας τη σχέση (ii) είναι αντίστοιχα 0.2, 0.8, 1.8, 3.2 %. Αυτό αποτελεί θεωρητικό σφάλμα του οποίου τη γνώση γνωρίζουμε εκ των προτέρων, οπότε και προσαρμόζουμε τις συνθήκες εκτέλεσης του πειράματος στην περιοχή ισχύος της προσεγγιστικής σχέσης, π.χ. θ<15°.

γ. Προσωπικά Σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στον ίδιο τον πειραματιστή και υπεισέρχονται στη μέτρηση σε κάθε στάδιο του πειράματος που αυτός έχει άμεση ή και έμμεση συμμετοχή τόσο στην κατασκευή του πειράματος όσο και στη λήψη των μετρήσεων. Όσο πιο παρατηρητικός, προσεκτικός και υπεύθυνος είναι ο πειραματιστής, τόσο πιο περιορισμένα είναι τα προσωπικά σφάλματα.



ΣΧΗΜΑ 1.2

Αλλά και η σχετική θέση του παρατηρητή ως προς το μετρητικό όργανο είναι δυνατόν να επηρεάσει τη μέτρηση ενός μεγέθους γνωστό ως «σφάλμα παράλλαξης». Στο ΣΧΗΜΑ 1.2 δίνεται μια μετρητική κλίμακα στην οποία ο δείκτης που προσδιορίζει την τιμή της μέτρησης κινείται πάνω από τη κλίμακα. Ο παρατηρητής 1 προσδιορίζει (εσφαλμένα) μια τιμή στο διάστημα μεταξύ 3.0 και 3.5, ενώ ο παρατηρητής 2, ο οποίος βρίσκεται σε διαφορετική θέση, προσδιορίζει για το ίδιο μετρούμενο μέγεθος μια τιμή στο διάστημα μεταξύ 4.0 και 4.5. Στις περιπτώσεις αυτές η *σωστή* μέτρηση προκύπτει όταν ο παρατηρητής βλέπει την *κάθετη* προβολή του δείκτη πάνω στη μετρητική κλίμακα (π.χ. θέση 2 στο ΣΧΗΜΑ 1.2).

Σε όλες τις περιπτώσεις συστηματικών σφαλμάτων, η αναμενόμενη τιμή της μέτρησης θα προκύπτει από τη ΣΧΕΣΗ 1.1 ή τη ΣΧΕΣΗ 1.2. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι οι σχέσεις αυτές διορθώνουν μια μέτρηση από τα σχετικά σφάλματα. Ο σοβαρός πειραματιστής πρίν το πείραμα (ή ακόμα καλύτερα την κάθε μέτρηση) ελέγχει την ακρίβεια της συσκευής μέτρησης ως εξής: μετρά ένα πρότυπο μέγεθος (πιστοποιημένο από εργαστήριο διακρίβωσης μεγεθών) και προσδιορίζει την απόκλιση της μετρούμενης τιμής από τη διακριβωμένη (calibration). Την απόκλιση αυτή, εν συνεχεία, τη λαμβάνει υπόψη του στις περαιτέρω μετρήσεις.

Τέλος, σφάλματα που οφείλονται σε αμέλεια ή έλλειψη σοβαρότητας του παρατηρητή όπως η εσφαλμένη ανάγνωση της ένδειξης του οργάνου, π.χ. ο αριθμός 3 μπορεί να καταγραφεί εκ παραδρομής ως 8 ή εσφαλμένοι υπολογισμοί, φυσικά οδηγούν σε αποτελέσματα που αποκλίνουν από τα πραγματικά. Αυτά δεν κατατάσσονται σε <u>καμμιά κατηγορία</u> των υγειών σφαλμάτων που συζητήσαμε αλλά πρέπει να αναγνωρίζονται και να εξαλείφονται προς όφελος του παρατηρητή και των ευθυνών που πρόκειται μελλοντικά να αναλάβει στα πλαίσια της επαγγελματικής του σταδιοδρομίας (π.χ. εκπόνηση έργου με προδιαγραφές, λειτουργία εξειδικευμένων οργάνων μέτρησης κ.α.) όπου τέτοιες παραλείψεις μπορούν να αποβούν μοιραίες.

1.4 ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

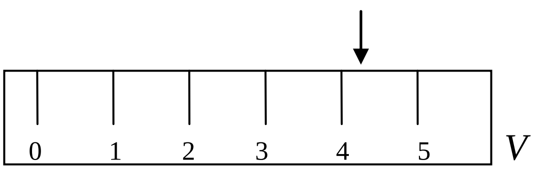
Τα τυχαία σφάλματα που υπεισέρχονται κατά την άμεση μέτρηση ενός μεγέθους οφείλονται σε ακαθόριστους παράγοντες, οι οποίοι συνδέονται με τον παρατηρητή, το μετρητικό σύστημα ή τις συνθήκες που εκτελείται το πείραμα. Οι παράγοντες αυτοί επηρεάζουν την μετρούμενη τιμή κατά τυχαίο τρόπο πότε υπερεκτιμώντας καί πότε υποτιμώντας την, δίνοντας έτσι ένα εύρος τιμών ± δx μέσα στο οποίο η πραγματική τιμή του μεγέθους δύναται να βρίσκεται. Συγκεριμένα,

- ο παρατηρητής εισάγει σφάλμα όταν διαβάζει τις ένδειξεις σε όργανο με αναλογική ή ψηφιακή κλίμακα (*σφάλμα ανάγνωσης*) ή όταν χρονομετρά ένα γεγονός εισάγει το σφάλμα *χρόνου αντίδρασης* που ποικίλει από άνθρωπο σε άνθρωπο (ενδεικτικά, δt = ±0.2 sec).
- η πειραματική διάταξη μπορεί να επηρεαστεί από διακυμάνσεις των περιβαλλοντικών συνθηκών (θερμοκρασίας, πίεσης, υγρασίας, φωτισμού, σύστασης αέρα, αέριων ρευμάτων), της τροφοδοσίας των οργάνων μέτρησης, των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, μηχανικών δονήσεων κ.α. Στην πράξη έχει αποδειχθεί ωστόσο ότι τέτοιου είδους τυχαία σφάλματα μπορούν να ποσοτικοποιηθούν με τη βοήθεια της στατιστικής αφού οι μετρούμενες τιμές κατανέμονται γύρω από τη μέση τιμή, συνήθως με γνωστό τρόπο (*κατανομή Gauss* ή *κανονική κατανομή*) που θα συζητηθεί στη συνέχεια.

Σφάλματα ανάγνωσης μέτρησης σε αναλογικό και ψηφιακό όργανο

Κάθε όργανο μέτρησης αποδίδει την μετρούμενη τιμή σε μια κλίμακα ενδείξεων που είναι *αναλογική* ή *ψηφιακή* π.χ. μια κλίμακα με βελόνα ή ένα ψηφιακό βολτόμετρο αντίστοιχα.
Ο παρατηρητής εισάγει αναπόφευκτα ένα σφάλμα στην εκτίμηση της θέσης της βελόνας επάνω στην αναλογική κλίμακα. Έτσι, εάν η κλίμακα στο αναλογικό βολτόμετρο του Σχήματος 1.3α, έχει βήμα του 1 Volt, η θέση του δείκτη εκτιμάται ότι είναι στο διάστημα μεταξύ 4 και 4.5. Ο παρατηρητής διαιρώντας νοερά την κλίμακα σε 5 μέρη, προσδίδει ακρίβεια 0.2V και την εκτιμά όχι λιγότερο από 4.1 και όχι περισσότερο από 4.3V, επομένως περίπου 4.2 V. Το όριο λοιπόν που επιβάλλει ο παρατηρητής στην ανάγνωση της ένδειξης είναι ±0.1V.

Γενικά, ως σφάλμα ανάγνωσης κλίμακας ορίζεται το μισό της ελάχιστης υποδίαιρεσης της κλίμακας που το όργανο μετρά. Χρειάζεται **προσοχή** και εμπειρία ώστε να μην γίνεται υπερεκτίμηση της ακρίβειας που μπορεί να αποδοθεί μια μέτρηση σε αναλογική κλίμακα.



