ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

	Ειδικότητα (ΠΟΛ-ΗΛΓ-ΗΛΝ-ΜΗΧ)	**Τμήμα** (Α1-Α2-Α3-Α4)	**Ομάδα** (Α-Β-Γ-Δ-Ε-Ζ-Η-Θ-Ι-Κ-Λ-Μ)

Ονοματεπώνυμο			
Διδάσκων			
Ημ/νία διεξαγωγής πειράματος		**Ωρα**	
Ημ/νία παράδοσης γραπτής εργασίας			
Αξιολόγηση	**1η διόρθωση**	**Τελικός βαθμός**	

☐ Ασκηση προετοιμασίας ....

Ερ.1

☐ Πίνακας τιμών ....

☐ Επιλογή κλίμακας αξόνων ....

☐ Ορθός εντοπισμός σημείων στη γραφική ....

☐ Χάραξη ευθείας F=f(x) ....

☐ Υπολογισμός κλίσης ....

☐ Εύρεση τεταγμένης επί την αρχή ....

☐ Τελική γραφή εξίσωσης ευθείας ....

☐ Εφαρμογή Μ.Ε.Τ..

Ερ.2

☐ Γραφικός τρόπος εύρεσης εξίσωσης ευθείας ....

Ερ.3

☐ Γραμμικοποίηση συναρτήσεων ....

Ερ.4

☐ Χάραξη γραφικής y=f(x) ....

☐ Χάραξη γραφικής $y=f(1/x^2)$ ....

☐ Εφαρμογή γραμμικοποίησης ....

☐ Προσδιορισμός εξίσωσης φυσικού νόμου..

ΕΡΓΑΣΙΕΣ (στην τάξη)

