ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Το αντικείμενο της παρούσας άσκησης είναι οι τεχνικές χάραξης των γραφικών παραστάσεων και η προσέγγιση αυτών με μαθηματικές συναρτήσεις.

Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι να καταστήσει τους σπουδαστές ικανούς να χαράσσουν να μελετούν και να διερευνούν τις γραφικές παραστάσεις και να εξάγουν από αυτές τα απαραίτητα συμπεράσματα.

2.2.1 ΘΕΩΡΙΑ

2.2.2 Ορισμός της Γραφικής Παράστασης.

Από την πειραματική διαδικασία έχει διαπιστωθεί ότι η εμφάνιση, αλλά και η εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου είναι άμεσα συνυφασμένη με την αριθμητική τιμή ορισμένων παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτές αντιστοιχούν σε κάποια από τα θεμελιώδη μεγέθη, π.χ. το μήκος, τη μάζα, τον χρόνο, την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, τη θερμοκρασία και τη φωτοβολία, καθώς και σε ορισμένα από τα παράγωγα μεγέθη, π.χ. τη δύναμη, την ταχύτητα, την επιτάχυνση, την ένταση ενός πεδίου ή ενός κύματος, την πυκνότητα ενός μέσου ή μιας ακτινοβολίας. Όλες αυτές οι παράμετροι μπορούν να ταξινομηθούν σε δυο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν όλα εκείνα τα μεγέθη που έχουν σχέση με τα αίτια που προκαλούν ή συντελούν στην εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου, ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν όλα εκείνα τα μεγέθη που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο εκδηλώνεται ένα φυσικό φαινόμενο. Με άλλα λόγια, τα μεγέθη αυτά περιγράφουν την αιτία και το αιτιατό ή αποτέλεσμα ενός φυσικού φαινομένου. Στον ΠΙΝΑΚΑ 2.1 δίνουμε μερικά φυσικά φαινόμενα μαζί με τις αντίστοιχες παραμέτρους αιτίου και αιτιατού.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ	ΑΙΤΙΟ	ΑΙΤΙΑΤΟ
Ταλάντωση απλού εκκρεμούς	Μήκος εκκρεμούς L Επιτάχυνση βαρύτητας g	Περίοδος T ταλάντωσης εκκρεμούς
Ταλάντωση ελατηρίου	Επιμήκυνση Δx Ελατηρίου Σταθερά ελατηρίου D	Δύναμη επαναφοράς F Περίοδος T ταλάντωσης ελατηρ.
Συντονισμός ηχητικών κυμάτων	Μήκος σωλήνα L Θερμοκρασία θ αέρα	Ιδιοσυχνότητα f_0 ηχητικού σωλήνα
Ελεύθερη πτώση	Ύψος πτώσης h Επιτάχυνση βαρύτητας g	Χρόνος πτώσης t
Θερμική διαστολή μετάλλων	Θερμοκρασία θ	Επιμήκυνση ΔL
Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	Συχνότητα ακτινοβολίας Φωτεινή ροή	Φωτορεύμα I
Ακτινοβολία μέλανος σώματος	Θερμοκρασία θ	Ένταση ακτινοβολίας
Ραδιενέργεια	Πάχος υλικού απορρόφησης	Ένταση ραδιενέργειας
Μαγνητική επαγωγή	Ρυθμός μεταβολής μαγνητικής επαγωγής	Ηλεκτρεγερτική δύναμη E

Σε κάθε φυσικό φαινόμενο υπάρχει μια θεωρητική ή εμπειρική σχέση η οποία συνδέει το αιτιατό, π.χ. το y, με ένα ή περισσότερα αίτια, π.χ. τα x_1, x_2, x_3, . . ., x_N, δηλαδή:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \tag{2.1}$$

Στη ΣΧΕΣΗ (2.1) τα μεγέθη x_1, x_2, x_3, . . ., x_N ονομάζονται **ανεξάρτητες μεταβλητές** επειδή ακριβώς οι τιμές τους καθορίζονται από τον παρατηρητή του φυσικού φαινομένου. Αντίθετα, η παράμετρος y ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** από το γεγονός ότι αυτή εξαρτάται, ή προκύπτει, από τις ανεξάρτητες μεταβλητές διαμέσω μιας αλγεβρικής σχέσης.

Συνήθως, σε ένα πείραμα, ο παρατηρητής ελέγχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, έστω την $x=x_k$, ενώ τις υπόλοιπες μεταβλητές τις θεωρεί ως σταθερές. Στη περίπτωση αυτή, η εξάρτηση της μεταβλητής y από την ανεξάρτητη μεταβλητή x_k θα προκύπτει από τη σχέση:

$$y = f(x_k)\Big|_{(x_1, x_2 \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n) = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} \tag{2.2}$$

Αν ο παρατηρητής γνωρίζει την αλγεβρική σχέση που συνδέει τα μεγέθη x και y, τότε είναι εύκολο να προσδιορίσει θεωρητικά όλους εκείνους τους κανόνες ή τους νόμους που χαρακτηρίζουν το φυσικό φαινόμενο από το οποίο προέκυψε η σχέση y=f(x). Αντίθετα, αν δεν είναι γνωστή η αλγεβρική αυτή σχέση, αλλά πειραματικά είναι δυνατόν ένας παρατηρητής να μετρήσει τις τιμές των παραμέτρων x και y, τότε με απεικόνιση των διατεταγμένων ζευγών (x, y) σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων είναι δυνατόν να προσδιορίσει τόσο την αλγεβρική σχέση y=f(x), όσο και τους νόμους που διέπουν το φυσικό φαινόμενο. Η απεικόνιση αυτή αποτελεί τη **γραφική παράσταση** της συνάρτησης y=f(x). Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση αποτελεί την οπτική παρουσίαση του τρόπου εξάρτησης του αιτιατού από το αίτιο σε ένα φυσικό φαινόμενο.

2.2.3 Η Οργάνωση της Γραφικής Παράστασης.

Για να θεωρηθεί μια γραφική παράσταση επιτυχής πρέπει ο παρατηρητής να επιδείξει ιδιαίτερη προσοχή τόσο στην οργάνωση και τη λήψη των μετρήσεων, όσο και στην τεχνική την οποία θα ακολουθήσει για τη χάραξη αυτής.

2.2.2.1 Οργάνωση και Λήψη Πειραματικών Μετρήσεων.

Πριν ο παρατηρητής αρχίσει το πείραμα πρέπει:

1. Να γνωρίζει ποια μεγέθη θα μεταβάλλονται και ποια μεγέθη θα παραμένουν σταθερά.
2. Να γνωρίζει ποιο από τα μεγέθη θα αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο την εξαρτημένη μεταβλητή.
3. Στην περίπτωση που η μια ή και οι δυο μεταβλητές προκύπτουν από έμμεσες μετρήσεις πρέπει να γνωρίζει τις αντίστοιχες αλγεβρικές σχέσεις για τον υπολογισμό αυτών.
4. Να σχεδιάσει τον κατάλληλο πίνακα μετρήσεων. Στις στήλες του πίνακα αυτού καταχωρούνται όλες οι μετρήσεις που προκύπτουν από το πείραμα. Συνήθως, στο πίνακα υπάρχουν και άλλες στήλες στις οποίες καταχωρούνται τα παράγωγα μεγέθη. Συνήθως στην πρώτη στήλη υπάρχει ο αύξων αριθμός της μέτρησης. Στη δεύτερη στήλη υπάρχουν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και στη τρίτη στήλη οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής.

5. Να γνωρίζει τα όρια μεταβολής της ανεξάρτητης μεταβλητής καθώς και το πλήθος των μετρήσεων που θα πάρει. Το γεγονός αυτό βοηθά τον παρατηρητή να προκαθορίζει τις επί μέρους τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, και το κυριότερο, να ελέγχει τη ποιότητα των μετρήσεων.