α.Αναλογική κλίμακα βολτομέτρου. Ο παρατηρητής εκτιμά ότι η ένδειξη είναι 4.2V με σφάλμα ±0.1 V. Η αναμενόμενη τιμή είναι V=(4.2±0.1) V

β. Ψηφιακή κλίμακα βολτομέτρου. Το σφάλμα ανάγνωσης είναι ±0.05 V. Η αναμενόμενη τιμή είναι V=(237.20±0.05) V **ΣΧΗΜΑ 1.3**

Στην περίπτωση που το όργανο μέτρησης είναι ψηφιακό (π.χ. πολύμετρο ή χρονόμετρο), το μέγιστο εκτιμούμενο σφάλμα ανάγνωσης είναι ίσο με το μισό του ελαχίστου βήματος (ακρίβεια κλίμακας) που μπορεί να μετρήσει το όργανο αυτό (Σχήμα 1.3β). Για παράδειγμα, όταν το ψηφιακό όργανο δείχνει:

α) Ακέραιη τιμή με ακρίβεια μονάδας (1) τότε το σφάλμα θα είναι **±0.5** (μονάδα μετρ.)
π.χ. V = 26 *V* και το πολύμετρο μετρά με βήμα 1 *V*, τότε δV = ± 0.5 *V*

β) Δεκαδική τιμή με ακρίβεια δεκάτου (0.1) τότε το σφάλμα θα είναι **±0.05** (μονάδα μέτρ.)
π.χ. V = 237.2 *V* και το πολύμετρο μετρά με βήμα 0.1 *V*, τότε δV = ± 0.05 *V*

Τα τυχαία σφάλματα μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε πιο αποτελεσματικά από ότι τα συστηματικά, **επαναλαμβάνοντας πολλές φορές** τη μέτρηση του μελετούμενου φυσικού μεγέθους. Αποδεικνύεται, ότι κατ' αυτόν τον τρόπο μειώνεται η αβεβαιότητα στην εύρεση της πραγματικής τιμής του μεγέθους. Τα συστηματικά σφάλματα μπορούν να εξαλειφθούν πλήρως *μόνο* όταν είναι γνωστές οι πηγές που τα προκαλούν και η τιμή σφάλματος που εισάγουν σε μια μέτρηση ή όταν το μετρούμενο μέγεθος έχει ήδη μετρηθεί με άλλο όργανο πιστοποιημένης ακρίβειας. Στην καθημερινή πρακτική στο εργαστήριο κάτι τέτοιο δεν ικανοποιείται πλήρως αφού η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή, ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση μετρούμενου και ακριβούς τιμής.

1.5 ΓΙΑΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Τα σφάλματα των μετρήσεων είναι άμεσα συνδεδεμένα με όλα τα μετρητικά συστήματα αλλά και με τον ίδιο τον πειραματιστή. Η σημασία των σφαλμάτων γίνεται άμεσα αντιληπτή στα παρακάτω παραδείγματα:

Σφάλματα στις εμπορικές συναλλαγές:
Αν το μετρητικό σύστημα (π.χ. μέτρο ή ζυγός) έχει μετάθεση μηδενός, τότε αυτός που κάνει τη συναλλαγή μπορεί να κερδίσει ή να χάσει σε είδος αλλά και σε χρήματα.

Σφάλματα στις μικροβιολογικές εξετάσεις:
Για να χαρακτηριστεί κάποιος ως διαβητικός πρέπει το σάκχαρο στο αίμα του να αντιστοιχεί σε τιμές πάνω από 120 (μονάδες). Αν σε κάποιον βρεθεί ότι έχει 110 (μονάδες) με σφάλμα μέτρησης ±20 (μονάδες) τότε ο γιατρός δεν μπορεί να βγάλει το συμπέρασμα ότι ο πελάτης του είναι διαβητικός ή όχι.

Σφάλματα στις επιστημονικές μετρήσεις:
Είναι **απολύτως** απαραίτητο ο πειραματιστής να προσδιορίζει το σφάλμα στη μέτρηση κάθε φυσικού μεγέθους που εξετάζει. Για παράδειγμα η μέτρηση της θερμοκρασίας βρασμού του νερού (=100°C) μετρήθηκε με ένα θερμόμετρο (103 ± 3)°C και ταυτόχρονα με δεύτερο (99.2 ± 0.5)°C. Η θερμοκρασία βρασμού βρίσκεται στο εύρος τιμών που μετρά το 1° θερμόμετρο, ωστόσο το 2° θερμόμετρο -αν απαλλαγεί από ένδεχόμενη μετάθεση του μηδενός- θα είναι ακριβέστερο και πιό αξιόπιστο.

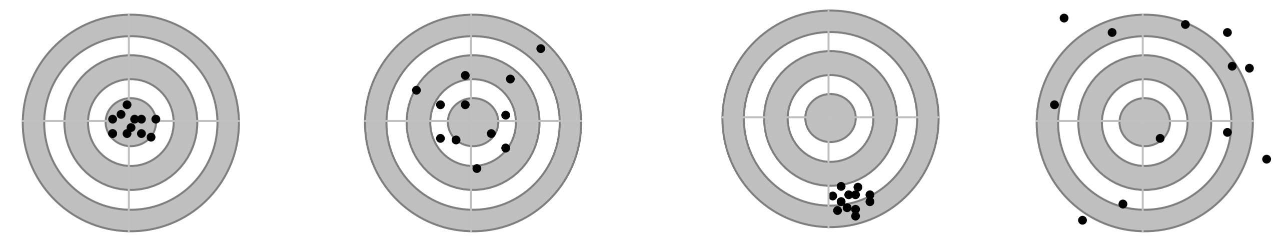
1.6 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Η πειραματική διαδικασία για την εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής ενός φυσικού μεγέθους μπορεί να αξιολογηθεί ως προς την ακρίβεια και την αξιοπιστία της.

«**Ακριβής**» είναι η μέτρηση όταν είναι απαλλαγμένη από συστηματικά σφάλματα. Αυτό προϋποθέτει, ότι ο πειραματιστής μπορεί να εντοπίσει και να εκτιμήσει ποσοτικά τα σφάλματα που εισάγονται εξαιτίας των οργάνων μέτρησης (π.χ. μετάθεση μηδενός), τα τυχόν θεωρητικά σφάλματα (π.χ. προσεγγιστικές σχέσεις) καθώς και τα προσωπικά σφάλματα (π.χ. θέση παρατηρητή).

«Αξιόπιστη» γίνεται η μέτρηση όταν τα τυχαία σφάλματα είναι περιορισμένα στο ελάχιστο. Ο πειραματιστής προετοιμάζει το πείραμα αναγνωρίζοντας τις πηγές τυχαίου σφάλματος («θόρυβος») και είτε τις ελαχιστοποιεί, είτε τις κρατά σε σταθερά επίπεδα (π.χ. θερμοκρασία περιβάλλοντος, υγρασία, φωτισμός, ηλεκτρομαγνητικά πεδία κ.α.). Το μεγάλο πλήθος επαναλήψεων μιας μέτρησης τέλος σε τέτοιες συνθήκες, όπως είδαμε, επιδρά στη μείωση των τυχαίων σφαλμάτων.

Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω ας φανταστούμε έναν στόχο σκοποβολής (ΣΧΗΜΑ 1.4) όπου το κέντρο του παρομοιάζεται με την πραγματική τιμή ενός μετρούμενου φυσικού μεγέθους. Το σύνολο των βολών αντιστοιχούν στις πειραματικές μετρήσεις, και η επιτυχία του σκοπευτή εξαρτάται τόσο από τον ίδιο (παρατηρητής) και από τα μέσα του (πειραματική διάταξη, μέθοδος), όσο και από τις εξωτερικές συνθήκες (τυχαίες πηγές σφάλματος) που επικρατούν στη διάρκεια των βολών.



(α)
Ακριβής=συστ/κά μικρά
Αξιόπιστη =τυχαία μικρά

(β)
Ακριβής=συστ/κά μικρά
Μικρή αξιοπιστία=τυχαία μεγάλα

(γ)
Μικρή ακρίβεια=συστ/κά μεγάλα
Αξιόπιστη=τυχαία μικρά

(δ)
Μικρή ακρίβεια
Μικρή αξιοπιστία
Σφαλματα μεγάλα

ΣΧΗΜΑ. 1.4. Η ακρίβεια εκφράζεται από το πόσο κοντά στο στόχο είναι οι βολές-«μετρήσεις», ενώ η αξιοπιστία από το πόσο συγκεντρωμένες είναι αυτές.