1. Μελέτη συνήθων λαθών στη χάραξη γραφικής παράστασης

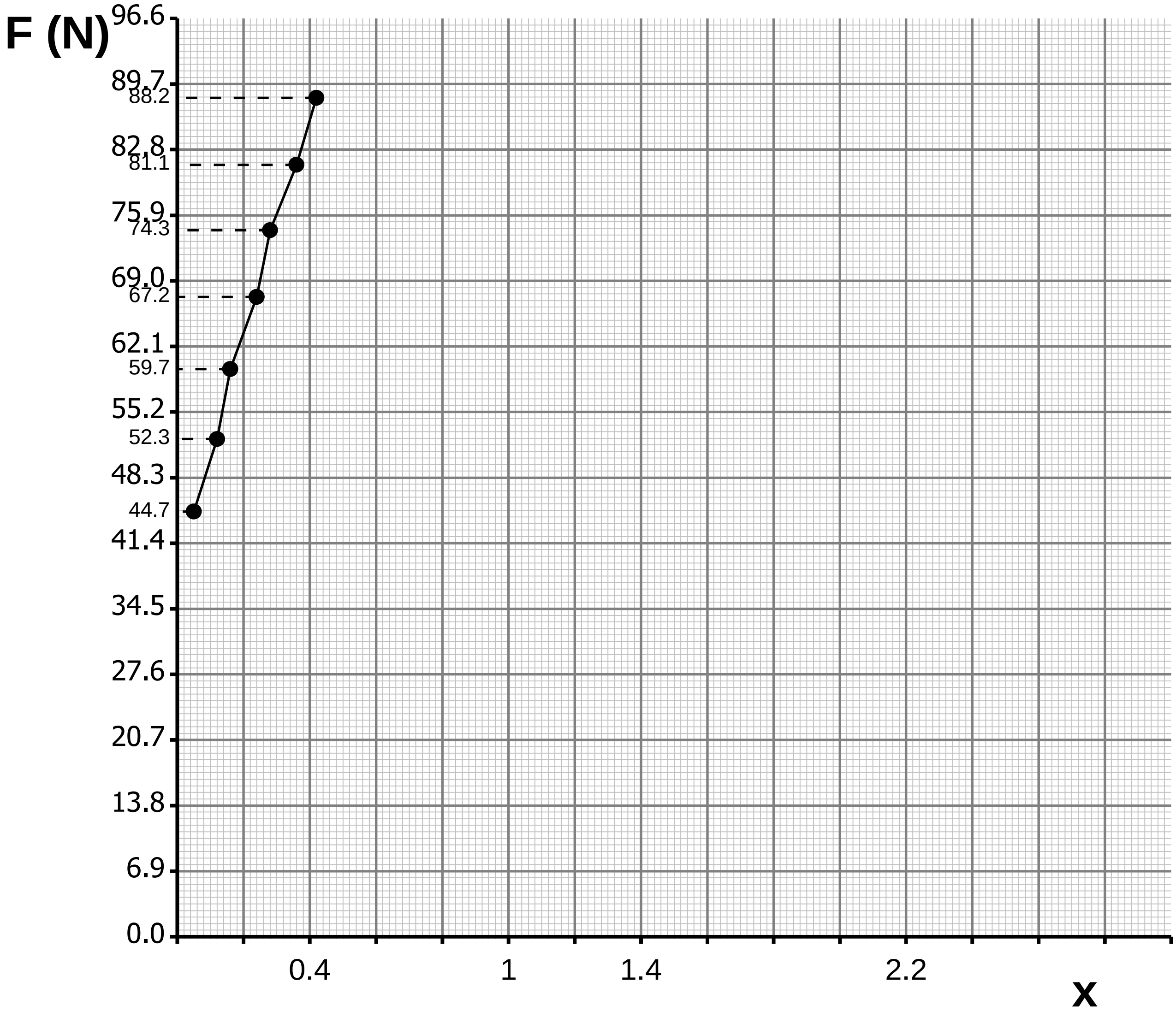
Στο εργαστήριο μετρήθηκε πειραματικά η δύναμη ***F*** που εφαρμόστηκε επάνω σε ελατήριο ως συνάρτηση της θέσης του κάτω άκρου του ελατηρίου **x**. Οι τιμές καταγράφηκαν στον πίνακα 2.2. Ακολούθως σχεδιάστηκε η γραφική παράσταση που αναπαριστά τη μεταβολή *F*=*f*(x), όπου σύμφωνα με το νόμο του Hook αναμένεται γραμμική της μορφής *F*(x) = k·x + b.

Η γραφική αυτή ωστόσο έχει αρκετά, πολύ σημαντικά λάθη στη σχεδίαση της που ουσιαστικά την κάνει *μη αναγνώσιμη*.

x **(m)**	***F*** **(10^{-3} N)**
0.05	44.7
0.12	52.3
0.16	59.7
0.24	67.2
0.28	74.3
0.36	81.1
0.42	88.2

Πίνακας 2.2

Εντοπίστε και σημειώστε με το μολύβι επάνω στη γραφική τα λάθη χάραξης, ακολουθώντας τις βοηθητικές ερωτήσεις που σας δίνονται.



Ερωτήματα για την αξιολόγηση της χάραξης μιας γραφικής παράστασης	Οριζόντιος άξονας	Κατακόρυφος άξονας
Είναι σωστό το μέγεθος της γραφικής (δηλ. τα μήκη των αξόνων) ;		
Παριστάνεται σωστά το φυσικό μέγεθος κάθε άξονα (με τις μονάδες του και ίσως την κατάλληλη δύναμη του 10);		
Είναι σωστά επιλεγμένο το εύρος τιμών της κλίμακας σε κάθε άξονα ώστε να γίνεται εκμετάλλευση όλου του διαθέσιμου χώρου στη σχεδίαση της καμπύλης;		
Ποιά η ελάχιστη υποδιαίρεση κάθε άξονα (δηλ. η μέγιστη ακρίβεια χάραξης των πειραματικών τιμών στη γραφική);		
Είναι ευανάγνωστη η κλίμακα κάθε άξονα, δηλαδή μπορεί να εντοπίσει κανείς εύκολα τις συντεταγμένες ενός πειραματικού σημείου;		
Μπορεί κανείς να σχεδιάσει εύκολα και με ακρίβεια ένα σημείο, π.χ. (0.65, 38.4);		
Είναι ομοιόμορφα σχεδιασμένα τα πειραματικά σημεία;		
Είναι ομαλά σχεδιασμένη η καμπύλη;		
Ποιά άλλα λάθη σχεδίασης παρατηρείτε;		

