Ας θυμηθούμε ….

Βασικές έννοιες

Βιβλίο μαθήματος

Τίτλος:

Μαθηματικά Ι. Απειροστικός Λογισμός & Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

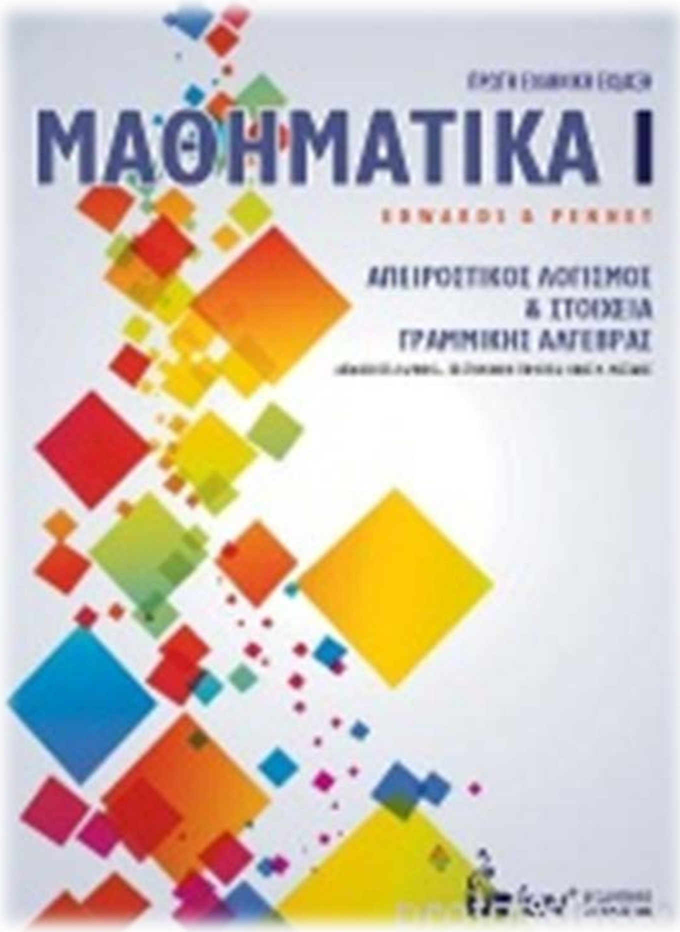
Συγγραφείς:

David Penney & Henry Edwards

Μετάφραση

Νίκος Ματζάκος

Εκδ. Οίκος: **Ίων**



Βασικά σύνολα

- **N** = {0, 1, 2, 3, 4, …} , οι **φυσικοί** (ή θετικοί ακέραιοι)

