ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 10

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΚΑΙ ΥΓΡΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

10.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Στη παρούσα άσκηση αξιοποιούμε το φαινόμενο της άνωσης (δηλαδή την Α*ρχή του Αρχιμήδη*) για να μετρήσουμε έμμεσα την πυκνότητα στερεών και υγρών σωμάτων.

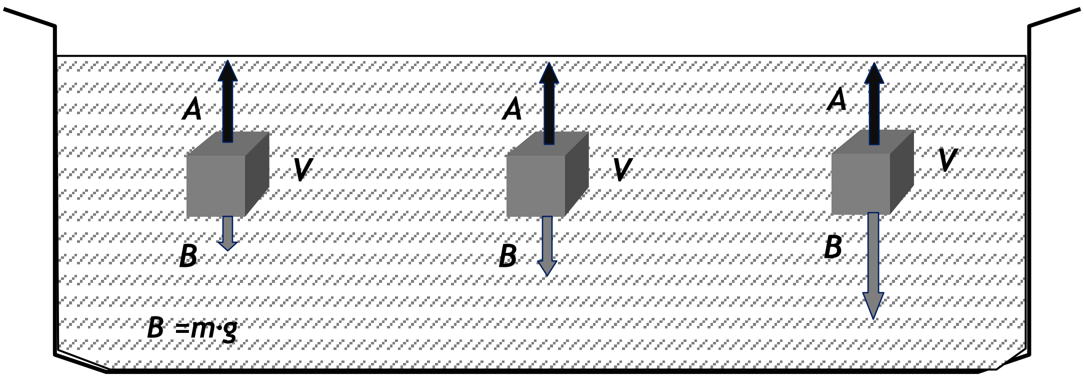
10.2 ΘΕΩΡΙΑ

Η αρχή του Αρχιμήδη διατυπώνεται ως εξής: «**κάθε σώμα βυθισμένο σε ρευστό δέχεται τη δύναμη της άνωσης ίση με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζει το σώμα**» και μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση:

$$\boxed{A = \rho \cdot g \cdot V}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού, *g* η επιτάχυνση της βαρύτητας και *V* ο όγκος του σώματος. Μπορεί κανείς να εξετάσει τρείς περιπτώσεις:

1. Β < Α (βάρος σώματος < άνωση): το σώμα θα κινηθεί ανοδικά στο μέσο. Θα επιλεύσει στην ελευθερη επιφάνεια του ρευστού.
2. Β = Α (βάρος σώματος = άνωση): το σώμα θα ισορροπήσει οπουδήποτε μέσα στο ρευστό (αιώρηση) εξ' ολοκληρου βυθισμένο σε αυτό
3. Β > Α (βάρος σώματος > άνωση): το σώμα θα βυθιστεί στο μέσο κινούμενο καθοδικά



B < A *το σώμα επιπλέει*   *B = A* *το σώμα αιωρείται*   *B > A* *το σώμα βυθίζεται*

10.2.1 Απαραίτητες Γνώσεις

1. Η έννοια των ρευστών.
2. Η έννοια της πίεσης στα ρευστά
3. Πυκνότητα και ειδικό βάρος σωμάτων.

4. Η μεταβολή της πίεσης σε ένα ρευστό που ισορροπεί.
5. Η αρχή του Pascal και η αρχή του Αρχιμήδη.

10.2.2 Βιβλιογραφία

1. Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς, Τόμος 1Α, R. Knight, Εκδόσεις ΙΩΝ 2008
2. Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς (3η έκδοση), Τόμος Ι, R.W. Serway, 1990, σελ.387-390
3. Φυσική, Μέρος Ι, Halliday – Resnick, Έκδοση Πνευματικού.
4. Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Ι, Young, Έκδοση Παπαζήση.

10.3 ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση φαίνεται στο *ΣΧΗΜΑ 10.1* και περιλαμβάνει τις παρακάτω συνιστώσες:

ΣΧΗΜΑ 10.1

1. Ένα ψηφιακό ζυγό.
2. Ένα δοχείο με αποσταγμένο νερό.
3. Ένα δοχείο με άγνωστο υγρό.
4. Στερεά σώματα από διαφορετικά υλικά.