Έτσι, από την κατανομή των βολών-μετρήσεων επάνω στον στόχο, η πειραματική διαδικασία για τη μέτρηση της αναμενόμενης τιμής ενός φυσικού μεγέθους μπορεί να αξιολογηθεί ως εξής:

α. Ακριβής και Αξιόπιστη Μέτρηση
Μια μέτρηση χαρακτηρίζεται ως **ακριβής και αξιόπιστη** μόνο όταν αυτή είναι απαλλαγμένη από συστηματικά σφάλματα και επιπλέον, τα τυχαία σφάλματα είναι περιορισμένα στο ελάχιστο. Στο σχήμα (α), οι βολές-«μετρήσεις» βρίσκονται στην κεντρική περιοχή του στόχου.

β. Ακριβής Μέτρηση με Μικρή Αξιοπιστία
Η μέτρηση είναι απαλλαγμένη από συστηματικά σφάλματα ενώ τα τυχαία σφάλματα **δεν είναι** περιορισμένα στο ελάχιστο. Στο σχήμα (β), οι βολές-«μετρήσεις» βρίσκονται διεσπαρμένα στην ευρύτερη περιοχή του κέντρου του στόχου.

γ. Αξιόπιστη Μέτρηση με Μικρή Ακρίβεια
Η μέτρηση έχει περιορισμένα στο ελάχιστο τα τυχαία σφάλματα ενώ τα συστηματικά σφάλματα **δεν έχουν** διορθωθεί. Στο σχήμα (γ), οι βολές-«μετρήσεις» είναι μεν συγκεντρωμένα αλλά μακριά από το κέντρο του στόχου.

δ. Μέτρηση με Μικρή Ακρίβεια και Μικρή Αξιοπιστία
Η περίπτωση αυτή είναι και η χειρότερη επειδή ακριβώς η μέτρηση, και συστηματικά σφάλματα έχει αλλά και τα τυχαία σφάλματα δεν είναι περιορισμένα στο ελάχιστο. Στο σχήμα (δ), οι βολές-«μετρήσεις» είναι σχεδόν τυχαία διεσπαρμένες.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα βασικά εργαλεία της στατιστικής που χρησιμοποιούμε ώστε να μπορούμε να εξάγουμε πληροφορία μέσα από ένα πλήθος δεδομένων που προκύπτουν από την πειραματική μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους. Κεντρική σημασία κατέχει η **μέση τιμή** και το **απόλυτο** ή **τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής** (ή απλώς, **σφάλμα μέσης τιμής**), καθώς δίνουν αντίστοιχα την πλησιέστερη τιμή στην «πραγματική» και τα όρια της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζουν την μετρητική μας διαδικασία.

Ακολούθως, αναπτύσσεται η σημαντική θεωρία της διάδοσης σφάλματος, που είναι ο αποδεκτός τρόπος υπολογισμού σφάλματος ενός φυσικού μεγέθους που μετριέται έμμεσα και όχι άμεσα.

1.7 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ – ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ – ΣΦΑΛΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Θα μελετήσουμε τις παραπάνω έννοιες χρησιμοποιώντας παράλληλα ένα παράδειγμα μιας υποθετικής πειραματικής διαδικασίας όπου, ας πούμε, ένας παρατηρητής χρησιμοποιεί ένα μετρητικό σύστημα για τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, π.χ. ένα χρονόμετρο, για τη μέτρηση της περιόδου T ενός εκκρεμούς. Ας θεωρηθεί επίσης, ότι τα συστηματικά σφάλματα έχουν εντοπιστεί και σχεδόν εξαλειφθεί. Επομένως, για να ελαχιστοποιηθεί η συνεισφορά στο σφάλμα από τυχαίους παράγοντες θα πρέπει η μέτρηση της περιόδου *T* να επαναληφθεί αρκετές φορές. Τα αποτελέσματα των 6 επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν είναι (σε sec):

1.22, 1.24, 1.23, 1.21, 1.26, 1.23

Λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των μετρήσεων η καλύτερη εκτίμηση του χρόνου της περίοδου *T* θα είναι η **μέση τιμή** $\overline{T}$.

$$\overline{T} = \frac{1.22+1.24+1.23+1.21+1.26+1.23}{6} = 1.231666667$$

(εννοείται ότι όλα τα μεγέθη στο παραπάνω άθροισμα έχουν τις *ίδιες* μονάδες, sec)

Γενικότερα, όταν πραγματοποιούμε *N* επαναλήψεις μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους x, χρησιμοποιώντας την *ίδια* πειραματική διάταξη και ακολουθώντας την *ίδια* διαδικασία, η καλύτερη εκτίμηση του μεγέθους αυτού είναι η **μέση τιμή**, που υπολογίζεται απλά από τη σχέση[2]:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_N}{N}} \qquad (1.3)$$

Συνεπώς, η μέση τιμή είναι η καλύτερη εκτίμηση του μεγέθους x καθώς προσεγγίζει περισσότερο την πραγματική σε σχέση με τις μεμονωμένες x_i, οι οποίες είναι διεσπαρμένες γύρω από αυτήν την τιμή. Μπορούμε επίσης να ισχυριστούμε ότι όσο πιο πολλές φορές μετρήσουμε το μέγεθος x τόσο η μέση τιμή θα προσεγγίζει περισσότερο την πραγματική τιμή.

---

[2] Το αθροισμα Ν όρων μπορεί να γραφεί ως $\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_i x_i = \sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_N$.Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για ευκολία τον 2^o ή 3^o τρόπο γραφής.

Ένα μέτρο της μέσης απόκλισης των πειραματικών τιμών από τη μέση τιμή, δίνεται μαθηματικά από την **τυπική απόκλιση *σ*** και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{N-1}} = \pm\sqrt{\frac{\left(\overline{x}-x_1\right)^2+\left(\overline{x}-x_2\right)^2+\ldots\left(\overline{x}-x_N\right)^2}{N-1}}} \quad (1.4)$$

Το φυσικό νόημα του μεγέθους αυτού είναι ότι περίπου το 68% (ή πρακτικά τα 2/3) των μετρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\overline{x}-\sigma,\ \overline{x}+\sigma\right)$ ή πιό κομψά $\overline{x}\pm\sigma$. Με άλλα λόγια, η κάθε μια από τις τιμές x_i των μετρήσεων που έχουν γίνει ή πρόκειται να γίνουν, έχει πιθανότητα 68% να βρίσκεται στο παραπάνω διάστημα.

Πίσω στο παράδειγμα μας, η τυπική απόκλιση των μετρήσεων της περιόδου *T* μπορεί να υπολογιστεί αφού κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων και υπολογισμών:

Αύξων αριθμός μέτρησης	*Μετρούμενες τιμές*	*Μέση τιμή*	*Απόκλιση κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή*	*Τετράγωνο της απόκλισης κάθε μέτρησης από τη μέση τιμή*
i	T_i (sec)	$\overline{T}$ (sec)	$\left(\overline{T}-T_i\right)$ (sec)	$\left(\overline{T}-T_i\right)^2$ (sec)^2
1	1.21	1.242857	0.032857	0.00107959
2	1.24		0.002857	0.00000816
3	1.22		0.022857	0.00052245
4	1.27		-0.027143	0.00073673
5	1.26		-0.017143	0.00029388
6	1.24		0.002857	0.00000816
7	1.26		-0.017143	0.00029388

Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης χρειαζόμαστε το άθροισμα της τελευταίας στήλης και εφαρμόζοντας την σχέση (1.4) βρίσκουμε ότι:

$$\sigma = 0.0221467\,\text{sec}$$

Όπως είπαμε, η σημασία της τιμής αυτής είναι ότι τα 2/3 των τιμών των μετρήσεων, βρίσκονται στο διάστημα:

$$\overline{T}\pm\sigma = \left(1.242857\pm 0.0221467\right)\text{sec} \ \text{ ή μεταξύ } \left(1,22071045 \ \text{ως} \ 1,2650038\right)\text{sec}$$

Η τυπική απόκλιση, σχετίζεται άμεσα με το στατιστικό σφάλμα, γνωστό ως **απόλυτο** ή **τυπικό σφάλμα** ή απλώς **σφάλμα της μέσης τιμής,** το οποίο συμβολίζεται με $\delta\overline{x}$ και το οποίο προσδιορίζει το σφάλμα (δηλ. την αβεβαιότητα ως προς τη γνώση[3]) της μέσης τιμής του μετρούμενου μεγέθους x. Το υπολογιστικό στατιστικό αυτό σφάλμα εξαρτάται τόσο από την τυπική απόκλιση σ της κατανομής των μετρήσεων, όσο και από το πλήθος των μετρήσεων και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\delta\overline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{N\cdot\left(N-1\right)}}} \quad (1.5)$$

[3] Η **μέση τιμή** αντιπροσωπεύει το σύνολο μετρήσεων που έχουν παρθεί σε μια πειραματική διαδικασία. Εάν *παρόμοιες* διαδικασίες εκτελεστούν πολλές φορές, τότε θα έχουμε πλέον μια διασπορά **μέσων τιμών.** Η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών συνιστά το μέτρο της «αβεβαιότητας» στη γνώση της μέσης τιμής.