2.2.2.2 Η Τεχνική των Γραφικών Παραστάσεων.

Κάθε γραφική παράσταση περιλαμβάνει τους βαθμολογημένους άξονες και τη καμπύλη που προσεγγίζει τις συντεταγμένες των μετρούμενων μεγεθών (x, y). Οι γραφικές παραστάσεις που θα προκύψουν από τα πειράματα των Εργαστηρίων Φυσικής θα γίνονται σε χιλιοστομετρικό χαρτί με βάση τις παρακάτω οδηγίες:

1. Χάραξη των Αξόνων.

Οι άξονες συντεταγμένων είναι κάθετοι μεταξύ τους. Ο οριζόντιος άξονας περιλαμβάνει το πεδίο ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής και ο κατακόρυφος άξονας περιλαμβάνει το πεδίο τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Η θέση του σημείου τομής των δυο αξόνων εξαρτάται από το αν οι τιμές των μεταβλητών είναι θετικές ή αρνητικές. Συγκεκριμένα, το σημείο τομής των αξόνων θα βρίσκεται:

- Στην κάτω αριστερή γωνία του χιλιοστομετρικού χαρτιού μόνο όταν όλες οι τιμές και των δυο μεταβλητών είναι θετικές.
- Στην άνω δεξιά γωνία του χιλιοστομετρικού χαρτιού μόνο όταν όλες οι τιμές και των δυο μεταβλητών είναι αρνητικές.
- Στην άνω αριστερή γωνία του χιλιοστομετρικού χαρτιού εφόσον όλες οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x είναι θετικές και όλες οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y είναι αρνητικές.
- Στη κάτω δεξιά γωνία του χιλιοστομετρικού χαρτιού εφόσον όλες οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x είναι αρνητικές και όλες οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y είναι θετικές.
- Σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του χιλιοστομετρικού χαρτιού εφόσον οι μεταβλητές x και y περιλαμβάνουν θετικές και αρνητικές τιμές.

Στα άκρα των αξόνων αναγράφονται τα σύμβολα των μεταβλητών μαζί με τις αντίστοιχες μονάδες τους.

2. Επιλογή της Κλίμακας.

Αναπόσπαστο κομμάτι των αξόνων μιας γραφικής παράστασης είναι οι αντίστοιχες κλίμακες αυτών. Με τον όρο κλίμακα εννοούμε ουσιαστικά τη βαθμονόμηση ενός άξονα, ή ισοδύναμα, την αντιστοίχηση των εκατοστών του χιλιοστομετρικού χαρτιού σε τιμές της μεταβλητής που αντιπροσωπεύει ο συγκεκριμένος άξονας. Η επιλογή της κλίμακας πρέπει να είναι τέτοια ώστε, το μέγεθος της γραφικής παράστασης να μην είναι ούτε πολύ μεγαλύτερο, αλλά ούτε και πολύ μικρότερο από τη μισή σελίδα του χιλιοστομετρικού χαρτιού. Για το λόγο αυτό προτείνουμε τα παρακάτω:

- **Το μήκος των αξόνων X και Y πάνω στο χιλιοστομετρικό χαρτί πρέπει να είναι της τάξης των 10 cm έως 20 cm.**

- Η βασική υποδιαίρεση του άξονα μπορεί να αντιστοιχεί σε 1 cm ή 2 cm ή 4 cm ή 5 cm. Σε καμιά περίπτωση η βασική αυτή υποδιαίρεση δεν πρέπει να είναι 3 cm ή πολλαπλάσιο του 3 cm.
- Η βασική αυτή υποδιαίρεση, καθώς και τα πολλαπλάσια αυτής, σημειώνονται με μικρή κάθετη γραμμή πάνω στον αντίστοιχο άξονα.
- Η αντιστοίχηση της βασικής αυτής υποδιαίρεσης του άξονα με κάποια τιμή της μεταβλητής που αντιπροσωπεύει ο άξονας εξαρτάται κυρίως από την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της μεταβλητής αυτής. Σε κάθε γραφική παράσταση, η ελάχιστη τιμή της μεταβλητής πρέπει να είναι πλησίον της αρχή του άξονα και η μέγιστη τιμή πλησίον του πέρατος του άξονα. Με άλλα λόγια, τα όρια του άξονα (η αρχή και το πέρας του άξονα) πρέπει να αντιστοιχούν στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή της μεταβλητής. Αν (x_{min}, x_{max}) και (y_{min}, y_{max}) είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της ανεξάρτητης x και της εξαρτημένης y μεταβλητής πάνω στους άξονες X και Y, αντίστοιχα, τότε το 1 cm πάνω στους άξονες αυτούς μπορεί να αντιστοιχηθεί με τη τιμή της μεταβλητής (εκφρασμένης με **ένα μόνο** σημαντικό ψηφίο) που προκύπτει από τις παρακάτω πράξεις:

Άξονας Χ: $x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x}$ όπου $10 \le N_x \le 20$

(2.3)

Άξονας Υ: $y = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y}$ όπου $10 \le N_y \le 20$

- Για την βαθμολόγηση ενός άξονα γραφικής παράστασης απαιτούνται μόνο η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής. Στις ενδιάμεσες υποδιαιρέσεις του άξονα αναγράφονται διακριτές τιμές της μεταβλητής σύμφωνα με την προηγούμενη υπόδειξη. **Σε καμιά περίπτωση οι τιμές των μετρήσεων, που λήφθηκαν για τη γραφική παράσταση, δεν σημειώνονται πάνω στους άξονες.**
- Οι τιμές που αντιστοιχούν σε κάθε υποδιαίρεση του άξονα πρέπει να αναγράφονται με τα λιγότερα ψηφία. Π.χ. αν οι τιμές της κλίμακας ενός άξονα είναι (2000, 4000, 6000, 8000, 10000) τότε αυτές πρέπει να γραφούν (2, 4, 6, 8, 10)x10^3, δηλαδή, στις υποδιαιρέσεις του άξονα θα πρέπει να γράφονται οι τιμές (2, 4, 6, 8, 10) και στην άκρη του άξονα μαζί με τις μονάδες θα πρέπει να αναγράφεται ο πολλαπλασιαστικό παράγοντας (x10^3). Ομοίως, αν στις υποδιαιρέσεις του άξονα αντιστοιχούν οι τιμές (0.0005, 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0025), τότε αυτές πρέπει να αναγραφούν ως εξής: (5, 10, 15, 20, 25)x10^{-4}.

3. Χάραξη της Καμπύλης

Σε όλες τις πειραματικές διαδικασίες κάθε τιμή x_i της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχεί σε μια τιμή y_i της εξαρτημένης μεταβλητής. Έτσι, αν y=f(x) είναι η ζητούμενη γραφική παράσταση, τότε πάνω στο επίπεδο που ορίζουν οι δυο βαθμολογημένοι άξονες, θα τοποθετούνται τα διατεταγμένα ζεύγη (x_i, y_i). Η γραφική παράσταση ολοκληρώνεται πλέον με τη χάραξη **της συνεχούς εκείνης γραμμής** η οποία θα προσεγγίζει καλύτερα τις συντεταγμένες των διατεταγμένων ζευγών (x_i, y_i). Η γραφική παράσταση θα θεωρείται αποδεκτή μόνο όταν:

- Η καμπύλη αξιοποιεί ολόκληρη την επιφάνεια που ορίζουν οι δυο βαθμολογημένοι άξονες, και
- οι συντεταγμένες όλων των διατεταγμένων ζευγών είναι κατανεμημένες συμμετρικά ως προς την καμπύλη.

Στα ΣΧΗΜΑΤΑ 2.1α και 2.1β και οι δυο γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν στις ίδιες μετρήσεις x_i, y_i όπου x_i=t είναι ο χρόνος σε sec και y_i=u είναι η ταχύτητα σε m/sec ενός σωματιδίου που κινείται μέσα σε ένα μη ομογενές πεδίο δυνάμεων.