2. Χάραξη γραφικής παράστασης της εξίσωσης ευθείας (γραμμική)

Να χαράξετε τη γραφική παράσταση F=f(x), σε **χαρτί μιλιμετρέ** ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στον πίνακα. Λόγω του νόμου του Hook αναμένεται αυτή να είναι ευθεία της μορφής: F(x) = k·x + b

	Χρησιμοποιείτε μολύβι και απαραίτητα χάρακα για τις ευθείες		
	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	**Οριζόντιος άξονας**	**Κατακόρυφος άξονας**
1	Φυσικό μέγεθος και μονάδες μέτρησης	*x* ( )	*F* ( )
2	Μέγεθος γραφικής (πλήθος «κουτιών» του ενός cm στο μιλιμετρέ)	N_x =	N_F =
3	Όρια κλιμάκων στους άξονες	x_{min}= x_{max}=	F_{min}= F_{max}=
4	Βήμα κλίμακας δηλ. πόση τιμή έχει το 1cm του μιλιμετρέ. Στρογγυλοποιείτε στο **ένα** σημαντικό ψηφίο.	$x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x} =$	$F = \frac{F_{max} - F_{min}}{N_F} =$
5	Μέγιστη ακρίβεια εντοπισμού μιάς τιμής στο γράφημα (δηλ. τιμή που αντιστοιχεί στο 1mm)	$\frac{x}{10} =$	$\frac{F}{10} =$
6	Γραφή τιμών της κλίμακας κάθε άξονα [1]		
7	Εντοπισμός και σημείωση των πειραματικών σημείων (*x*, *F*)		
8	Είναι ευθεία της μορφής *F*(*x*) = k·*x* + *b* ;		
9	Αν ναί, σχεδιάστε την ευθεία που να αντιπροσωπεύει τα πειραματικά σημεία [2]		

[1] ΠΟΤΕ δεν σημειώνουμε στους άξονες τις πειραματικές τιμές.
[2] Αποφύγετε την λαθεμένη «υποχρέωση» να ενώσετε το πρώτο με το τελευταίο σημείο της γραφικής για την ευθεία.

3. Υπολογισμός κλίσης ευθείας - Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας

Για τον προσδιορισμό της κλίσης της ευθείας που προέκυψε, ακολουθήστε τα βήματα του παρακάτω πίνακα:

	Στρατηγική υπολογισμού κλίσης ευθείας		
1	Επιλέξτε και σημειώστε δύο τυχαία σημεία Α(x_A, F_A) και Β (x_B, F_B) που να βρίσκονται επάνω στην ευθεία **(ΜΗΝ να τα πάρετε από τον πίνακα τιμών)**	Α(,)	Β (,)
2	Υπολογίστε τις διαφορές (με τις μονάδες μέτρησης)	$\Delta F = F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}} =$	$\Delta x = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} =$
3	Υπολογίστε το λόγο (γράφοντας τις μονάδες μέτρησης)	$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} =$	

- Ποια είναι η *φυσική σημασία* της κλίσης αυτής;
- Αφού προεκτείνετε την ευθεία, να προσδιορίσετε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των δυνάμεων ***F*** δηλαδή, το σημείο *b*=*F*(0) ή αλλιώς την τεταγμένη επί την αρχή:

b= *(μονάδες)*

- Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης *F*=*f*(x), που προέκυψε:

F (x) =

ΕΡΓΑΣΙΕΣ (στο σπίτι)