10.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε, χρησιμοποιούμε το νερό ως υγρό αναφοράς, δεδομένου ότι η πυκνότητά του στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, είναι ίση με:

$$\rho_\upsilon = 1\ gr/cm^3 = 1000\ kg/m^3 \qquad (10.1)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 1: Μέτρηση της πυκνότητας στερεού σώματος που βυθίζεται εξ ολοκλήρου στο νερό

Στη περίπτωση αυτή, θέλουμε να υπολογίσουμε την άγνωστη πυκνότητα σώματος (ρ_σ) που βυθίζεται εξ ολοκλήρου στο υγρό. Η ρ_σ προκύπτει έμμεσα από τη σύγκριση της άνωσης A_σ που υφίσταται το στερεό σώμα, όταν αυτό είναι εξ ολοκλήρου βυθισμένο στο νερό, με το βάρος B_σ του σώματος. Πράγματι, αν ρ_υ είναι η πυκνότητα του νερού, g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας και V_σ είναι ο όγκος του σώματος τότε, από τις σχέσεις:

$$B_\sigma = \rho_\sigma \cdot g \cdot V_\sigma \qquad (10.2)$$

η οποία δίνει το βάρος του σώματος

και

$$A_\sigma = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V_\sigma \qquad (10.3)$$

που δίνει την άνωση (αρχή του Αρχιμήδη)

με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

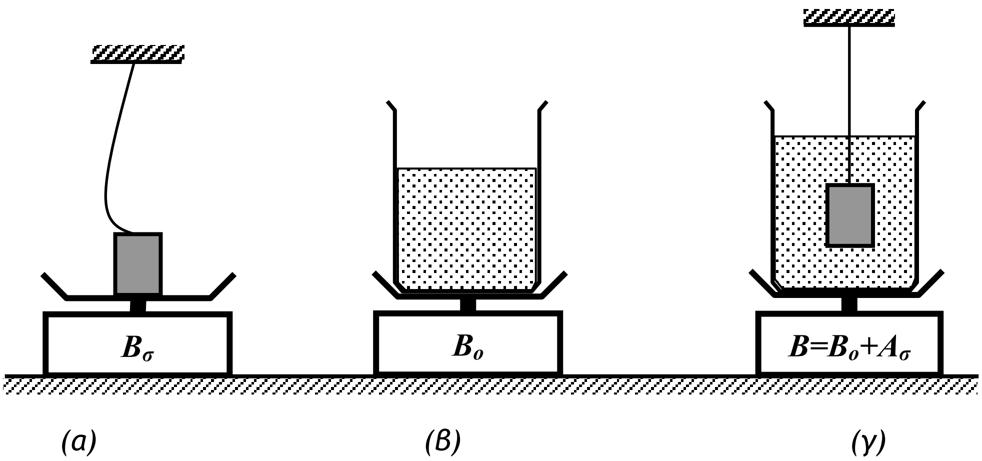
$$\rho_\sigma = \frac{B_\sigma}{A_\sigma}\rho_\upsilon \qquad (10.4)$$

Στο εργαστήριο το βάρος B_σ προσδιορίζεται <u>*άμεσα*</u> ζυγίζοντας το σώμα στον αέρα (*ΣΧΗΜΑ 10.2α*), ενώ η άνωση A_σ προκύπτει <u>*έμμεσα*</u> ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

<u>*Υπολογισμός άνωσης*</u>

Τοποθετούμε το δοχείο με το νερό πάνω στο ζυγό και μετράμε το βάρος του B_o, (*ΣΧΗΜΑ 10.2β*). Στη συνέχεια, το κρεμασμένο με νήμα σώμα βυθίζεται εξ ολοκλήρου στο νερό, (*ΣΧΗΜΑ 10.2γ*), οπότε ο ζυγός θα μετρήσει το συνολικό βάρος B, δηλαδή το άθροισμα του βάρους του δοχείου με το νερό B_o και της άνωσης A_σ. Τελικά, η άνωση θα είναι ίση με:

$$A_\sigma = B - B_o \qquad (10.5)$$



ΣΧΗΜΑ 10.2

Οπότε, από τις Σχέσεις (10.4) *και* (10.5) θα έχουμε:

$$\boxed{\rho_\sigma = \frac{B_\sigma}{B - B_o}\rho_\upsilon} \qquad (10.6)$$

Τα βάρη B_σ, *B και* B_o μετριούνται με τον ίδιο ζυγό και φυσικά με το ίδιο μέγιστο εκτιμούμενο σφάλμα ανάγνωσης το οποίο εξαρτάται από τις προδιαγραφές του ζυγού. Επομένως τα σφάλματα των μεγεθών αυτών θα είναι $\delta B = \delta B_\sigma = \delta B_o$. Αν δB είναι η τιμή του σφάλματος αυτού, τότε το σύνθετο σφάλμα μέτρησης της πυκνότητας του στερεού προκύπτει (δές το ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ για τις αναλυτικές πράξεις) να είναι:

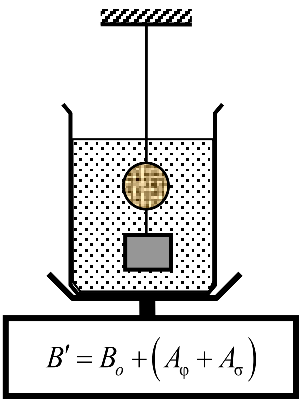
$$\boxed{\delta\rho_\sigma = \pm\rho_\sigma\sqrt{\left(\frac{\delta B}{B_\sigma}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta B}{B - B_o}\right)^2}} \qquad (10.9)$$

ΠΕΙΡΑΜΑ 2: Μέτρηση της πυκνότητας στερεού σώματος που επιπλέει στο νερό

Και στη περίπτωση αυτή, θέλουμε να υπολογίσουμε την άγνωστη πυκνότητα στερεού σώματος (ρ_Φ), όμως εδώ το σώμα επιπλέει στο νερό. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση (ΣΧΗΜΑ 10.2α) ζυγίζουμε το σώμα, το οποίο μπορεί να είναι φελλός ή ξύλο, και προσδιορίζουμε το βάρος B_Φ αυτού. Επίσης ζυγίζουμε και το δοχείο με το νερό των οποίων το συνολικό βάρος είναι B_o *(ΣΧΗΜΑ 10.2Β)*. Στη συνέχεια προσδένουμε στο κάτω μέρος του φελλού ένα μεταλλικό βοηθητικό σώμα με κατάλληλο βάρος B_σ για να είναι δυνατή η πλήρης βύθιση του φελλού μέσα στο νερό. Το σύστημα φελλός (ή ξύλο) – μεταλλικό σώμα αναρτάται με νήμα από σταθερό σημείο και βυθίζεται στο δοχείο με το νερό που βρίσκεται πάνω στο ζυγό (βλ. *ΣΧΗΜΑ 10.3)*. Ο ζυγός τότε θα μετρήσει μια συνολική δύναμη *B'* τέτοια ώστε:

$$B' = B_o + \left(A_\varphi + A_\sigma\right) \qquad (10.10)$$

όπου A_φ *και* A_σ είναι η άνωση που ασκεί το νερό πάνω στο εξεταζόμενο σώμα (φελλός ή ξύλο) και στο μεταλλικό σώμα, αντίστοιχα. Η άνωση A_σ μετράται με τη διαδικασία που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη περίπτωση.



ΣΧΗΜΑ 10.3

Από τη Σχέση (10.10) προκύπτει η τιμή της άνωσης που ασκεί το νερό πάνω στον βυθισμένο φελλό ή ξύλο:

$$A_\varphi = B' - B_o - A_\sigma \qquad (10.11)$$

Από τον ορισμό της *Αρχής του Αρχιμήδη* η άνωση που ασκεί το νερό στο φελλό (ή στο ξύλο) θα είναι :

$$A_\varphi = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V_\varphi \qquad (10.12)$$

όπου V_φ είναι ο όγκος του φελλού (ή ξύλου). Επίσης, από τον ορισμό της πυκνότητας, το βάρος του φελλού (ή του ξύλου) θα είναι ίσο με:

$$B_\varphi = \rho_\varphi \cdot g \cdot V_\varphi \qquad (10.13)$$

Από τις Σχέσεις (10.12) και (10.13) προκύπτει ότι, η πυκνότητα του στερεού σώματος που μελετάμε θα δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_\varphi = \frac{B_\varphi}{A_\varphi}\rho_\upsilon \qquad (10.14)$$

η οποία σε συνδυασμό με τη Σχέση (10.11) δίνει τελικά:

$$\boxed{\rho_\varphi = \frac{B_\varphi}{B - B_o - A_\sigma}\rho_\upsilon} \qquad (10.15)$$

Το σύνθετο σφάλμα μέτρησης της πυκνότητας του φελλού θα προκύπτει κατά αναλογία με τον υπολογισμό του σύνθετου σφάλματος μέτρησης της πυκνότητας του στερεού σώματος που βυθίζεται στο νερό. Συγκεκριμένα:

$$\boxed{\delta\rho_\varphi = \pm\rho_\varphi\sqrt{\left(\frac{\delta B}{B_\varphi}\right)^2 + 3\left(\frac{\delta B}{B - B_o - A_\sigma}\right)^2}} \qquad (10.16)$$

Η πυκνότητα του φελλού, όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία, είναι ίση με ρ_φ*=0.193 g/cm*^{3} *= 193 kg/m*^{3}.