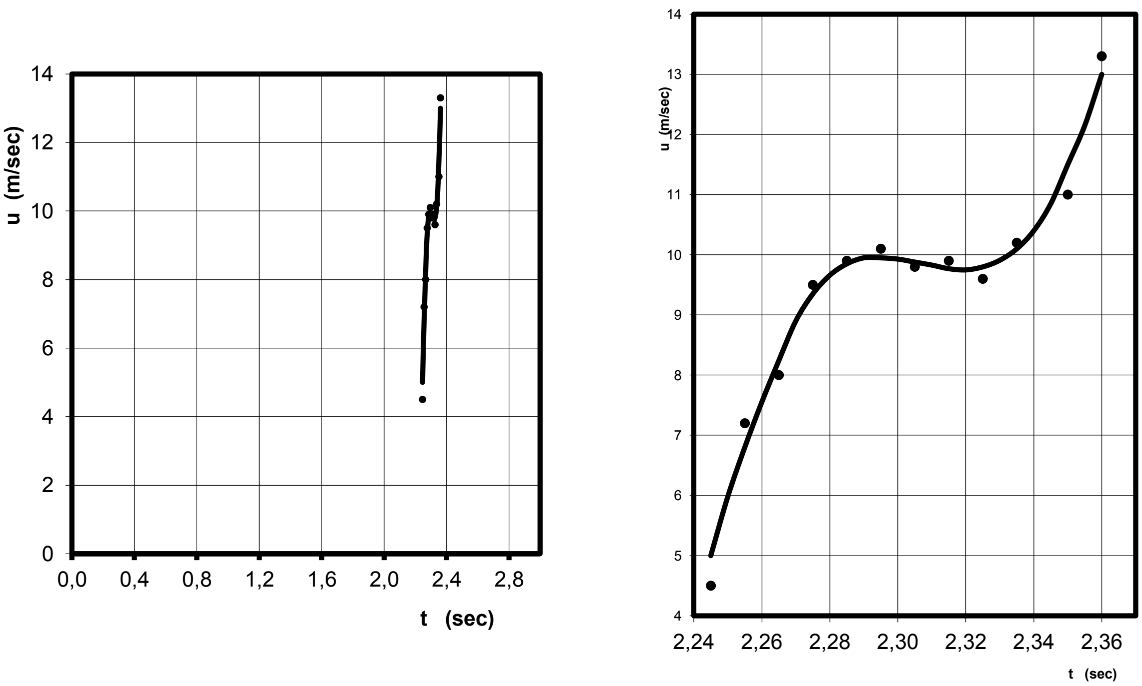
Στη πρώτη γραφική παράσταση:

1. Οι άξονες αρχίζουν από το μηδέν (0) και ως εκ τούτου η καμπύλη δεν αξιοποιεί όλη την επιφάνεια που ορίζουν οι βαθμολογημένοι άξονες.
2. Στον άξονα X το 1 cm αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα 0,4, sec ενώ στον άξονα Y το 1 cm αντιστοιχεί σε ταχύτητα 2 m/sec.

Στη δεύτερη γραφική παράσταση:

1. Οι άξονες έχουν υποστεί μετάθεση μηδενός και ως εκ τούτου η προκύπτουσα καμπύλη αξιοποιεί όλη την επιφάνεια που ορίζουν οι βαθμολογημένοι άξονες.
2. Στον άξονα X το 1 cm αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα 0,02 sec, ενώ στον άξονα Y το 1 cm αντιστοιχεί σε ταχύτητα 1 m/sec.

Η κακή βαθμολόγηση των αξόνων της γραφικής παράσταση 2.1α έχει σαν αποτέλεσμα την απόρριψή της δεδομένου ότι απ' αυτήν δεν μπορούμε να εξάγουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα – συμπεράσματα. Αντίθετα, η γραφική παράσταση 2.1β πληροί τις προϋποθέσεις που ήδη έχουμε αναφέρει και ως εκ τούτου δίνει πολύ περισσότερες πληροφορίες από τη γραφική παράσταση 2.1α.

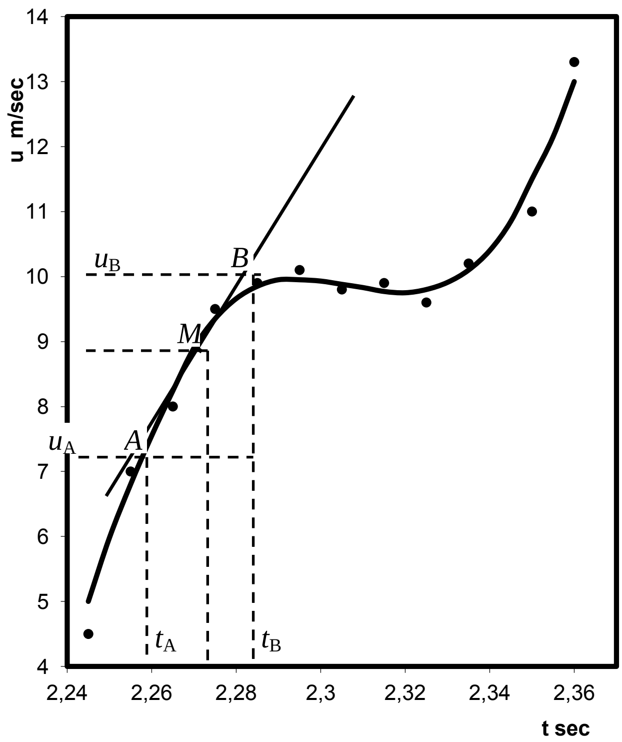


(α) (β)

ΣΧΗΜΑ 2.1

2.2.2.3 Η Έννοια της Κλίσης σε Γραφική Παράσταση.

Η κλίση αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό φυσικό μέγεθος το οποίο προκύπτει από τη γραφική παράσταση των μεταβλητών παραμέτρων ενός φυσικού φαινομένου. Από πλευράς ορισμού, η κλίση εκφράζει τον τρόπο μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής σε μια δεδομένη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής και αναφέρεται σε συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης κάθε γραφικής παράστασης. Συγκεκριμένα, για να βρούμε την κλίση της καμπύλης u=f(t) στο σημείο M=(2.27sec, 8.85m/sec) αυτής, (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.2), ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:



ΣΧΗΜΑ 2.2

1. Από το σημείο M φέρνουμε τη κάθετη στον άξονα x=t και προσδιορίζουμε τη τετμημένη $t=t_M$=2,27 sec αυτού. Η κλίση που θα υπολογίσουμε θα αναφέρεται πλέον στην τιμή αυτή.
2. Χαράσσουμε την εφαπτόμενη της καμπύλης που διέρχεται από το σημείο M.
3. Πάνω στην εφαπτόμενη αυτή ευθεία και, για πρακτικούς λόγους, εκατέρωθεν του σημείου M ορίζουμε δυο σημεία A και B. Για πρακτικούς πάλι λόγους, τα σημεία αυτά πρέπει να επιλέγονται έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε «εύκολα σημεία πάνω στους άξονες».
4. Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (t_A, u_A)= (2.257sec, 7.15m/sec) του σημείου A και (t_B, u_B)=(2.280sec, 10.0m/sec) του σημείου B, από το διάγραμμα.
5. Κλίση k της καμπύλης u=f(t) στο σημείο M=(2.27sec, 8.85m/sec) θα προκύπτει από τις συντεταγμένες των σημείων A και B σύμφωνα με τη σχέση:

$$k = \left.\frac{u_B - u_A}{t_B - t_A}\right|_{t=t_M} = \left.\frac{\Delta u}{\Delta t}\right|_{t=t_M} \qquad (2.4)$$

6. Αν σε μια οποιαδήποτε γραφική παράσταση, η σχέση y=f(x), η οποία συνδέει τις μεταβλητές x και y, είναι γνωστή αλγεβρική σχέση, τότε η κλίση k της αντίστοιχης γραφικής παράστασης στο σημείο $x=x_M$ θα προκύπτει από την παράγωγο της συνάρτησης αυτής στο σημείο $x=x_M$. Συγκεκριμένα:

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_M} \qquad (2.5)$$

   Από τις ΣΧΕΣΕΙΣ (2.4) και (2.5) προκύπτει εύκολα ότι όλες οι συναρτήσεις που η γραφική τους παράσταση είναι ευθεία γραμμή (συναρτήσεις 1ου βαθμού) θα έχουν μια και μοναδική κλίση.

7. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει επίσης ότι, **η κλίση μιας συνάρτησης που συνδέει δυο φυσικά μεγέθη θα είναι πάντοτε ένα φυσικό μέγεθος με διαστάσεις και σε καμιά περίπτωση δεν ταυτίζεται με την εφαπτομένη μιας γωνίας.** Για να γίνει κατανοητό αυτό, δίνουμε τα παρακάτω παραδείγματα:

   - Στο νόμο της ελαστικότητας για το ελατήριο, η δύναμη επαναφοράς F είναι ανάλογη με τη παραμόρφωση Δx του ελατηρίου. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης F=f(Δx) είναι ευθεία γραμμή και η κλίση της εκφράζει τη σταθερά D του ελατηρίου που έχει διαστάσεις Nt/m.
   - Σε μια επιταχυνόμενη κίνηση, η ταχύτητα u ενός κινητού μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση u=f(t) (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.2). Η κλίση k της συνάρτησης αυτής τη χρονική στιγμή t_M=2.27 sec θα δίνει την επιτάχυνση a του κινητού την ίδια χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα:

$$a = k = \left.\frac{u_B - u_A}{t_B - t_B}\right|_{t_M = 2.27sec} = \frac{10{,}0m/sec - 7.15m/sec}{2{,}280sec - 2{,}257sec} = 124\ m/sec^2$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η κλίση σε μια γραφική παράσταση θα ταυτίζεται με την εφαπτομένη μιας γωνίας μόνο στη περίπτωση που και οι δυο άξονες αντιστοιχούν σε μεγέθη με τις ίδιες μονάδες, και επί πλέον, οι άξονες αυτοί έχουν τις ίδιες κλίμακες. Αυτή δεν είναι μια συνήθης περίπτωση στη φυσική.

2.2.2.4 Γραφικές Παραστάσεις Γνωστών Συναρτήσεων

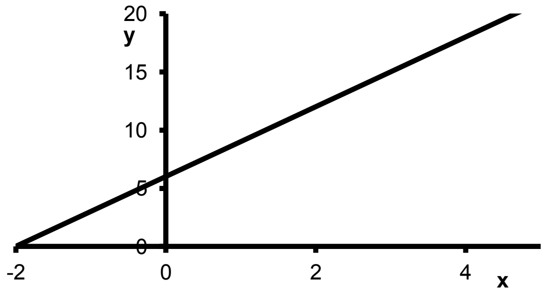
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάζουμε συνοπτικά τους τύπους των πιο συνηθισμένων γραφικών παραστάσεων που συναντά κανείς στη μελέτη όλων σχεδόν των φυσικών φαινομένων. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις αντιστοιχούν σε μια από τις παρακάτω καμπύλες:

1. Ευθεία, ΣΧΗΜΑ 2.3.

Η μαθηματική σχέση y=f(x) που εκφράζει τη γραφική παράσταση της ευθείας είναι:

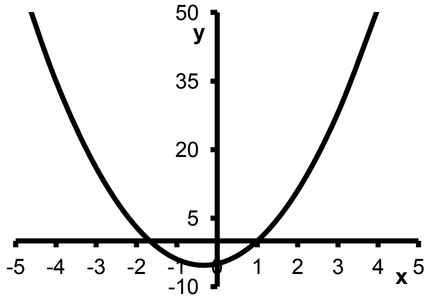
$$y=k\,x+b \tag{2.6}$$

όπου η παράμερος k είναι ίση με τη κλίση της ευθείας και b είναι η τιμή της μεταβλητής y όταν x=0



ΣΧΗΜΑ 2.3

2. Παραβολή, ΣΧΗΜΑ 2.4



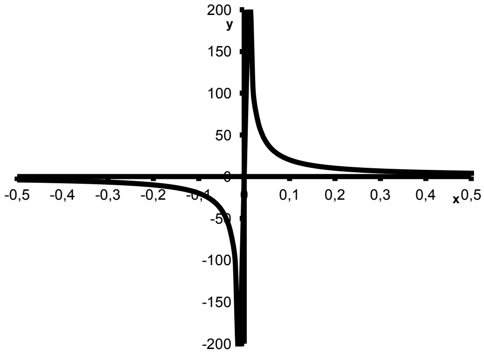
ΣΧΗΜΑ 2.4

Η γενική μαθηματική σχέση που εκφράζει τη γραφική παράσταση της παραβολής είναι της μορφής:

$$y=ax^2+bx+c \tag{2.7}$$

Η θέση της παραβολής στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων b και c.

3. Υπερβολή, ΣΧΗΜΑ 2.5



ΣΧΗΜΑ 2.5

Η εξίσωση της υπερβολής που αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.5 είναι της μορφής:

$$y = \frac{a}{x^n} \tag{2.8}$$

όπου α είναι ένας πραγματικός σταθερός αριθμός και n>0.

4. Εκθετική, ΣΧΗΜΑ 2.6

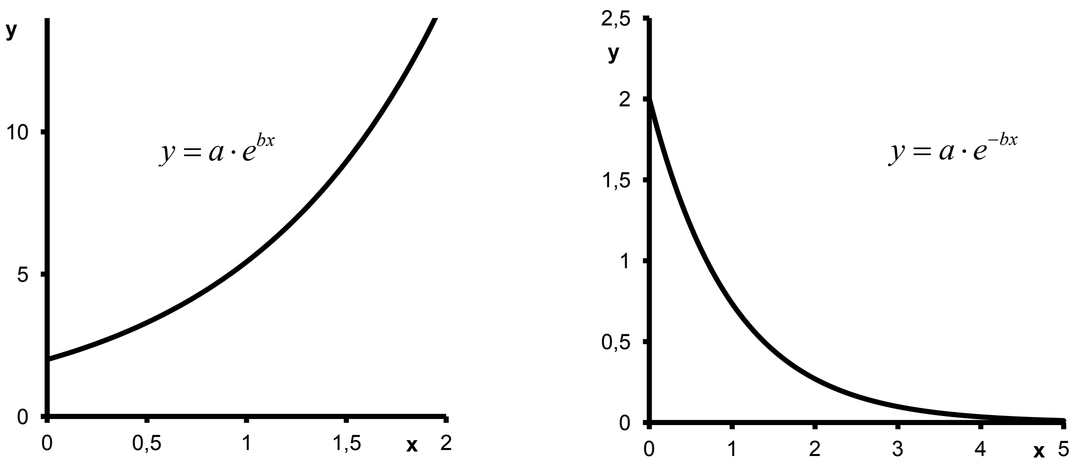
Οι πιο συνηθισμένες εκθετικές συναρτήσεις είναι της μορφής:

$$y = a \cdot e^{bx} \tag{2.9}$$

και

$$y = a \cdot e^{-bx} \tag{2.10}$$

όπου α και b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Από τις δυο αυτές συναρτήσεις, η πρώτη είναι μια αύξουσα εκθετική συνάρτηση (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.6α), ενώ η δεύτερη είναι μια φθίνουσα εκθετική συνάρτηση (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.6β).