Τελικά, καταλήγουμε στην έκφραση της αναμενόμενης τιμής *A* του μετρούμενου μεγέθους x που θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{A = \bar{x} \pm \delta\bar{x}} \qquad (1.6)$$

Στο παράδειγμά μας, το σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι:

$$\delta\bar{T} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \pm 0.00837066 \text{ sec}$$

Οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της περιόδου είναι:

$$T = \bar{T} \pm \delta\bar{T} = (1.242857 \pm 0.00837066) \text{ sec}$$

Έχει όμως αποδοθεί σωστά το αποτέλεσμα αυτό; Η γραφή δηλαδή αυτή, είναι αντιπροσωπευτική της ακρίβειας της πειραματικής μας διαδικασίας; Η απάντηση είναι γενικά ΟΧΙ.

1.8 ΠΟΣΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΔΙΚΑΙΟΥΜΑΣΤΕ ΣΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΑΣ;

Για παράδειγμα η τιμή $\delta\bar{T} = \pm 0.00860215 \text{ sec}$ του σφάλματος ως αποτέλεσμα μιας αλγεβρικής πράξης είναι σωστή. Αντίθετα, η τιμή αυτή ως μέγεθος που εκφράζει το σφάλμα της μέσης τιμής και κατά συνέπεια **την ακρίβεια της μέτρησης,** είναι λάθος δεδομένου, ότι το πλήθος των ψηφίων του σφάλματος τα οποία πραγματικά έχουν νόημα (και δεν δίνουν άχρηστη και ανούσια πληροφορία), είναι συνήθως λιγότερα από το συνολικό πλήθος ψηφίων του σφάλματος, όπως προκύπτει από την θεωρία της στατιστικής. Το πόσα ψηφία έχουν νόημα εξαρτάται κυρίως από το πλήθος των τιμών που προέκυψαν από την επαναληπτική μέτρηση του μεγέθους.

Συνέπεια του γεγονότος ότι **δεν έχουν όλα τα ψηφία του σφάλματος νόημα**, είναι ότι πλέον, **ούτε όλα τα ψηφία της μέσης τιμής έχουν νόημα**. Φανταστείτε, για παράδειγμα, να λέμε ότι το σφάλμα στη μέτρηση ενός μήκους είναι 10 cm ενώ η μέση τιμή του μήκους είναι 142,4372 cm. Δηλαδή, παρόλο που έχουμε μία αβεβαιότητα 10 cm για τη μέση τιμή, εμείς την γράφουμε με ακρίβεια δεκάκις χιλιοστού, κάτι το οποίο όπως καταλαβαίνουμε δίνει άχρηστη πληροφορία. Πιο λογικό είναι η μέση τιμή να γραφτεί ως εξής: 140 cm. Δηλαδή να πούμε

$$L = (140 \pm 10) \text{ cm}$$

Με ποιά λογική όμως γράψαμε έτσι το αποτέλεσμα και πώς θα γνωρίζουμε κάθε φορά πόσα ψηφία έχουν νόημα τόσο στο σφάλμα όσο και στη μέση τιμή;

Για να μπορέσουμε να δώσουμε την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, απαραίτητο είναι να κάνουμε μία παρένθεση και να μιλήσουμε για τα **σημαντικά ψηφία** ενός αριθμού και τη διαδικασία της **στρογγυλοποίησης**.

1.9 ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Τα ψηφία τα οποία καθορίζουν την αριθμητική τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους και τα οποία προσδιορίζουν την ακρίβεια της μέτρησης ονομάζονται **σημαντικά ψηφία**. Η αρίθμηση των σημαντικών ψηφίων γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά του αριθμού. Συγκεκριμένα:

1. Όλα τα μη μηδενικά ψηφία στην αριθμητική τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι σημαντικά ψηφία.
2. Όλα τα μηδέν που ευρίσκονται μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά ψηφία.
3. Στην περίπτωση που η αριθμητική τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους είναι δεκαδικός αριθμός, τότε όλα τα μηδέν που ευρίσκονται δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο είναι σημαντικά ψηφία.

Αντίθετα:

α. Τα μηδέν που βρίσκονται δεξιά από το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο ακέραιου αριθμού.

β. Τα μηδέν που βρίσκονται αριστερά από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεκαδικού αριθμού δεν είναι σημαντικά ψηφία.

Παραδείγματα *(Τονίζονται τα σημαντικά ψηφία στους αριθμούς των παραδειγμάτων)*

- Αριθμοί που έχουν **ένα** σημαντικό ψηφίο: **5**, **1**0, **2**00, **3**000, 0.000**6**, 0.00**2**, 0.**5**.
- Αριθμοί που έχουν **δυο** σημαντικά ψηφία: 0.00**30**, **2.0**, **35**, **15**00, **25**000.
- Αριθμοί που έχουν **τρία** σημαντικά ψηφία: 0.00**200**, 0.0**508**, **5.00**, **205**, **105**00.
- Ο αριθμός **2**000 έχει **ένα** σημαντικό ψηφίο. Αν ο αριθμός αυτός είχε προκύψει από μέτρηση με ακρίβεια **δύο** σημαντικών ψηφίων, τότε θα γραφόταν: **2.0**x10^3.

1.10 ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για την ορθή έκφραση τόσο του σφάλματος της μέσης τιμής, όσο και αυτής καθεαυτής της μέσης τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους, είναι αναγκαία η στρογγυλοποίηση των τιμών αυτών σε αριθμούς με το απαραίτητο πλήθος σημαντικών ψηφίων. Για το σκοπό αυτό **εντοπίζουμε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει** στη τιμή του μετρούμενου μεγέθους, (η αρίθμηση των σημαντικών ψηφίων γίνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά του αριθμού) το οποίο συμβολίζουμε με α και κάνουμε τους παρακάτω ελέγχους **εξετάζοντας το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο** το οποίο συμβολίζουμε με β:

1. Αν το ψηφίο β είναι μικρότερο του 5 (β<5) τότε,

το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αριθμού που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το α παραμένει το ίδιο και όλα τα επόμενα από αυτό, συμπεριλαμβανομένου και του β, είτε διαγράφονται αν αυτά είναι δεκαδικά, ή αντικαθίστανται με μηδέν (0) αν αυτά είναι στο ακέραιο τμήμα του αριθμού.

π.χ. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 17.24798 και 436476 σε αριθμούς με τρία (3) σημαντικά ψηφία.
Στον δεκαδικό αριθμό -μετρώντας πάντα από αριστερά προς τα δεξιά- το τρίτο σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει είναι το 2 (α=2). Το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο είναι το β=4<5, οπότε το τρίτο σημαντικό ψηφίο παραμένει ως έχει (α=2) και τα δεκαδικά ψηφία 4, 7, 9 και 8 που ακολουθούν διαγράφονται. Σχηματικά γράφουμε :

$$\underline{17.\overset{\alpha}{2}}\,|\,\overset{\beta}{4}798 \longrightarrow 17.2$$

Στη περίπτωση του ακέραιου αριθμού, α=6. Το αμέσως επόμενο σημαντικό ψηφίο είναι το β=4<5, οπότε το τρίτο σημαντικό ψηφίο, μένει ως έχει (α=6) και τα ψηφία 4, 7 και 6 που ακολουθούν αντικαθίστανται με μηδενικά. Σχηματικά γράφουμε :

$$\underline{43\overset{\alpha}{6}}\,|\,\overset{\beta}{4}76 \longrightarrow 436000$$

2. Αν το ψηφίο β είναι μεγαλύτερο του πέντε (β>5) τότε,

το σημαντικό ψηφίο α αυξάνεται κατά μια μονάδα. Τα σημαντικά ψηφία που είναι μετά το α ή διαγράφονται ή αντικαθίστανται με μηδενικά σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση.