ΠΕΊΡΑΜΑ 3: Μέτρηση της πυκνότητας υγρού με τη μέθοδο της άνωσης

Στην περίπτωση αυτή, η πυκνότητα ρ_x του άγνωστου υγρού θα προκύπτει από τη σύγκριση της άνωσης $A_{\sigma,x}$ που ασκεί το άγνωστο υγρό σε στερεό σώμα με την άνωση $A_{\sigma,\upsilon}$ που ασκεί το νερό στο ίδιο σώμα. Συγκεκριμένα:

Άνωση στο άγνωστο υγρό : $A_{\sigma,x} = \rho_x \cdot g \cdot V_x$ (10.17)

Άνωση στο νερό: $A_{\sigma,\upsilon} = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V_x$ (10.18)

Στις σχέσεις αυτές, όπως και στις επόμενες, ο δείκτης (*υ*) αναφέρεται στο νερό και ο δείκτης (*x*) αναφέρεται στο άγνωστο υγρό.

Από τις Σχέσεις (10.17) και (10.18) προκύπτει η πυκνότητα του άγνωστου υγρού:

$$\rho_x = \frac{A_{\sigma,x}}{A_{\sigma,\upsilon}}\rho_\upsilon \qquad (10.19)$$

όπου οι ανώσεις $A_{\sigma,x}$ και $A_{\sigma,\upsilon}$ μετρώνται όπως στη πρώτη περίπτωση (βλ. *ΣΧΗΜΑ 10.1* και Σχέση 10.5). Συγκεκριμένα:

$$A_{\sigma,\upsilon} = B_{\upsilon} - B_{o,\upsilon}$$

$$A_{\sigma,x} = B_{x} - B_{o,x}$$

Με απλή αντικατάσταση η Σχέση (10.19) γράφεται:

$$\boxed{\rho_x = \frac{B_x - B_{o,x}}{B_\upsilon - B_{o,\upsilon}} \rho_\upsilon} \qquad (10.20)$$

Κατά αναλογία με αυτά που αναφέρθηκαν στις παραγράφους 10.4.1 και 10.4.2, το σύνθετο σφάλμα μέτρησης της πυκνότητας ρ_x το άγνωστου υγρού θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\delta\rho_x = \pm\rho_x \sqrt{2\left(\frac{\delta B}{B_x - B_{o,x}}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta B}{B_\upsilon - B_{o,\upsilon}}\right)^2}} \qquad (10.21)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τα βάρη B_σ, B *και* B_o μετριούνται με τον ίδιο ζυγό και φυσικά με το ίδιο μέγιστο εκτιμούμενο σφάλμα ανάγνωσης το οποίο εξαρτάται από τις προδιαγραφές του ζυγού. Επομένως τα σφάλματα των μεγεθών αυτών θα είναι $\delta B = \delta B_\sigma = \delta B_o$. Αν δB είναι η τιμή του σφάλματος αυτού, τότε το σύνθετο σφάλμα μέτρησης της πυκνότητας του στερεού υπολογίζεται ξεκινώντας από τη σχέση που μας δίνει η θεωρία διάδοσης σφάλματος (Εργαστηριακή Άσκηση 1):

$$\boldsymbol{\delta\rho_\Sigma} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{\rho_\Sigma}}{\partial \boldsymbol{B_\Sigma}}\boldsymbol{\delta B}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\rho_\Sigma}}{\partial \boldsymbol{B}}\boldsymbol{\delta B}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\rho_\Sigma}}{\partial \boldsymbol{B_0}}\boldsymbol{\delta B}\right)^2} \qquad (10.7)$$

όπου, από τη Σχέση (10.6), *βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho_\Sigma}{\partial B_\Sigma} &= \frac{1}{B - B_0}\rho_\upsilon = \frac{B_\Sigma}{B - B_0}\rho_\upsilon \frac{1}{B_\Sigma} = \frac{\rho_\Sigma}{B_\Sigma} \\
\frac{\partial\rho_\Sigma}{\partial B} &= -\frac{B_\Sigma}{(B - B_0)^2}\rho_\upsilon = -\frac{B_\Sigma}{B - B_0}\rho_\upsilon \frac{1}{B - B_0} = -\frac{\rho_\Sigma}{B - B_0} \\
\frac{\partial\rho_\Sigma}{\partial B_0} &= \frac{B_\Sigma}{(B - B_0)^2}\rho_\upsilon = \frac{B_\Sigma}{B - B_0}\rho_\upsilon \frac{1}{B - B_0} = \frac{\rho_\Sigma}{B - B_0}
\end{aligned} \qquad (10.8)$$

Οπότε, από τις Σχέσεις (10.7) και (10.8) προκύπτει ότι:

$$\delta\rho_\Sigma = \pm\rho_\Sigma \sqrt{\left(\frac{\delta B}{B_\Sigma}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta B}{B - B_0}\right)^2} \qquad (10.9)$$