(α) (β)

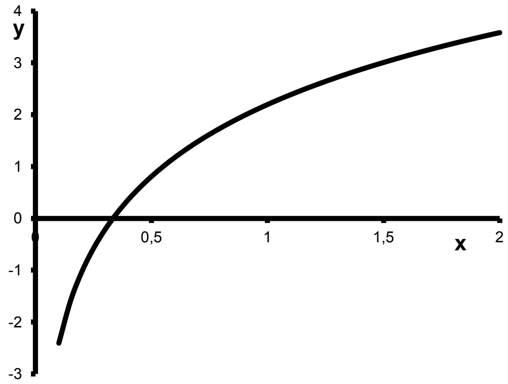
ΣΧΗΜΑ 2.6

5. Λογαριθμική, ΣΧΗΜΑ 2.7

Οι λογαριθμικές καμπύλες (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.6) προέρχονται από συναρτήσεις που είναι αντίστροφες των εκθετικών συναρτήσεων. Η συνάρτηση μιας λογαριθμικής καμπύλης είναι της μορφής:

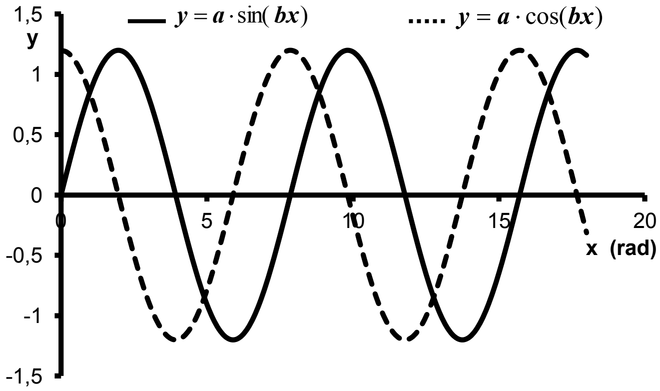
$$y = a \cdot ln(bx) \tag{2.11}$$

όπου α και b είναι πραγματικοί αριθμοί και επί πλέον πρέπει bx>0.



ΣΧΗΜΑ 2.7

6. Ημιτονική και Συνιμητονική, ΣΧΗΜΑ 2.8



ΣΧΗΜΑ 2.8

Η ημιτονική και η συνημιτονική καμπύλη (βλέπε ΣΧΗΜΑ 2.8) προέρχονται από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$y = a \cdot sin(bx)$$

και (2.12)

$$y = a \cdot cos(bx)$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η μεταβλητή bx είναι εκφρασμένη σε ακτίνια (rad) και όχι σε μοίρες.

2.2.3 Προσδιορισμός της Μαθηματικής Σχέσης σε μια Γραφική Παράσταση.

Όλες σχεδόν οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από την πειραματική μελέτη ενός φυσικού φαινομένου δίνουν καμπύλη η οποία ανήκει σε μια από τις κατηγορίες που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Στη παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε τη διαδικασία με την οποία γίνεται ο προσδιορισμός της μαθηματικής εκείνης σχέσης που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη καμπύλη.

2.2.3.1 Προσδιορισμός της Εξίσωσης της Ευθείας

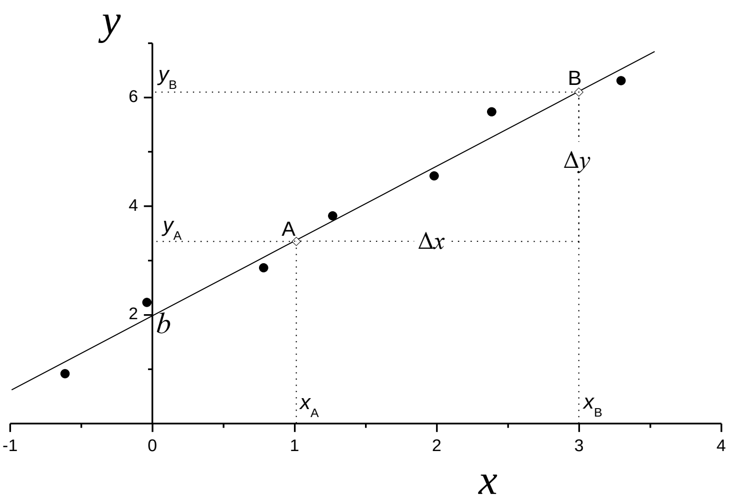
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και στη παράγραφο 2.2.2.2, η γραφική παράσταση ολοκληρώνεται με τη χάραξη της καμπύλης εκείνης που προσεγγίζει καλύτερα τις συντεταγμένες (x_i, y_i). Κατά τη διαδικασία αυτή, ο παρατηρητής εύκολα διαπιστώνει αν οι συντεταγμένες αυτές προσεγγίζονται με ευθεία γραμμή ή όχι. Στην περίπτωση που η προκύπτουσα καμπύλη προσεγγίζεται με *ευθεία γραμμή*, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση της ευθείας αυτής εμπειρικά αλλά και θεωρητικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

α. Εμπειρικός Προσδιορισμός της Εξίσωσης της Ευθείας

Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής:

$$y(x) = k \cdot x + b \qquad (2.13)$$

Απαραίτητη είναι η χάραξη της γραφικής παράστασης με τον τρόπο που περιγράφεται στις οδηγίες της παραγράφου 2.2.2.2. Οι σταθερές k και b προσδιορίζονται πολύ εύκολα πλέον ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:



ΣΧΗΜΑ 2.9

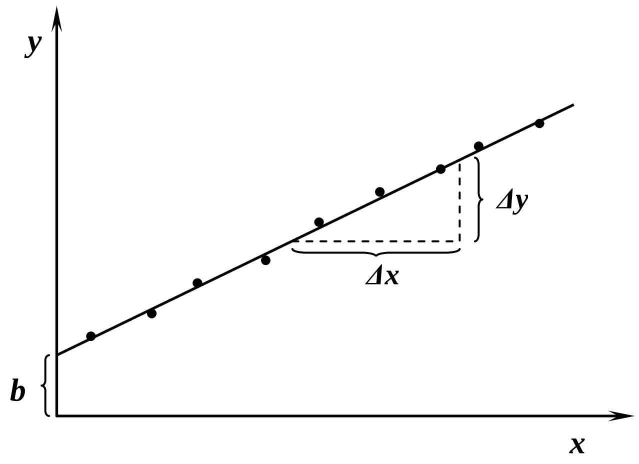
1. Αφού χαράξουμε την –κατ' εκτίμηση- καλύτερη δυνατή ευθεία (ΣΧΗΜΑ 2.9), επιλέγουμε δύο **οποιαδήποτε** τυχαία (όχι κατ'ανάγκη πειραματικά) σημεία Α και Β που ανήκουν στην ευθεία από αριστερά προς τα δεξιά. (ΠΡΟΣΟΧΗ! Να μην γίνεται επιλογή από πειραματικά σημεία, τα οποία **δεν** βρίσκονται στην ευθεία).
2. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων Α(x_A, y_A) και Β(x_B, y_B), με τη βοήθεια του χιλιοστομετρικού χαρτιού.
3. Η κλίση k είναι φυσικό μέγεθος **με μονάδες μέτρησης** και υπολογίζεται από το λόγο:

$$\boxed{k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

4. Τέλος, η τιμή *b* ονομάζεται *τεταγμένη επί την αρχή* αφού ανήκει στο σημείο (0, *b*). Η ευθεία τέμνει εκεί τον άξονα y όταν το *x = 0,* είναι δηλαδή το σημείο *b* = *y*(0*)* και έχει βέβαια τις μονάδες του φυσικού μεγέθους y. Σε περίπτωση όμως, που δεν είναι σχεδιασμένος ο y άξονας ετσι ώστε να διέρχεται από το x=0, τότε η τιμή *b* θα υπολογιστεί αλγεβρικά εφαρμόζοντας επιλύοντας την εξίσωση ευθείας *y* = *k x* + *b* για ένα <u>οποιοδήποτε σημείο</u>, έστω Α (x_A,y_A), επιλέξουμε να βρίσκεται επάνω στην ευθεία.

β. Θεωρητικός Προσδιορισμός της Εξίσωσης της Ευθείας (Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων).