1. Χάραξη γραμμικής συνάρτησης - υπολογισμός κλίσης - μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Στην μελέτη της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης ενός σώματος, μετρήθηκε πειραματικά η ταχύτητα *u* σε συνάρτηση με το χρόνο *t* και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας μετρήσεων:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

i	*t* (sec)	*u* (m/sec)	t^2 (sec^2)	u^2 $(m/sec)^2$	*u·t* (m)
1	1.9	63			
2	4.2	86			
3	5.5	100			
4	6.1	106			
5	7.3	117			
6	8.6	134			
7	10.4	148			
	$\sum_{i=1}^{N} t_i =$	$\sum_{i=1}^{N} u_i =$	$\sum_{i=1}^{N} t_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{N} u_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{N} u_i t_i =$

a. Εξαγωγή της συνάρτησης *u*=f(*t*) με εμπειρικό (γραφικό) τρόπο

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση *u*=f(*t*), σε **χαρτί μιλιμετρέ** ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στον πίνακα.

	Χρησιμοποιείτε μολύβι και απαραίτητα χάρακα για τις ευθείες		
	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	**Οριζόντιος άξονας**	**Κατακόρυφος άξονας**
1	Φυσικό μέγεθος και μονάδες μέτρησης	*t* ( )	*u* ( )
2	Μέγεθος γραφικής (πλήθος «κουτιών» του ενός cm στο μιλιμετρέ)	N_t =	N_u =
3	Όρια αξόνων (προτείνεται να πάρετε ως αρχή των αξόνων το σημείο (0,0))	t_{min}= t_{max}=	u_{min}= u_{max}=
4	Βήμα κλίμακας δηλ. πόση τιμή έχει το <u>1cm</u> του μιλιμετρέ. Στρογγυλοποιείτε στο **ένα** σημαντικό ψηφίο.	$t = \frac{t_{max} - t_{min}}{N_t} =$	$u = \frac{u_{max} - u_{min}}{N_u} =$
5	Μέγιστη ακρίβεια εντοπισμού μιάς τιμής στο γράφημα (δηλ. τιμή που αντιστοιχεί στο <u>1mm</u>)	$\frac{t}{10} =$	$\frac{u}{10} =$
6	Γραφή τιμών της κλίμακας κάθε άξονα [3]		
7	Εντοπισμός και σημείωση των πειραματικών σημείων (*t*, *u*)		
8	Είναι ευθεία της μορφής *u*(*t*) = α·*t* + β ;		
9	Αν ναί, σχεδιάστε την ευθεία που να αντιπροσωπεύει τα πειραματικά σημεία [4]		

[3] ΠΟΤΕ δεν σημειώνουμε στους άξονες τις πειραματικές τιμές.

ii. Για τον προσδιορισμό της κλίσης της ευθείας που προέκυψε, ακολουθήστε τα βήματα:

	Στρατηγική υπολογισμού κλίσης ευθείας		
1	Επιλέξτε και σημειώστε δύο τυχαία σημεία A(t_A, u_A) και B (t_B, u_B) που να βρίσκονται επάνω στην ευθεία **(ΜΗΝ να τα πάρετε από τον πίνακα τιμών!)**	A(,)	B (,)
2	Υπολογίστε τις διαφορές (με τις μονάδες μέτρησης)	$\Delta u = u_B - u_A =$	$\Delta t = t_B - t_A =$
3	Υπολογίστε το λόγο (=κλίση) γράφοντας και τις μονάδες μέτρησης	$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_B - u_A}{t_B - t_A} =$	

Ποια η *φυσική σημασία* της κλίσης αυτής;

iii. Αφού προεκτείνετε την ευθεία, να προσδιορίσετε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα της ταχύτητας ***u*** δηλαδή, το σημείο *β*=*u*(0) ή αλλιώς την τεταγμένη επί την αρχή:

β = *(μονάδες)*

Ποιά η *φυσική σημασία* αυτής της τιμής της ταχύτητας;

iv. Γράψτε τον τύπο της συνάρτησης *u*=f(*t*), που προέκυψε (με τον γραφικό τρόπο):

u(*t*) =

v. Από τον τύπο της συνάρτησης, προσδιορίστε το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα του χρόνου ***t***, δηλαδή το σημείο (t_0,0) ή αλλιώς την τετμημένη επί την αρχή:

t_0 = *(μονάδες)*

b. Εξαγωγή της συνάρτησης *u*=f(*t*) από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

i. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με τις μετρήσεις του ΠΙΝΑΚΑ 2.1 ώστε να προσδιορίσετε με ακρίβεια τους παράγοντες *a* και *β* της μαθηματικής σχέσης: *u*(*t*) = α*t* + *β*. Υπολογίσετε τις τιμές του παρακάτω πίνακα και να εφαρμόζοντας τις σχέσεις 2.15-2.19. Δείξτε αναλυτικά τις πράξεις.

	$\sum_{i=1}^{N} t_i =$	$\bar{t} =$
	$\sum_{i=1}^{N} u_i =$	$\bar{u} =$
	$\sum_{i=1}^{N} t_i^2 =$	$\sum_{i=1}^{N} u_i t_i =$
	$\sum_{i=1}^{N} u_i^2 =$	
Οπότε,	*a* =	*β* =

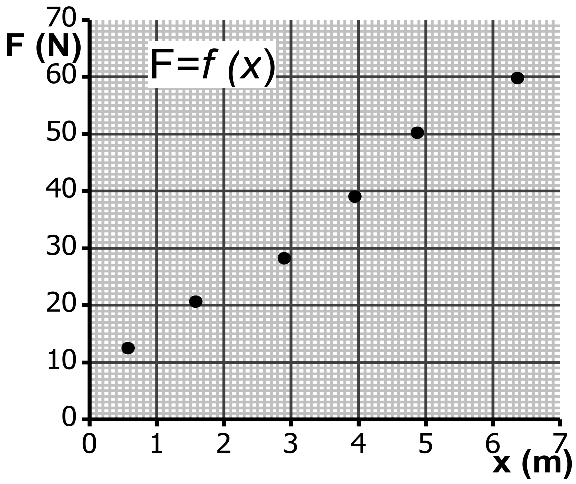
ii. Γράψτε τέλος, τον **ακριβή** τύπο της συνάρτησης *u*=f(*t*):

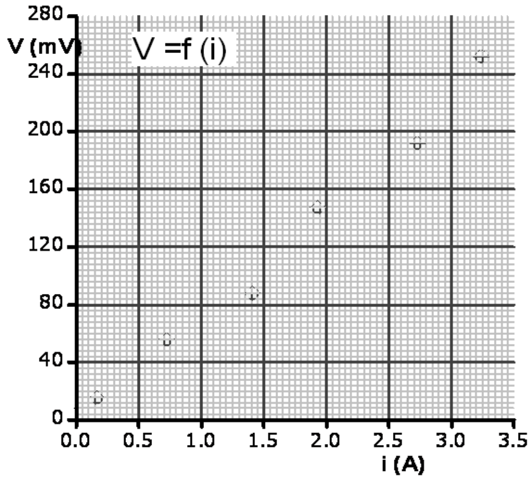
u(*t*) =

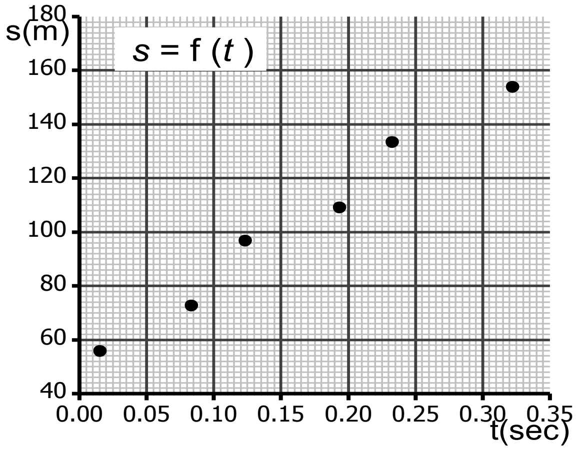
iii. Είναι -όπως ήταν αναμενόμενο- **συγκρίσιμες** οι μορφές των συναρτήσεων *u*(*t*) που προσδιορίσατε από τις **δύο** μεθόδους;