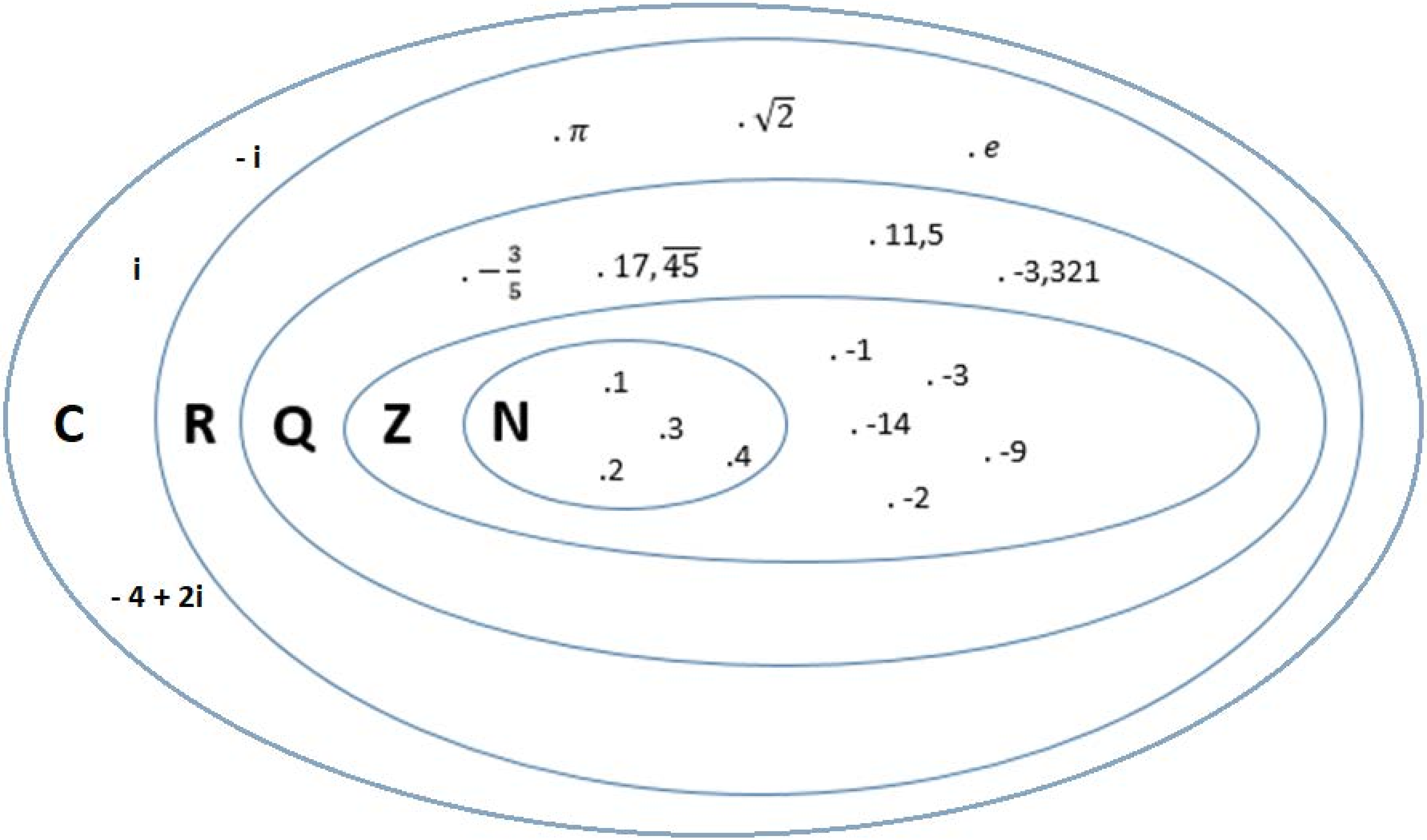
- **Z** = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} , οι **ακέραιοι**

- **Q** = { $\frac{m}{n}$: m, $n \in$ Z, $n \neq 0$} , οι **ρητοί**