π.χ. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0.0206723 και 3236784 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία.

Στον δεκαδικό αριθμό το τρίτο σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει είναι το α=6 και το αμέσως επόμενο είναι το β=7>5, οπότε το α αυξάνεται κατά μια μονάδα και τα ψηφία που ακολουθούν διαγράφονται. Σχηματικά γράφουμε :

$$0.0\underline{20\overset{\alpha}{6}}\Big|\overset{\beta}{7}23 \longrightarrow 0.0207$$

Στον ακέραιο αριθμό το α=3 και το β=6>5 οπότε ο αριθμός α=4 αυξάνεται κατά μια μονάδα:

$$\underline{32\overset{\alpha}{3}}\Big|\overset{\beta}{6}784 \longrightarrow 3240000$$

3. <u>Αν το ψηφίο β=5 τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:</u>

   i. Αν μετά το ψηφίο β (σε οποιαδήποτε θέση) υπάρχει έστω και ένα ψηφίο γ>0, τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 2, δηλαδή ο αριθμός α αυξάνεται κατά μια μονάδα.

π.χ. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0.032450102 και 43250001 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία:

$$0.0\underline{32\overset{a}{4}}\Big|\overset{\beta}{5}\overset{\gamma}{0}102 \longrightarrow 0.0325 \qquad \underline{43\overset{a}{2}}\Big|\overset{\beta}{5}000\overset{\gamma}{1} \longrightarrow 43300000$$

   ii. Αν μετά το ψηφίο β δεν υπάρχει κανένα ψηφίο ή αν υπάρχουν μηδενικά ψηφία, τότε σύμφωνα με το National Institute of Standards and Technology των Η.Π.Α., ισχύει η εξής σύμβαση:

- Αν το ψηφίο α είναι <u>άρτιος</u> αριθμός, τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 1.

π.χ. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0.03235 και 2325 σε αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία:

$$\underline{0.032\overset{a}{2}}\Big|\overset{\beta}{5}000 \longrightarrow 0.0322 \qquad \underline{23\overset{a}{2}}\Big|\overset{\beta}{5} \longrightarrow 2320$$

- Αν το ψηφίο α είναι <u>περιττός</u> αριθμός, τότε ισχύει εξ ολοκλήρου η περίπτωση 2.

π.χ. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 0.02335, 3235000 σε αριθμούς με τρία σημαντικά ψηφία:

$$\underline{0.023\overset{a}{3}}\Big|\overset{\beta}{5} \longrightarrow 0.0234 \qquad \underline{32\overset{a}{3}}\Big|\overset{\beta}{5}000 \longrightarrow 3240000$$

1.11 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Η στρογγυλοποίηση θα γίνει στο αποτέλεσμα που προκύπτει από την αλγεβρική πράξη των αριθμών όπως έχουν αυτοί προκύψει από τις μετρήσεις. Ας δούμε τι ισχύει σε κάθε περίπτωση:

1. Πρόσθεση και Αφαίρεση

Το αποτέλεσμα από τις πράξεις αυτές στρογγυλοποιείται σε αριθμό του οποίου το πλήθος των **δεκαδικών ψηφίων** είναι ίσο με το πλήθος των δεκαδικών του αριθμού με τη μικρότερη ακρίβεια. Για παράδειγμα, στην παρακάτω πράξη ο αριθμός 10.8 έχει τη μικρότερη ακρίβεια αφού έχει μόνο 1 δεκαδικό αριθμό. Οπότε :

$$3.72 - 10.\overset{\downarrow}{8} + 15.265 = \underline{8.\overset{\alpha}{1}}\Big|\overset{\beta}{8}5 = 8.2$$

2. Γινόμενο και Διαίρεση

Το αποτέλεσμα από τις πράξεις αυτές στρογγυλοποιείται σε αριθμό του οποίου το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων** είναι ίσο με το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων** του αριθμού με τα λιγότερα **σημαντικά ψηφία**. Για παράδειγμα το 1.2 στην ακόλουθη πράξη έχει 2 σημαντικά ψηφία:

$$\frac{134\times 235.7\times 28.9}{1.2}=\underline{\overset{\alpha}{7\,6}}\Big|\overset{\beta}{0}\,643.1833=760000$$

! Να σημειωθεί ότι οι παράγοντες που δεν είναι μετρούμενα μεγέθη αλλά απλοί αλγεβρικοί συντελεστές δεν λαμβάνονται υπόψη στην στρογγυλοποίηση. Για παράδειγμα, στο εμβαδό τριγώνου με βάση β=12.3m και ύψος υ=5.8m είναι (σε m^2), ο συντελεστής 2 στον παρανομαστή δεν συμμετέχει στον καθορισμό των σημαντικών ψηφίων:

$$E=\frac{\beta\times\upsilon}{2}=\frac{12.3\times 5.8}{2}=\underline{\overset{\alpha}{3\,5}}\Big|\overset{\beta}{.6}\,7=36 \quad (\text{σε m}^2)$$

3. Δύναμη – Ρίζα, Λογάριθμος και Τριγωνομετρικός Αριθμός

Το αποτέλεσμα από τις πράξεις αυτές στρογγυλοποιείται σε αριθμό του οποίου το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων** είναι ίσο με το πλήθος των **σημαντικών ψηφίων** του αρχικού αριθμού (επιβεβαιώστε). Για παράδειγμα:

$1.6^4 = 6.6$ (το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα είναι 6.5536)

$\sqrt[3]{12.3} = 2.31$ (το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα είναι 2.3083502)

$\ln(7.24) = 1.98$ (το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα είναι 1.9796212)

$\sin(0.87^o) = 0.76$ (το ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα είναι 0.7643289)

1.12 ΓΡΑΦΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε τους κανόνες που πρέπει να ακολουθούμε έτσι ώστε να δίνουμε την τελική σωστή μορφή, σε σχέση με την ακρίβεια του πειράματος μας, της μέσης τιμής και του σφάλματος της.

Όταν ακολουθούμε τη διαδικασία όπως αυτή αναφέρεται στην παράγραφο με τίτλο **Μέση τιμή - τυπική απόκλιση - σφάλμα της μέσης τιμής** (σελίδα 1-8) και στο Παράρτημα 1, **ποτέ δε στρογγυλοποιούμε** τη μέση τιμή κατά τη διάρκεια των υπολογισμών του τυπικού σφάλματος. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα. Η στρογγυλοποίηση της μέσης τιμής είναι πάντοτε το τελευταίο βήμα και πραγματοποιείται μόνο αφότου γνωρίζουμε το σφάλμα. Στο πρακτικό πρόβλημα που μπορεί να προκύψει αν η μέση τιμή έχει πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία, τότε καλό είναι να κρατάμε όσα περισσότερα σημαντικά ψηφία είναι δυνατόν. Παρόλα αυτά, αν κάποιος μπορεί να μαντέψει την ακρίβεια του σφάλματος, τότε συνήθως αρκεί να κρατήσει για τη μέση τιμή **ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο** από όσα θα μείνουν στο τέλος.