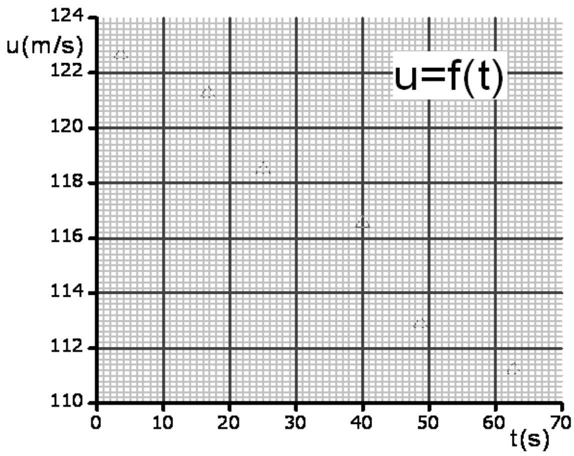
[4] Αποφύγετε την λαθεμένη «υποχρέωση» να ενώσετε το πρώτο με το τελευταίο σημείο της γραφικής για την ευθεία.

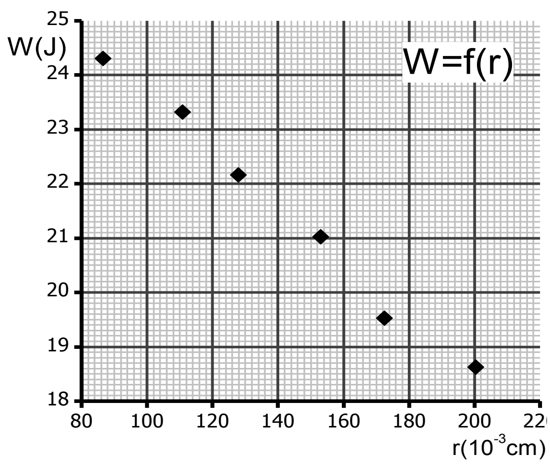
2. Υπολογισμός γραφικά της κλίσης *α* και σταθεράς *β* της γραμμικής συνάρτησης *y*(*x*) = *α* · *x* + *β*

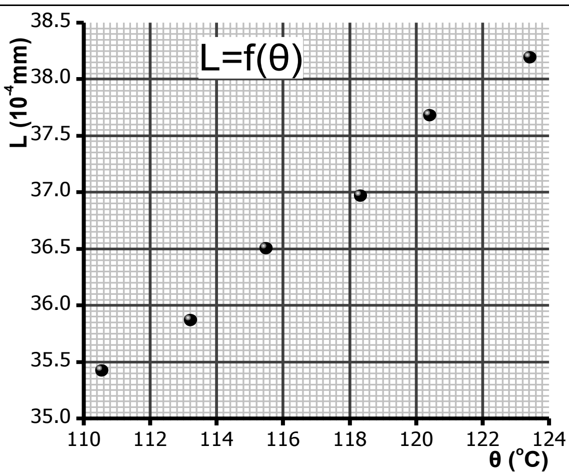












3. Γραμμικοποίηση συναρτήσεων

Ακολουθώντας και τις δύο μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 2.2.3.2 (*δες* Σχήμα 2.12), μετατρέψτε τις συναρτήσεις *y(x)* του παρακάτω πίνακα σε συναρτήσεις 1ου βαθμού *Y(X)*. Γράψτε αναλυτικά τις μαθηματικές πράξεις.