- **R** : οι **πραγματικοί**
  - **R\Q** : οι **άρρητοι** αριθμοί

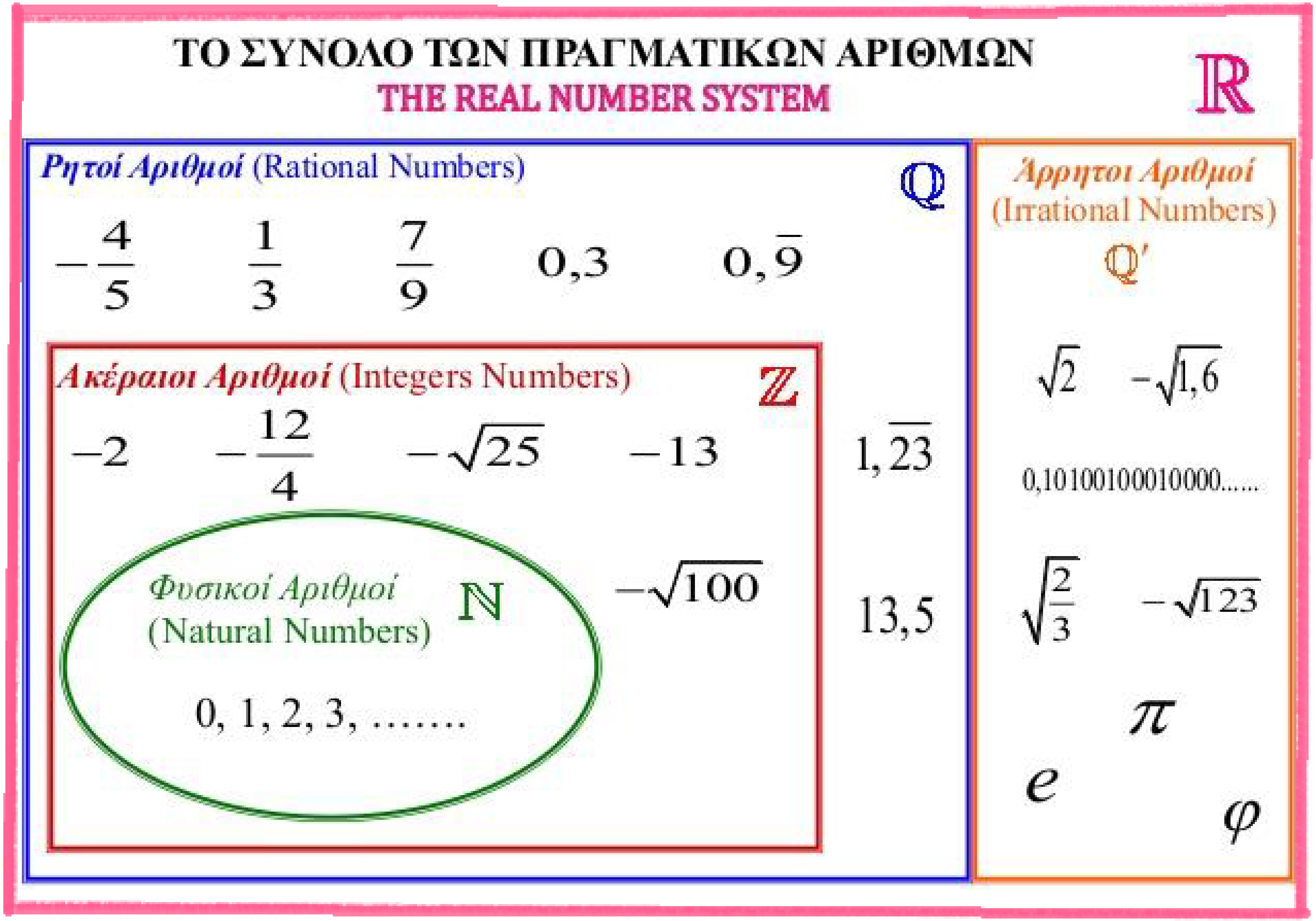
- **C** = {a+b·i, a,b ∈ R}, όπου $i^2 = -1$, οι **μιγαδικοί**