1. Αν το συνολικό πλήθος των μετρήσεων είναι από 5 έως 20, τότε το (απόλυτο ή τυπικό ή απλά) σφάλμα της μέσης τιμής θα γράφεται **με ένα σημαντικό ψηφίο**. Με άλλα λόγια, η προκύπτουσα τιμή του σφάλματος **στρογγυλοποιείται** στον πλησιέστερο αριθμό με **ένα** μη μηδενικό ψηφίο. Στο παράδειγμά μας, αφού η μέση τιμή έχει προκύψει από N=5 μετρήσεις, τότε το σφάλμα της μέσης τιμής γράφεται:

$$\delta\overline{T}=\pm\underline{0.00\overset{\alpha}{8}}\Big|\overset{\beta}{3}\,7066\text{ sec}=\pm 0.008\text{ sec}$$

2. Τέλος, η μέση τιμή του μετρούμενου μεγέθους στρογγυλοποιείται στο ψηφίο το οποίο είναι **ίδιας τάξης μεγέθους** με το τελευταίο (δεύτερο όταν υπάρχει) σημαντικό ψηφίο του σφάλματος. Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη τιμή T της περιόδου του εκκρεμούς του παραδείγματός μας, μαζί με το σφάλμα της, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{T} = \underline{1.24\overset{\alpha}{2}}\big|\overset{\beta}{8}57 \text{ sec} = 1.243 \text{ sec}$$

Η ορθή γραφή της αναμενόμενης τιμής της περιόδου εκκρεμούς στο παράδειγμα είναι:

$$\boxed{T = \bar{T} \pm \delta\bar{T} = \left(1.243 \pm 0.008\right)\text{sec}}$$

3. Να σημειωθεί ότι αν το πλήθος των μετρήσεων είναι από 21 έως 100, τότε το σφάλμα της μέσης τιμής θα γράφεται **με δυο σημαντικά ψηφία.** Δηλαδή, η προκύπτουσα τιμή του σφάλματος θα **στρογγυλοποιείται** στον πλησιέστερο αριθμό με δυο μη μηδενικά ψηφία:

$$\delta\bar{T} = \pm\underline{0.008\overset{\alpha}{3}}\big|\overset{\beta}{7}066 \text{ sec} = \pm 0.0084 \text{ sec}$$

Παραδείγματα στρογγυλοποιήσεων τελικών αποτελεσμάτων

Ακολουθώντας την μεθοδολογία που μόλις περιγράψαμε, θα αποδώσουμε ορθά τα τελικά αποτελέσματα πειραμάτων λαμβάνοντας υπόψη ότι έχουν γίνει N επαναλήψεις. Πρώτα στρογγυλοποιούμε το σφάλμα σε 1 ή 2 σημαντικά ψηφία (σύμφωνα με το N) και ακολούθως τη μέση τιμή ώστε να έχει την ίδια ακρίβεια με το σφάλμα. <u>Πότε δεν πάμε ανάποδα</u>!

Ας δούμε τα παρακάτω παραδείγματα σφάλματος και μέσης τιμής: γράφουμε την τιμή του σφάλματος και ακριβώς από κάτω τη μέση τιμή, έτσι ώστε οι αριθμοί να έχουν στοιχισμένα τα ψηφία τους, δηλαδή οι μονάδες (δεκάδες, εκατοντάδες…) κάτω από τις μονάδες (δεκάδες, εκατοντάδες…), ή τα δέκατα (εκατοστά, χιλιοστά…) κάτω από δέκατα (εκατοστά, χιλιοστά…) εαν υπάρχει υποδιαστολή. Ακολούθως, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα σε 1 ή 2 σημαντικά ψηφία εάν οι μετρήσεις είναι N<20 ή 21<N<100 αντίστοιχα:

1ο παράδειγμα : *«μέτρηση χωρητικότητας πυκνωτή» - αριθμός επαναλήψεων N=15*

Το σφάλμα με 1 ΣΨ

$$\delta\bar{C} = \pm 37\mu F = \pm\underline{\overset{\alpha}{3}}\big|\overset{\beta}{7}\,\mu F = \pm 40\mu F$$

$$\bar{C} = 2586\mu F = \underline{25\overset{\alpha}{8}}\big|\overset{\beta}{6}\,\mu F = 2590\mu F$$

$$\bar{C} \pm \delta\bar{C} = \left(2590 \pm 40\right)\mu F$$

2ο παράδειγμα : *«μέτρηση μήκους» - αριθμός επαναλήψεων N=30*

Το σφάλμα με 2 ΣΨ

$$\delta\bar{x} = \pm 0.2431\, m = \pm\underline{0.2\overset{\alpha}{4}}\big|\overset{\beta}{3}1\; m = \pm 0.24\; m$$

$$\bar{x} = 13.5496\, m = \underline{13.5\overset{\alpha}{4}}\big|\overset{\beta}{9}6\; m = 13.55\; m$$

$$\bar{x} \pm \delta\bar{x} = \left(13.55 \pm 0.24\right)m$$

Στο 1ο παράδειγμα το σφάλμα στρογγυλοποιήθηκε σε ένα σημαντικό ψηφίο (αφού N<20) και έχει τιμή σε ακρίβεια δεκάδων (**4**0). Επομένως, η μέση τιμή θα στρογγυλοποιηθεί ώστε να έχει επίσης, ακρίβεια δεκάδων (25**9**0).
Στο 2ο παράδειγμα το σφάλμα στρογγυλοποιήθηκε σε δύο σημαντικά ψηφία (αφού 21<N<100) και έχει τιμή σε ακρίβεια εκατοστού (0.2**4**). Επομένως, η μέση τιμή θα στρογγυλοποιηθεί ώστε να έχει επίσης, ακρίβεια εκατοστού (13.5**5**).

Στο Παράρτημα 1, παρουσιάζεται ένα πλήρες παράδειγμα στατιστικής επεξεργασίας πειραματικών μετρήσεων. **Συμβουλευτείτε το απαραίτητα!**

1.13 ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Το σφάλμα της μέσης τιμής από μόνο του δεν δίνει καμιά πληροφορία για την ακρίβεια αυτής. Για παράδειγμα, εαν μια απόσταση μετρηθεί ίση με 200 m με σφάλμα ±5 cm, τότε η ακρίβεια της μέτρησης είναι πολύ μεγάλη. Εάν το ίδιο σφάλμα αποδοθεί όμως μετρώντας απόσταση μήκους 20 cm, καταλαβαίνουμε ότι η αβεβαιότητα στην μέση τιμή είναι πολύ μεγάλη και η μέτρηση επισφαλής. Η πληροφορία για την **αξιοπιστία της μέτρησης** (=επαναληψιμότητα μετρήσεων) προκύπτει έμμεσα από τη σύγκριση του σφάλματος με τη μέση τιμή, και ορίζεται ως ο επι τοις εκατό (%) λόγος του σφάλματος προς τη μέση τιμή :

$$\boxed{\text{σχετικό σφάλμα (\%)} = \frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\cdot 100\%} \tag{1.9}$$

Η αναμενόμενη τιμή A του μετρούμενου μεγέθους μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$A = \overline{x} \pm \frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\cdot 100\%$$

Στη περίπτωση του παραδείγματος της παραγράφου 1.2.2.3, το σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής της περιόδου T του εκκρεμούς θα είναι:

$$\frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\times 100\% = \frac{0.008\,\text{sec}}{1.243\,\text{sec}}\times 100\% = 0.643604\% = 0.6\%$$

η αναμενόμενη τιμή T της περιόδου θα δίνεται από τη σχέση:

$$T = \overline{T} \pm \frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\cdot 100\% = 1.243\ \text{sec} \pm 0.6\%$$

Δηλαδή, το λάθος ως προς την εκτίμηση της μέσης τιμής είναι της τάξης του 0.6% (εξαιρετικό, αλλά οι μέτρησεις ήταν πολύ λίγες!). Δεν υπάρχει σαφές όριο αποδεκτής αξιοπιστίας στην πειραματική μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους στο εργαστήριο, καθώς εξαρτάται από τις απαιτήσεις του πειραματιστή. Ωστόσο, στα πλαίσια του εργαστηρίου μας, θα χαρακτηρίζαμε μια μέτρηση αποδεκτή εάν το σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο από 10 %. Μετρήση με σχετικό σφάλμα ως 1 % θα χαρακτηριζόταν *εξαιρετικής αξιοπιστίας*, ενώ σφάλμα πάνω από 10 % συνιστά *χονδροειδή εκτίμηση* και είναι αναγκαίο η συνολική διαδικασία μέτρησης να επανελέγχεται: σταθεροποίηση εξωτερικών συνθηκών πειράματος, βελτίωση πειραματικής διαδικασίας, έλεγχος οργάνων μέτρησης, εγρήγορση παρατηρητή.