Στη περίπτωση αυτή, η γραφική παράσταση y=f(x) γίνεται για να δούμε αν η καμπύλη που επιλέγουμε να χαράξουμε προσεγγίζει ικανοποιητικά την ευθεία (ΣΧΗΜΑ 2.10).



ΣΧΗΜΑ 2.10

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων της ευθείας (δηλαδή της κλίσης k και της τεταγμένης επί την αρχή b) γίνεται αποκλειστικά και μόνο από τις μετρήσεις x_i και y_i οι οποίες έχουν ληφθεί από το πείραμα και οι οποίες αντιστοιχούν στις μεταβλητές x και y. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος προσδιορισμού των παραμέτρων μιας πειραματικής ευθείας είναι **η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων**. Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο αυτή πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα τετράγωνα x_i^2 των τιμών x_i της μεταβλητής x, τα τετράγωνα y_i^2 των τιμών y_i της μεταβλητής y καθώς και τα γινόμενα x_iy_i. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών αυτών καταχωρούνται σε δυο ανεξάρτητες στήλες που προστίθενται στον πίνακα μετρήσεων τω μεταβλητών x και y, (ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2).

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	x_1y_1
2	x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	x_2y_2
3	x_3	y_3	x_3^2	y_3^2	x_3y_3
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	x_ny_n
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ και $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ τα οποία καταχωρούνται στο ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ .

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, στην εξίσωση της ευθείας:

$$\mathbf{y = k\,x + b} \qquad (2.14)$$

η κλίση k καθώς και η τεταγμένη y=b της ευθείας όταν x=0 δίδονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}} \qquad (2.15) \qquad \text{και} \qquad \boxed{k = \frac{\bar{y}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}} \qquad (2.16)$$

όπου:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Τα αντίστοιχα σφάλματα δk και δb των παραμέτρων k και b θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\delta k = \pm\sqrt{\frac{s_x s_y - s_{xy}^2}{(n-2)s_x^2}} \qquad (2.17) \qquad \text{και} \qquad \delta b = \pm\sqrt{\frac{(s_x s_y - s_{xy}^2)(s_x + n\bar{x}^2)}{n(n-2)\cdot s_x^2}} \qquad (2.18)$$

όπου:

$$s_x = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - n\bar{x}^2$$

$$s_y = \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] - n\bar{y}^2 \qquad (2.19)$$

$$s_{xy} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] - n\bar{x}\,\bar{y}$$

2.2.3.2 Προσδιορισμός της Εξίσωσης Τυχαίας Καμπύλης.

Πολλές φορές κατά την επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων (x,y), είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να τροποποιούμε τα δεδομένα έτσι ώστε να είναι δυνατό να αποκαλυφθεί ο φυσικός νόμος y=*f*(x) που ενδεχομένως υποκρύπτεται. Η διαδικασία αυτή συνίσταται στην **γραμμικοποίηση** των γραφικών παραστάσεων: δηλαδή στη μετατροπή των μεταβλητών (x,y) σε ένα νέο πλήθος μεταβλητών (X,Y) τέτοιο, ώστε η σχεδίαση της γραφικής παράστασης Y=*h*(X) να αναπαριστά εξίσωση ευθείας της μορφής: Y=k·X + b

Εάν αυτή πράγματι αναπαριστά ευθεία τότε, -υπό προυποθέσεις- ο αρχικός φυσικός νόμος επιβεβαιώνεται.

Παράδειγμα - Πείραμα ελεύθερης πτώσης

Σε πείραμα ελεύθερης πτώσης σώματος μετρήθηκε η απόσταση *y* ως συνάρτηση του χρόνου t. Οι τιμές (*t*, *y*) καταγράφηκαν στον πίνακα 2.3. Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι στην ελεύθερη πτώση (ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα), η απόσταση *y* δίνεται:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Τα ερωτήματα που εξετάζουμε στο πείραμα είναι:

α) επιβεβαιώνεται πειραματικά η παραπάνω σχέση;

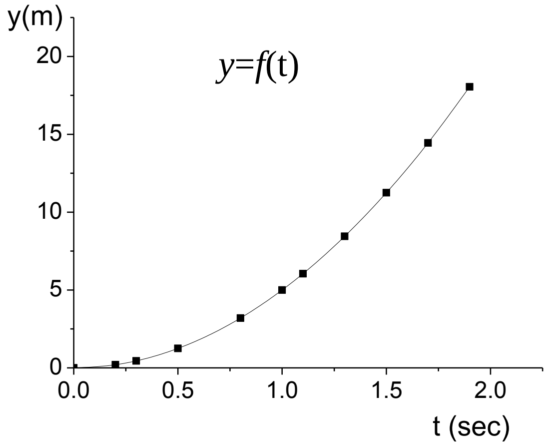
β) μπορεί να υπολογιστεί η επιτάχυνση της βαρύτητας *g*, με γραφικό τρόπο;

Καταρχάς, κατασκευάζουμε στον πίνακα 2.3. τις στήλες t^2, ln$t$ και ln$y$ για λόγους που θα γίνουν προφανείς αργότερα.

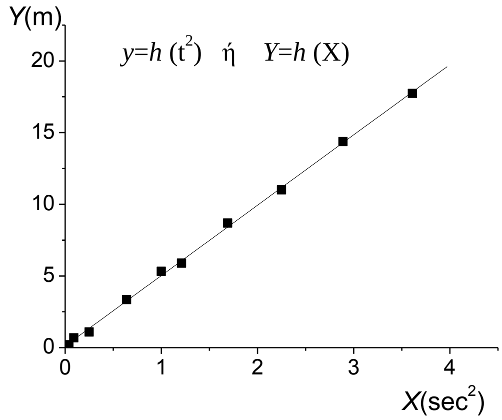
t(sec)	y(m)		t^2 (sec^2)	lnt	lny
0	**0**		0	--	--
0.2	**0.20**		0.04	-1.61	-1.61
0.3	**0.45**		0.09	-1.20	-0.80
0.5	**1.25**		0.25	-0.69	0.22
0.8	**3.2**		0.64	-0.22	1.16
1.0	**5.00**	$\Rightarrow$	1.00	0.00	1.61
1.1	**6.05**		1.21	0.10	1.80
1.3	**8.45**		1.69	0.26	2.13
1.5	**11.25**		2.25	0.41	2.42
1.7	**14.45**		2.89	0.53	2.67
1.9	**18.05**		3.61	0.64	2.89

Σχετικά με το ερώτημα (α), σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *y=f(t)*, παρατηρούμε ότι έχει την αναμενόμενη παραβολική μορφή $y=at^n$, ωστόσο δεν μπορούμε **άμεσα** να απαντήσουμε εάν $n \approx 2$ όπως θα περιμέναμε. Για να ξεπεράσουμε αυτήν την αδυναμία, ακολουθούμε έναν απλό δρόμο με στόχο την *γραμμικοποίηση* της αρχικής εξεταζόμενης συνάρτησης. Αυτό επιτυγχάνεται εάν μετατρέψουμε τα αρχικά μας δεδομένα (t,y) κατάλληλα, σε (X, Y) έτσι ώστε η νέα συνάρτηση *Y=h(X)* να παριστάνεται από ευθεία γραμμή της μορφής δηλαδή: $Y=k{\cdot}X+b$.

Ακολούθως, από τον προσδιορισμό της κλίσης ευθείας *k* και το σημείο τομής *b* της ευθείας με τον άξονα *Y*, εξάγουμε την ακριβή μορφή της συνάρτησης *Y=h(X)* και στη συνέχεια με αντίστροφη πορεία καταλήγουμε στην αρχική ζητούμενη συνάρτηση *y=f(t)*.