Οι αριθμοί



C
R
Q
Z
N
- i
i
- 4 + 2i
. π
. $\sqrt{2}$
. e
. $-\frac{3}{5}$
. $17,\overline{45}$
. 11,5
. -3,321
. -1
. -3
. -14
. -9
. -2
.1
.3
.2
.4

Πού είναι οι άρρητοι; (R\Q)



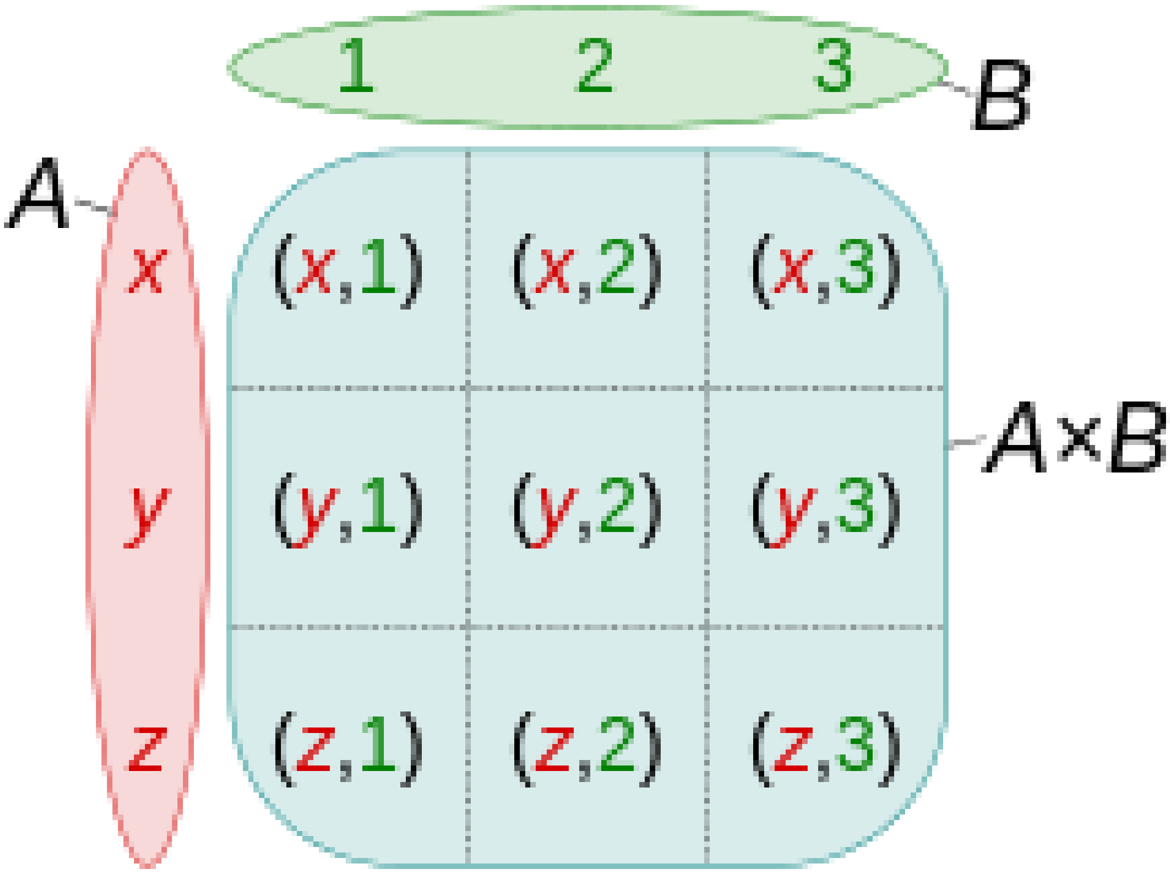
Καρτεσιανό γινόμενο

Καρτεσιανό γινόμενο 2 συνόλων A και B: είναι το σύνολο που απαρτίζεται από τα στοιχεία $\{(\alpha, \beta): \alpha \in A \ \& \ \beta \in B\}$ (συμβολίζεται με **A x B**)

– αφορά διατεταγμένα ζεύγη (δηλ. $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$)
– αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε $A \times B = \emptyset$
– αν A, B πεπερασμένα τότε $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Ερώτηση: Είναι η τράπουλα των 52 φύλλων καρτεσιανό γινόμενο;

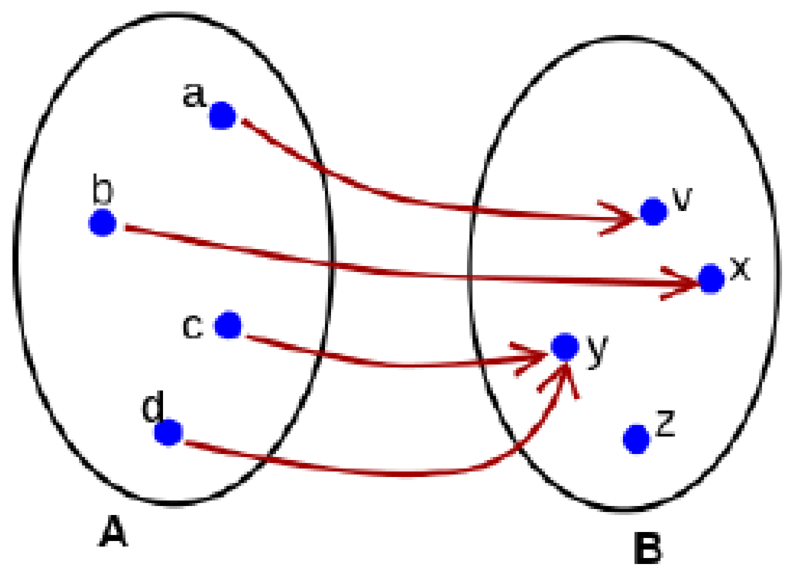
Καρτεσιανό γινόμενο παράδειγμα



Απεικόνιση

Απεικόνιση (ή **διμελής σχέση**) είναι μία μονοσήμαντη αντιστοιχία τ.ώ. σε κάθε στοιχείο a ϵ A αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο b ϵ B

$$f: \begin{cases} A \rightarrow B \\ a \rightarrow b \ \ (\text{ή } f(a) = b) \end{cases}$$



Αν τα στοιχεία των A & B είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f ονομάζεται «**συνάρτηση**»