Στο σημείο αυτό οφείλουμε να συμπληρώσουμε τη συζήτηση αναφορικά με την αξιολόγηση της πειραματικής διαδικασίας. Για να συγκρίνουμε την πειραματική τιμή $\overline{x}$ ενός φυσικού μεγέθους, με την τιμή που είναι καθιερωμένη στη διεθνή βιβλιογραφία (π.χ. το φορτίο του ηλεκτρονίου, η σταθερά του Plank) ή είναι μια θεωρητική πρόβλεψη που χρήζει πειραματικής επιβεβαίωσης ή είναι ιδιότητα μετρημένη με όργανα ακριβείας (π.χ. η επιτάχυνση της βαρύτητας στην Αθήνα, το μήκος κύματος μιας συσκευής Laser), τότε ορίζουμε το μέγεθος της **σχετικής απόκλισης από τη 'γνωστή' τιμή** (π.χ. βιβλιογραφική, θεωρητική, εργοστασιακή κλπ) ως εξής:

$$\boxed{\text{σχετική απόκλιση (\%) από γνωστή τιμή} = \left|\frac{\Delta x}{x_{\text{γνωστό}}}\right|\cdot 100\% = \left|\frac{x_{\text{γνωστό}} - x_{\text{πειραματικό}}}{x_{\text{γνωστό}}}\right|\cdot 100\%} \tag{1.10}$$

Σχετική απόκλιση **μικρότερη από 10%** - στα πλαίσια των πειραμάτων του εργαστηρίου μας- χαρακτηρίζει το πείραμα **ακριβές**.

1.14 ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ – ΣΦΑΛΜΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Είναι γνωστό ότι μόνο λίγα φυσικά μεγέθη μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα, π.χ. το χρόνο, το μήκος, τη μάζα, την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος κλπ. Για τα φυσικά αυτά μεγέθη έχουν νόημα οι πολλαπλές μετρήσεις, η μέση τιμή και το απόλυτο τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής. Στη παρούσα παράγραφο, θα εξετάσουμε την περίπτωση που θέλουμε να μετρήσουμε ένα παράγωγο μέγεθος, π.χ. ταχύτητα, επιτάχυνση κλπ, του οποίου η τιμή προκύπτει με τη βοήθεια κάποιας μαθηματικής σχέσης (έμμεση μέτρηση). Στην περίπτωση αυτή, για το ζητούμενο παράγωγο φυσικό μέγεθος u, το οποίο εξαρτάται από τα φυσικά μεγέθη $x, y, z,\dots$ σύμφωνα με τη σχέση $u=f(x,y,z,\dots)$, θα ισχύουν τα παρακάτω:

1. Αν $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, … είναι οι μέσες τιμές των παραμέτρων $x, y, z,\dots$ τότε, η μέση τιμή του παράγωγου μεγέθους u θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{u} = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots) \qquad (1.7)$$

2. Το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής του μεγέθους u θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\bar{u} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\bar{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta\bar{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\delta\bar{z}\right)^2 + \dots} \qquad (1.8)$$

όπου

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{du}{dx}\right]_{y=\bar{y},z=\bar{z},\dots}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{du}{dy}\right]_{x=\bar{x},z=\bar{z},\dots}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left[\frac{du}{dz}\right]_{x=\bar{x},y=\bar{y},\dots}$$

είναι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u = f(x,y,z,\dots)$ ως προς $x, y, z, \dots$

Παράδειγμα: Κινητό κινείται με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση έτσι ώστε σε χρονικό διάστημα $t = 12.3$ sec διανύει διάστημα $S = 32.5$ m. Ο χρόνος και το διάστημα μετρήθηκαν με σφάλμα $\delta t = 0.5$ sec και $\delta S = 0.2$ m. Να υπολογισθεί το απόλυτο σφάλμα της επιτάχυνσης α του κινητού.

Τα δεδομένα είναι: $t = (12.3 \pm 0.5)\sec$ και $S = (32.5 \pm 0.2)m$

Εξίσωση κινηματικής: $S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2} \Rightarrow a = \frac{2\times 32.5}{12.3^2}\frac{m}{s^2} = 0.4296384\frac{m}{s^2}$ (1.8α)

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial a}{\partial S} = \frac{2}{t^2}$ και $\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{4S}{t^3}$ (1.8β)

Από τις ΣΧΕΣΕΙΣ (1.8β) και από τα δεδομένα του παραδείγματος προκύπτει ότι:

$\frac{\partial a}{\partial S} = 0.0132\sec^{-2}$ και $\frac{\partial a}{\partial t} = -0.0699\frac{m}{\sec^2}$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.13) υπολογίζουμε το σφάλμα της επιτάχυνσης:

$$\delta a = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial S}\delta\bar{S}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\delta\bar{t}\right)^2} = \pm\sqrt{(0.0132\cdot 0.2)^2 + (-0.0699\cdot 0.5)^2}\frac{m}{\sec^2} = 0.0350495\frac{m}{\sec^2}$$

Επειδή όμως οι όροι της υπόρριζης ποσότητας δίνουν από 1 σημαντικό ψηφίο, το σφάλμα της επιτάχυνσης θα γραφεί με 1 σημαντικό ψηφίο (επιβεβαιώστε το), $\delta a = 0.04\frac{m}{\sec^2}$.

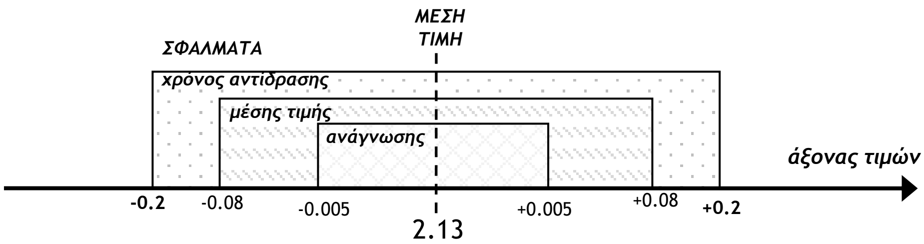
Τελικά: $$\boxed{a = (0.43 \pm 0.04)\frac{m}{\sec^2}}$$

1.15 ΣΥΜΨΗΦΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Σε ένα πείραμα εντοπίζουμε και ποσοτικοποιούμε όσο καλύτερα μπορούμε τις διάφορες πηγές σφάλματος συστηματικού/τυχαίου στη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους. Το τελικό σφάλμα που θα συνοδεύσει τη μέση τιμή του μεγέθους θα κριθεί από το μέγιστο όλων, ώστε να μην γίνεται υπερκτίμηση των δυνατοτήτων της πειραματικής διαδικασίας.
Για παράδειγμα η μέση τιμή στη μέτρηση του χρόνου ενός γεγονότος με ψηφιακό χρονόμετρο, έπειτα από πολλές επαναλήψεις βρέθηκε 2.13 sec. Το σφάλμα μέσης τιμής είναι $\delta\overline{t} = \pm 0.08\,\mathrm{sec}$, το σφάλμα ανάγνωσης είναι $\delta t_{\text{αναγν.}} = \pm 0.005\,\mathrm{sec}$, ενώ ο παρατηρητής κατά το χειρισμό εισάγει σφάλμα $\delta t_{\text{χρ. αντίδρ.}} = \pm 0.2\,\mathrm{sec}$ (χρόνος αντίδρασης). Συνεπώς, η αβεβαιότητα στη μέτρηση του χρόνου θα είναι ίση με το *μέγιστο* εκτιμούμενο σφάλμα (ΣΧΗΜΑ 1.5):

$$t = \overline{t} \pm \delta\overline{t} = \left(2.1 \pm 0.2\right)\mathrm{sec}$$

Προσοχή! **δεν** γίνεται άθροιση σφαλμάτων σε καμιά περίπτωση.