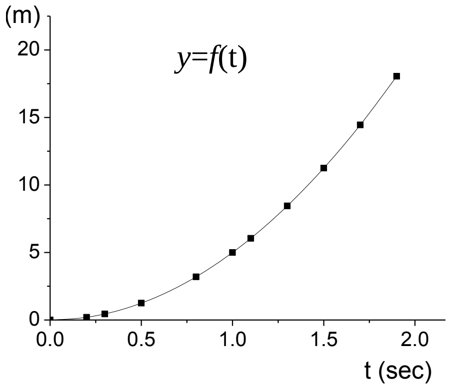
Σχ. 2.11(α)



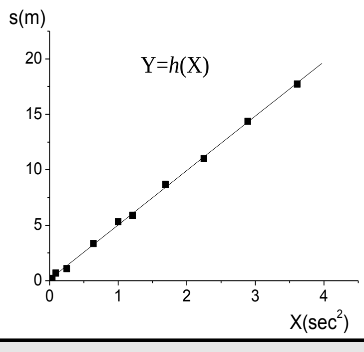
Σχ. 2.11 (β)

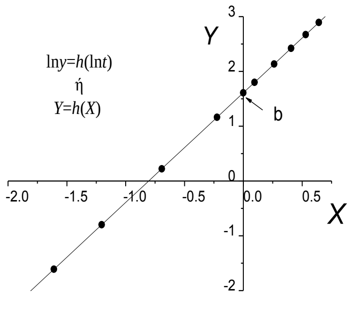
Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η στρατηγική που θα ακολουθούμε ώστε να γραμμικοποιούμε κατάλληλα μια αρχικά δοσμένη ή και υποθετική συνάρτηση.

Επίσης, ένας δεύτερος τρόπος επιβεβαίωσης του φυσικού νόμου είναι από τη σχεδίαση της γραφικής ln$y$=h(ln$t$). Όπως θα φανεί αναλυτικά στο παρακάτω διάγραμμα ροής, ο νόμος επιβεβαιώνεται αφενός μεν εάν η h(ln$t$) είναι ευθεία, αφετέρου δε η κλίση της ευθείας να είναι ≈ 2. Η τεταγμένη επί την αρχή δίνει πληροφορία για την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας *g*.

<table>
<tr><th>Φυσικός νόμος</th><th colspan="2">Ελεύθερη πτώση</th></tr>
<tr><td>Σχέση</td><td colspan="2">$y=\frac{1}{2}gt^2$ όπου t: χρόνος και y: απόσταση και g: επιτάχυνση της βαρύτητας</td></tr>
<tr><td>Πειραματικά δεδομένα</td><td colspan="2">(t, y)</td></tr>
<tr><td>Φυσικό πρόβλημα</td><td colspan="2">1. Επαληθεύεται ο φυσικός νόμος πειραματικά;
2. Πόση είναι πειραματικά η επιτάχυνση της βαρύτητας g;</td></tr>
<tr><td>Σχεδιάζω y=f(t)</td><td colspan="2">


y=f(t), παραβολική συνάρτηση

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΥΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΑΓΩΓΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ</td></tr>
<tr><th>Μεθοδολογία</th><th>1ος τρόπος</th><th>2ος τρόπος</th></tr>
<tr><td>Εκφράζω τη σχέση σε πιο «βολική» μορφή</td><td>$y=\ 0.5g\ \ t^2$</td><td>Λογαριθμίζω και τα δύο μέρη:
$\ln y=\ln\ 0.5gt^2\ =\ln\ 0.5g\ +\ln\ t^2 \Leftrightarrow$
$\ln y=\ln\ 0.5g\ +2\cdot\ln t$</td></tr>
<tr><td>Θέτω</td><td>$X=t^2$, $Y=y$ και $k=0.5g$</td><td>$Y=\ln y$, $X=\ln t$ και $b=\ln\ 0.5g$</td></tr>
<tr><td>Γραμμικοποιημένη σχέση</td><td>$Y=k\cdot X$</td><td>$Y=2\cdot X+b$</td></tr>
<tr><td>Κατασκευάζω δεδομένα</td><td>(X, Y) δηλ. (t 2, Y)</td><td>(X, Y) δηλ. (lnt, lny)</td></tr>
<tr><td>Σχεδιάζω Y=h(X)</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Απάντηση στο 1ο φυσικό πρόβλημα</td><td>Εάν είναι γραμμική τότε επαληθεύεται ο νόμος</td><td>Εάν είναι γραμμική με κλίση όμως $k\approx 2$ τότε επαληθεύεται ο νόμος</td></tr>
<tr><td>Υπολογίζω κλίση</td><td>$k=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$</td><td>$k=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{\Delta \ln s}{\Delta \ln t}$</td></tr>
<tr><td>Απάντηση στο 2ο φυσικό πρόβλημα</td><td>Όμως $k=0.5g \Leftrightarrow g=2\cdot k$</td><td>Εντοπίζω b γραφικά και υπολογίζω το g :
$b=\ln(0.5g)\Rightarrow g=2\cdot e^b$</td></tr>
</table>

Σχ. 2.12. Συνοπτική παρουσίαση των δύο μεθόδων γραμμικοποίησης συναρτήσεων

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε προηγουμένως έχει μεγάλη εφαρμογή σε απλές τουλάχιστον περιπτώσεις που η μαθηματική σχέση που περιγράφει το μελετώμενο φαινόμενο είναι γνωστή. Παραδείγματα γραμμικοποιήσεων τέτοιων συναρτήσεων δίνονται ακολούθως. Για οικονομία παρουσιάζουμε την εφαρμογή της 1ης μεθοδολογίας:

Φυσικός νόμος	**Νόμος Coulomb**	**Ταλάντωση εκκρεμούς**
Σχέση	$F = k\dfrac{Q\cdot q}{r^2}$	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$
Πειραματικά δεδομένα	*(F, r)*	*(T, L)*
Βολική έκφραση	$F = \; k\cdot Q\cdot q \; \dfrac{1}{r^2}$	$L = \dfrac{g}{4\pi^2}T^2$
Γραφική παράσταση	*F=f(r)*, υπερβολική	*L=f(T)*, παραβολή
Θέτω	$a = kQq$ και $X = \dfrac{1}{r^2}$	$a = \dfrac{g}{4\pi^2}$ και $X = T^2$
Γραμμικοποίηση σχέσης	$F = a\cdot X$	$L = a\cdot X$
Κατασκευάζω δεδομένα	*(X, F)* δηλ. $(1/r^2, F)$	*(X, L)* δηλ. (T^2, L)
Σχεδιάζω γραφική	*F=h(X)*	*L=h(X)*
	Εάν είναι γραμμική τότε επιβεβαιώνεται ο νόμος	
Υπολογίζω κλίση *a*	$a = \frac{\Delta F}{\Delta X}$ Περιέχει πληροφορία για *k,Q,q*	$a = \frac{\Delta L}{\Delta X}$ Περιέχει πληροφορία για το *g*

Σχ. 2.23. Δύο ακόμη προβλήματα γραμμικοποίησης φυσικών νόμων

Μπορείτε να μελετήσετε τα παραπάνω προβλήματα και με τη 2η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε αναλυτικά στο παράδειγμα της ελεύθερης πτώσης: λογαριθμίζοντας την αρχική σχέση (στη «βολική» μορφή) καταλήγουμε σε μια νέα αλλά γραμμικοποιημένη σχέση. Κατασκευάζοντας τα «νέα» δεδομένα (*X, Y*), σχεδιάζουμε την *Y=h(X)*. Εάν είναι πράγματι γραμμική η μορφή, και επιπλέον η κλίση έχει τιμή που στα παραδείγματα μας είναι -2 και 2 αντίστοιχα (αποδείξτε το!), ο νόμος επαληθεύεται.