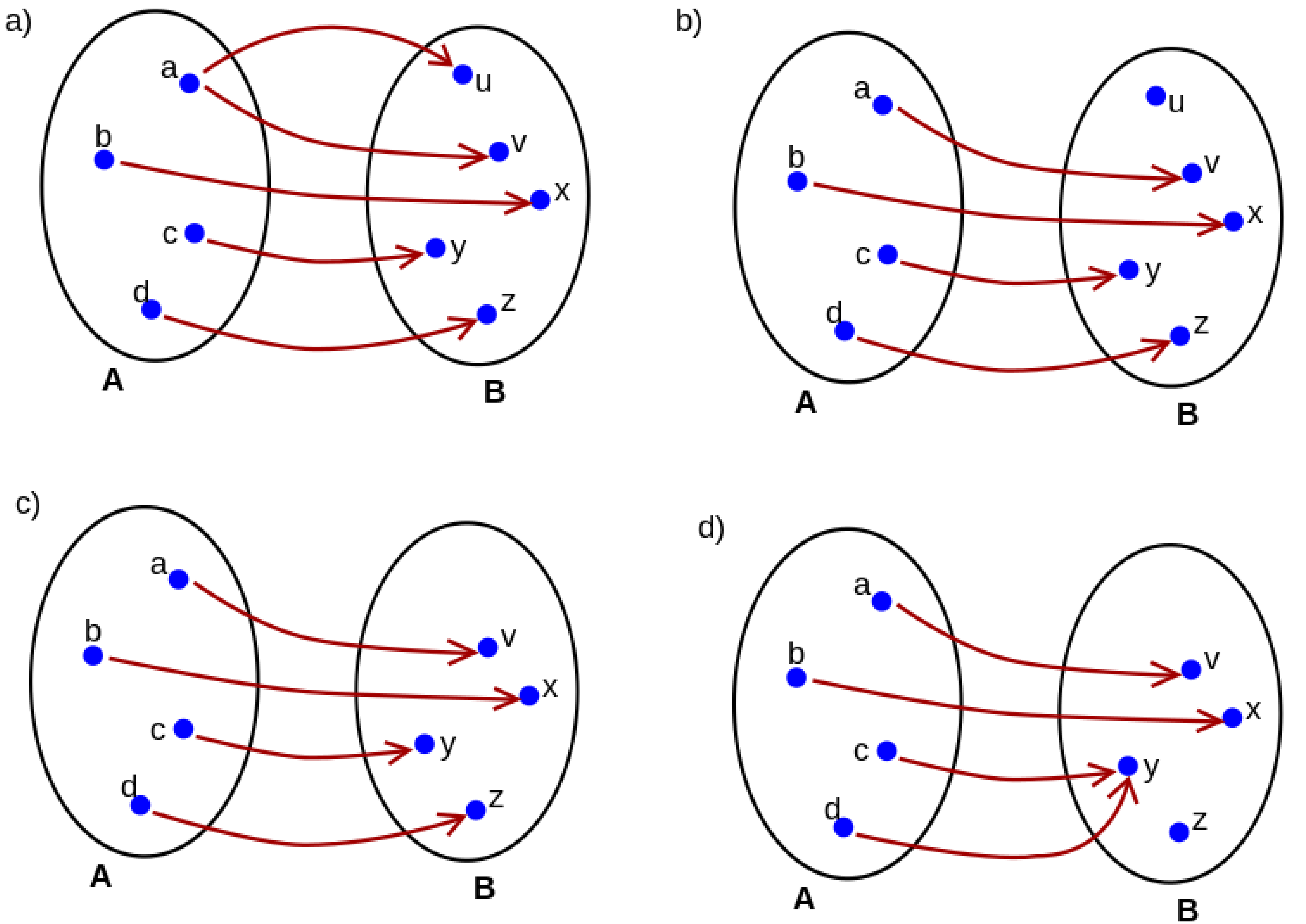
Παράδειγμα απεικόνισης

Φοιτητές (το σύνολο Α) &

εξεταζόμενο μάθημα την Τρίτη στις 11:00 (το Β)