ΣΧΗΜΑ 1.5. Στον άξονα τιμών απεικονίζονται παραστατικά τα όρια αβεβαιότητας που ορίζουν οι διάφορες πηγές σφάλματος του παραδείγματος, γύρω από τη μέση τιμή. Το μεγαλύτερο από αυτά (χρόνος αντίδρασης) εμπεριέχει και τα μικρότερα (μέσης τιμής και ανάγνωσης), είναι δηλαδή το επικρατέστερο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *An Introduction to Error Analysis*, John R. Taylor (University Science Books, CA, 1992)
2. *Statistical Treatment of Experimental Data*, Hugh D. Young (McGraw Hill, NY, 1962)
3. http://www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η άσκηση είναι θεωρητική.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΗΣ

Η παρούσα άσκηση είναι θεωρητική και ο σπουδαστής θα επεξεργαστεί έτοιμες μετρήσεις. Η επεξεργασία αυτή θα στηρίζεται αποκλειστικά στη θεωρία που έχει ήδη αναπτυχθεί στην παράγραφο 1.2.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Υπολογισμός μέσης τιμής και σφάλματος - στρογγυλοποίηση

1. Καταγράφω σε πίνακα τις τιμές που προκύπτουν κατά την επαναληπτική μέτρηση ενός μεγέθους, π.χ. του μήκους l_i ως ακολούθως:

α/α	l_i (cm)
1	3,2
2	3,6
3	3,0
4	3,1
5	3,2

2. Υπολογίζω τη μέση τιμή και το απόλυτο τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής με τη βοήθεια των σχέσεων $\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{N} l_i}{N}$ και $\delta\bar{l} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{l}-l_i\right)^2}{N\left(N-1\right)}}$ αντίστοιχα, όπου *N* είναι το πλήθος των επαναληπτικών μετρήσεων (σημείωση: στο παράδειγμά μας *N*=5). Προσθέτω στήλες στον πίνακα που θα διευκολύνουν τους υπολογισμούς μου, όπως παρακάτω:

α/α	l_i (cm)	$\bar{l}$ (cm)	$\left(\bar{l}-l_i\right)$ (cm)	$\left(\bar{l}-l_i\right)^2$ (cm)^2
1	3,2	3,22	0,02	0,0004
2	3,6		-0,38	0,1444
3	3,0		0,22	0,0484
4	3,1		0,12	0,0144
5	3,2		0,02	0,0004
			$\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{l}-l_i\right)^2$ = 0,208 cm^2	

Οπότε καταλήγουμε στις τιμές: $\bar{l}$ = 3,22 cm και $\delta\bar{l}$ = 0,10198 cm.

3. Για να γράψω **σωστά** το τελικό αποτέλεσμα στη μορφή: $\bar{l} \pm \delta\bar{l}$ = ……… ώστε να ανταποκρίνεται στην ακρίβεια που μας επέτρεψε η πειραματική διαδικασία, ακολουθώ απαραιτήτως τα παρακάτω βήματα:

i. <u>**Πρώτα** θα στρογγυλοποιήσω το σφάλμα.</u>

— *Πόσες επαναληπτικές μετρήσεις εκτέλεσα;*
— N=5

— *Με πόσα σημαντικά ψηφία λοιπόν γράφω το σφάλμα;*
— Ένα! Αφού έγιναν λιγότερες από 20 επαναλήψεις.

— *Στρογγυλοποιώ το σφάλμα στο ένα σημαντικό ψηφίο, οπότε…*
— $\delta\bar{l}$ = 0,1 cm

ii. **<u>Μετά</u>** <u>στρογγυλοποιώ τη μέση τιμή, στην ακρίβεια που υποδεικνύει το σφάλμα:</u>

Το σφάλμα είναι στρογγυλοποιημένο στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο, άρα το ίδιο κάνω και στη μέση τιμή. Έτσι, η μέση τιμή θα γραφτεί: $\bar{l}$ = 3,2 cm.

iii. **<u>Τέλος</u>**<u>, παρουσιάζω το τελικό αποτέλεσμα ως εξής:</u>

$$\boxed{\bar{l} \pm \delta\bar{l} = (3{,}2 \pm 0{,}1)\ \text{cm}}$$

4. Επιπλέον υπολογίζω το σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής $\frac{\delta\bar{l}}{\bar{l}}$, το οποίο εκφράζεται σε %, επομένως το κλάσμα πολλαπλασιάζεται με το 100, δηλαδή:

$$\frac{\delta\bar{l}}{\bar{l}} = \frac{0{,}1\,\text{cm}}{3{,}2\,\text{cm}} = 0{,}03125 \qquad \frac{\delta\bar{l}}{\bar{l}} \cdot 100\% = 3{,}125\%$$

Το αποτέλεσμα στρογγυλοποιείται ως προς **ένα σημαντικό ψηφίο** (βλ. παρ. 1.2.2.6), άρα τελικά γράφω:

$$\boxed{\bar{l} \pm \frac{\delta\bar{l}}{\bar{l}} \cdot 100\% = 3{,}2\ \text{cm} \pm 3\%}$$

Με παρόμοιο τρόπο γράφουμε (επιβεβαιώστε!) τα τελικά αποτελέσματα στα παραδείγματα του πίνακα:

Φυσικό μέγεθος	**Επαναλήψεις N**	**Μέση τιμή**	**Σφάλμα**	**Τελική μορφή**
Επιτάχυνση, g [m/sec]	15	9.86709	0.56021	$g \pm \delta g$ = (9.9±0.6) m/sec
Ιξώδες, η [Poise]	30	1094.79	15.64	$\eta \pm \delta\eta$ = (1095±16) Poise
Συντελ. Θερμ. Διαστολής, a [K^{-1}]	10	$5.901 \cdot 10^{-5}$	$0.056 \cdot 10^{-5}$	$a \pm \delta a$ = (5.90±0.06) $\cdot 10^{-5}$ K^{-1}

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Να υπολογισθεί το σχετικό σύνθετο σφάλμα τη επιτάχυνσης του κινητού που αναφέρεται στο παράδειγμα της παραγράφου 1.13.

Το απόλυτο σφάλμα της επιτάχυνσης μπορεί να προκύψει και από τον συνδυασμό της σχέσης

$$\delta\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial S}\delta\overline{S}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t\right)^2}$$

με τις ΣΧΕΣΕΙΣ (1.8α) και (1.8β). Συγκεκριμένα:

$$\delta\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\delta\overline{S}\right)^2 + \left(\frac{4\overline{S}}{t^3}\delta t\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{2\overline{S}}{t^2}\frac{\delta\overline{S}}{\overline{S}}\right)^2 + \left(2\frac{2\overline{S}}{t^2}\frac{\delta t}{t}\right)^2} = \pm\sqrt{a^2\left(\frac{\delta\overline{S}}{\overline{S}}\right)^2 + a^2\left(2\frac{\delta t}{t}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\delta a = \pm a\sqrt{\left(\frac{\delta\overline{S}}{\overline{S}}\right)^2 + \left(2\frac{\delta t}{t}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{\delta a}{a} = \pm\sqrt{\left(\frac{\delta\overline{S}}{\overline{S}}\right)^2 + \left(2\frac{\delta t}{t}\right)^2}} \qquad \text{(II.1)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Για τη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g χρησιμοποιήθηκε ένα εκκρεμές μήκους L. Το μήκος L μετρήθηκε μια φορά με ακρίβεια μέτρησης δT. Η μέση τιμή $\overline{T}$ της περιόδου ταλάντωσης του εκκρεμούς υπολογίστηκε με τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής $\delta\overline{T}$. Να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα καθώς και το απόλυτο σφάλμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Από τον τύπο της περιόδου του εκκρεμούς προκύπτει ότι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \qquad \text{(II.2)}$$

Το απόλυτο σφάλμα της παραμέτρου g δίνεται από τη σχέση:

$$\delta g = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}\delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\delta T\right)^2} \qquad \text{(II.3)}$$

όπου

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{2\cdot 4\pi^2 L}{T^3} \qquad \text{(II.4)}$$

Από τις ΣΧΕΣΕΙΣ (II.3) και (II.4) προκύπτει ότι:

$$\delta g = \pm\sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2}\delta L\right)^2 + \left(2\cdot\frac{4\pi^2 L}{\overline{T}^3}\delta\overline{T}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{4\pi^2 L}{\overline{T}^2}\cdot\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{4\pi^2 L}{T^2}\cdot\frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\delta g = \pm\sqrt{g^2\left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + g^2\left(2\frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\right)^2} \quad \Rightarrow \boxed{\delta g = \pm g\sqrt{\left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\right)^2}} \qquad \text{(II.5)}$$

Και το σχετικό σφάλμα θα δίνεται πλέον:

$$\boxed{\frac{\delta g}{g} = \pm\sqrt{\left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\delta\overline{T}}{\overline{T}}\right)^2}} \qquad \text{(II.6)}$$