$y=f(x)$	$Y=k\cdot X+b$	
	1η μέθοδος	**2η μέθοδος** (λογαριθμίστε…)
$y=a\cdot x^{-\frac{5}{3}}$	$y=a\cdot X$ όπου $X=x^{-\frac{5}{3}}$	$Y=A-\frac{5}{3}X$ όπου $Y=\ln y,\ X=\ln x,\ A=\ln a$
$y=3\cdot x^6$		
$y=\dfrac{1.3}{x^{1.3}}$		
$y=\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$	(*)	(δεν προτείνεται)
$y=8\cdot 10^{-9x^4}$	(δεν προτείνεται)	

4. Εφαρμογή μεθοδολογίας γραμμικοποίησης: Πειραματική επαλήθευση φυσικού νόμου

Η θερμική ακτινοβολία *y* σε απόσταση *x* από τη θερμική πηγή, ακολουθεί το νόμο του «αντιστρόφου τετραγώνου» της απόστασης, σύμφωνα με τη σχέση:

$$y(x)=\frac{a}{x^2}+b \qquad \textbf{(1)}$$

Τα *a* και *b* είναι σταθερές και προσδιορίζονται πειραματικά.

Κατά την πειραματική μελέτη του νόμου αυτού στο εργαστήριό μας, μετρήθηκε η θερμική ακτινοβολία (σε mVolt), σε συνάρτηση με την απόσταση *x* (σε cm) από τη θερμική πηγή με τη βοήθεια κατάλληλου αισθητήρα και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας μετρήσεων:

i	***x*** (cm)	***y*** (mV)		**X=1/*x*²** (cm⁻²)
1	1.0	1325		
2	1.3	840		
3	1.5	695		
4	1.9	474		
5	2.3	385		
6	2.8	291		
7	3.0	270		

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3

[*] Υπόδειξη: υψώστε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο και αντιστρέψτε τα.

Σκοπός του πειράματος είναι:

i. *η πειραματική επαλήθευση του νόμου*

ii. *η εύρεση των πειραματικών παραμέτρων a* και *b*

ΕΠΙΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 1ο. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $y = f(x)$.

Η καμπύλη της $f(x)$ παριστάνει υπερβολική συνάρτηση (‘νόμος δύναμης’);
Καθώς διαπιστώσατε ότι ο νόμος είναι μη γραμμικός, θα χρειαστεί η αρχική σχέση (1) και τα πειραματικά δεδομένα να γραμμικοποιηθούν κατάλληλα[5*].

ΒΗΜΑ 2ο. Κατασκευάστε στον πίνακα την στήλη $X=1/x^2$.

ΒΗΜΑ 3ο. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση $y = f(1/x^2)$, δηλαδή την $y = f(X)$.

Ο νόμος (1) θα επαληθευτεί εάν η $y=f(X)$ είναι γραμμική συνάρτηση (ευθεία). Ο συντελεστής *a* προσδιορίζεται από την κλίση της ευθείας και ο *b* από την τεταγμένη επί την αρχή, $b=y(0)$. Οπότε:

ΒΗΜΑ 4ο. Είναι γραμμική η $y=f(X)$; Επαληθεύεται ο νόμος αντιστρόφου τετραγώνου; Εάν ναι, υπολογίστε την παράμετρο α από την κλίση.

ΒΗΜΑ 5ο. Εκτιμήστε την τιμή $b=Y(0)$, δηλαδή την τεταγμένη επί την αρχή.

ΒΗΜΑ 6ο. Γράψτε την μορφή της συνάρτησης $y = f(x)$ που προέκυψε πειραματικά.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΩΣ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ 2.4

Νόμος του «αντιστρόφου τετραγώνου»	$y(x) = \frac{a}{x^2} + b$
Θέτουμε…	$X = 1/x^2$
Γραμμικοποιημένη σχέση…	$y = a \cdot X + b$
Σχεδιάζουμε…	$y = f(X)$
Είναι η $f(X)$ ευθεία; (ΝΑΙ/ΟΧΙ) Αν ΝΑΙ, ο νόμος **επαληθεύεται**	
Προσδιορίζουμε την κλίση *a* της ευθείας…	$a = \frac{\Delta y}{\Delta X} =$
Προσδιορίζουμε το *β* από την τεταγμένη επί αρχή…	$b = y(0) =$
Νόμος που προκύπτει πειραματικά	$y(x) =$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4

[*] Σύμφωνα με τα γραφόμενα στην παράγραφο 2.2.3.2 (I,II).