Πηγαίνοντας ένα βήμα βαθύτερα, κατά την πειραματική μελέτη ενός φαινομένου όταν η συνάρτηση y=f(x) των φυσικών μεγεθών x, y δεν μας είναι εκ των προτέρων γνωστή θεωρητικά, θα πρέπει εμείς να την μαντέψουμε επιβεβαιώνοντας βέβαια την υπόθεση μας. Για τον προσδιορισμό της καταλληλότερης εξετάζουμε γνωστές μορφές συναρτήσεων που συναντώνται σε φυσικά φαινόμενα. Για παράδειγμα **νόμους δύναμης (x^n)** ή **εκθετικούς νόμους ($e^{a\cdot x}$)** (π.χ. ραδιενεργές διασπάσεις, εκφόρτιση πυκνωτή κ.α.). Σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι ξεκάθαρο ποιά από τις δύο συναρτησιακές μορφές μπορεί να περιγράψει καλύτερα το φυσικό πρόβλημα γι' αυτό θα πρέπει να δοκιμαστούν και οι δύο.

I) ΝΟΜΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ: $y(x) = b \cdot x^n$

Το σκεπτικό είναι παρόμοιο με αυτό που αναλύσαμε νωρίτερα. Θα πρέπει να ανάγουμε τη συνάρτηση *y(x)* σε μια γραμμική *Y(X)*. Αυτό γίνεται απλά λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της αρχικής συνάρτησης:

$$y(x) = b \cdot x^n \Leftrightarrow \ln y = \ln\ b \cdot x^n \ \Leftrightarrow \ln y = \ln b + \ln x^n \Leftrightarrow \\ \ln y = \ln b + n \cdot \ln x \qquad (2.20)$$

Θέτουμε

$Y = \ln y,\ \ X = \ln x,\ \ B = \ln b$

οπότε η (2.24) ανάγεται σε συνάρτηση 1^{ου} βαθμού (γραμμική):

$Y(X) = B + n \cdot X$

όπου *n* είναι η κλίση της συνάρτησης $Y(X)$ και $B = Y(0)$ είναι δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα *Y*.
Πρακτικά λοιπόν,

- στον πίνακα με τις μετρήσεις των παραμέτρων x και y προσθέτουμε δυο νέες στήλες με τις τιμές των $lnx\ \ \kappa\alpha\iota\ \ lny$
- σχεδιάζουμε τη συνάρτηση $Y(X)$
- εάν αυτή έχει γραμμική μορφή, τότε η αρχική υπόθεση ότι η εξάρτηση (x, y) ακολουθεί νόμο δύναμης, ισχύει
- ο ζητούμενος εκθέτης *n* προκύπτει υπολογίζοντας την κλίση

$$n = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x}$$

- ο παράγοντας *b* υπολογίζεται ως εξής: εντοπίζουμε το σημείο $B = Y(0)$ στη γραφική οπότε

$$B = \ln b \Leftrightarrow b = e^B \Leftrightarrow b = e^{Y(0)}$$

Και έτσι η σχέση $\boxed{y = b \cdot x^n}$ έχει προσδιοριστεί πλήρως

II) ΕΚΘΕΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ: $y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$

Εάν τα αρχικά δεδομένα (x,y) παριστάνονται σε μία γραφική παράσταση της μορφής του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.11(α), είναι πιθανόν να υποδηλώνουν ένα νόμο εκθετικής μείωσης της μορφής: $y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$, όπου τα α, b θα πρέπει να προσδιοριστούν ποσοτικά. Σημειώστε ότι το b<0 στην εκθετική μείωση και b>0 στην εκθετική αύξηση. Εάν μπορούμε να μετασχηματίσουμε την «άγνωστη» αυτή συνάρτηση σε κάποια γνωστή, π.χ. **γραμμική,** τότε μπορούμε εύκολα να εξάγουμε την ακριβή μορφή της y(x). Ας δούμε τους μαθηματικούς συλλογισμούς:

$$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln y(x) = \ln\ a \cdot e^{b \cdot x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln y(x) = \ln a + \ln e^{b \cdot x} \Rightarrow$$

$$\ln y(x) = \ln a + b \cdot x$$

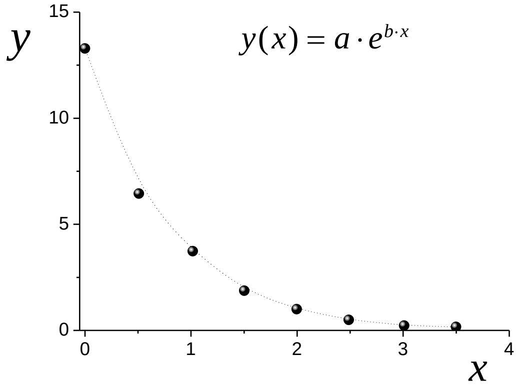
Τώρα, έχουμε μια συνάρτηση γραμμικής μορφής ως προς x. Πράγματι, εάν θέσουμε ως:

$Y = \ln y(x)$ και $A = \ln a$ (2.21)

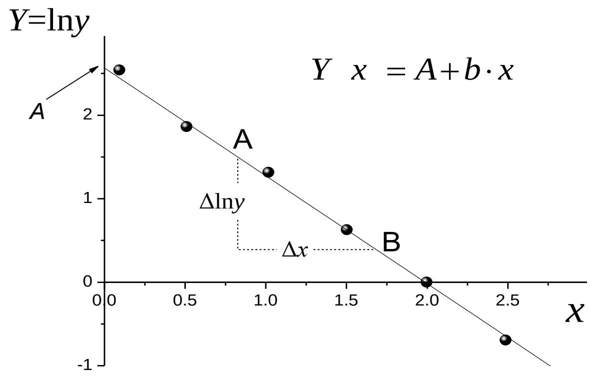
θα πάρουμε τελικά μια απλή εξίσωση ευθείας της μορφής:

$$\boxed{Y\ x\ = A + b \cdot x} \quad (2.22)$$

Έτσι, η αρχική υπόθεση (δηλαδή ο νόμος της εκθετικής μείωσης) θα επιβεβαιωθεί εάν τα δεδομένα ln*y* (ή *Y*) συναρτήσει του *x*, παριστάνουν ευθεία (ΣΧΗΜΑ 2.14(β)). Η κλίση *b* της ευθείας και η τεταγμένη επί την αρχή *A*, υπολογίζονται γραφικά (ή από μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων).



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 2.14

Πρακτικά λοιπόν κάνουμε τα εξής:

- κατασκευάζουμε νέα στήλη δεδομένων με τους λογαρίθμους των τιμών του y, δηλαδή τα lny.
- σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση ln*y* = f(*x*)
- εάν τα πειραματικά σημεία επάνω στη γραφική παριστάνουν ευθεία, τότε πράγματι η αρχική υπόθεση επιβεβαιώνεται και μένει να προσδιοριστούν τα *a*, *b*.
- προσδιορίζουμε το b από την κλίση της ευθείας:

$$b = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x} \quad (2.23)$$

- προσδιορίζουμε το *A* από την τεταγμένη επί την αρχή Y(0), δηλαδή το σημείο που η ευθεία τέμνει τον άξονα *Y*
- υπολογίζουμε τέλος το *a* από τη ΣΧΕΣΗ 2.20 αφού:

$$A = \ln a \Rightarrow a = e^A \quad (2.24)$$

Η άγνωστη συνάρτηση από τις ΣΧΕΣΕΙΣ (2.23, 2.24) έχει πλέον προσδιοριστεί πλήρως:

$$\boxed{y(x) = a \cdot e^{b \cdot x} = e^A \cdot e^{b \cdot x}}$$

2.2.4 Βιβλιογραφία.

1. Statistical Treatment of Experimental Data, Hugh D. Young, 1962
2. http://www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm
3. http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm

2.3 ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η παρούσα άσκηση είναι θεωρητική και δεν απαιτεί πειραματικό εξοπλισμό.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Η παρούσα άσκηση είναι θεωρητική. Για την εκτέλεση της άσκησης αυτής θα δοθούν έτοιμοι πίνακες μετρήσεων βάσει των οποίων οι σπουδαστές θα πρέπει να χαράξουν τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις και να προσδιορίσουν τις κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις που προσεγγίζουν καλύτερα αυτές.