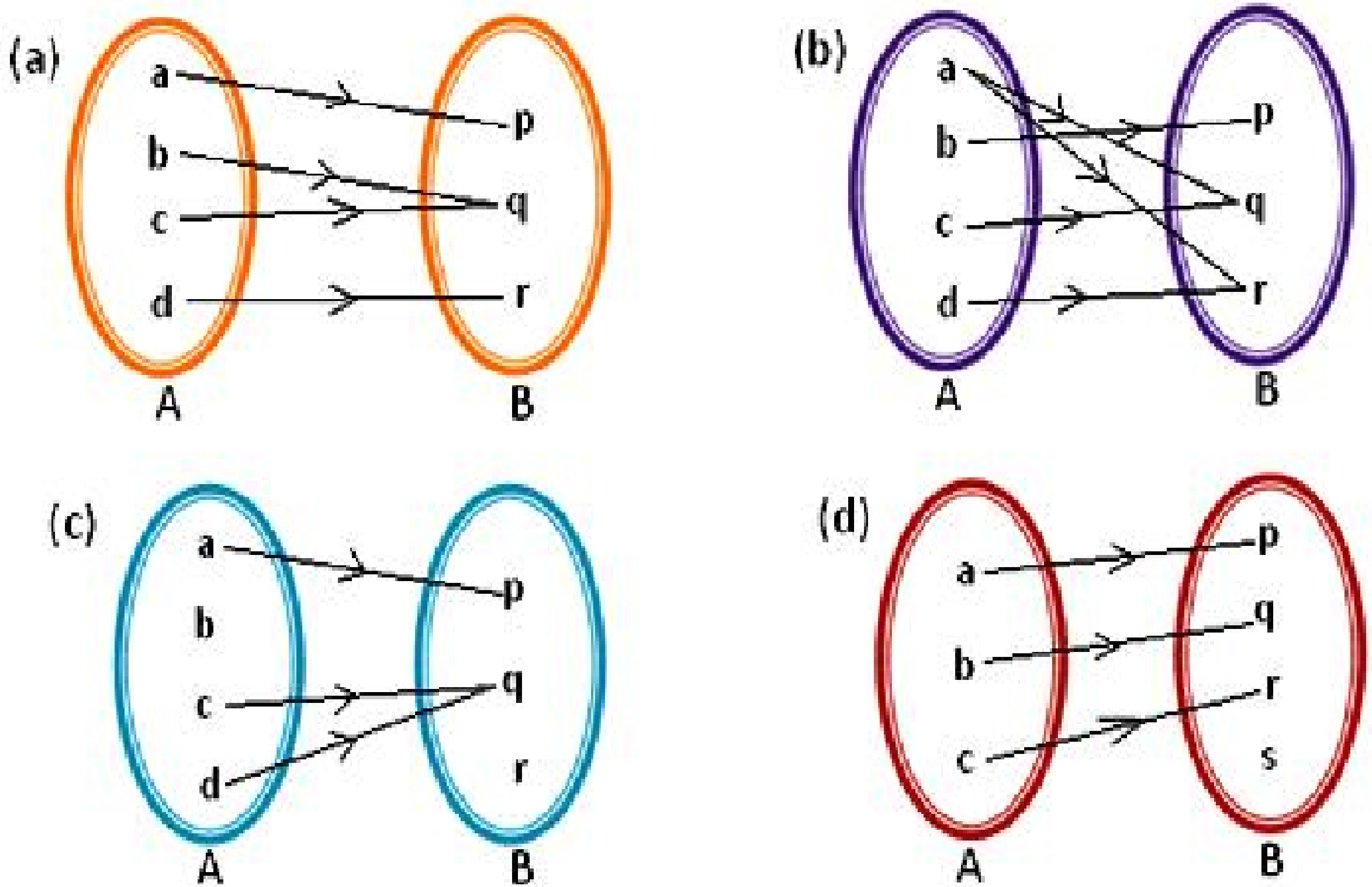
Φοιτητής	Μάθημα
Γιάννης	Μαθηματικά
Μαίρη	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα
Νίκος	Λειτουργικά Συστήματα
Κώστας	Δίκτυα
Κατερίνα	Δίκτυα

Δεν είναι όλες οι αντιστοιχίες απεικονίσεις



πηγή: http://www.wikiwand.com/el/Συνάρτηση

Ομοίως για τις επόμενες



πηγή: http://www.math-only-math.com/Domain-co-domain-and-range-of-function.html

Πεδίο ορισμού & Πεδίο τιμών

Λιάνα Λιγνού: ¨**Η συνάρτηση. Μια προξενήτρα αλλιώτικη από τις άλλες!**
https://www.slideshare.net/eylignou/ss-45849453

Παραδείγματα συναρτήσεων

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto 4 \cdot x^2$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$$
$$x \mapsto \frac{3}{x}$$

Μονώνυμα

Έστω x μια **μεταβλητή** (μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο R).

Μονώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής: $\alpha \cdot x^n$, όπου α ϵ R και n ένας θετικός ακέραιος.

Παράδειγμα: οι παραστάσεις: $7x^3$ $-32x^3$ $45x$

(και οι σταθεροί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν μονώνυμα του x εφόσον $x^0 =$, 1 π.χ. $- 6 = - 6 \cdot x^0$)

Πολυώνυμα

Πολυώνυμο του x είναι κάθε παράσταση με την μορφή:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου $n \in Z+$ και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$.

Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n$, $\alpha_{n-1} x^{n-1}$, …, $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί α_n, …, α_1, α_0 **συντελεστές**.

Ο α_0 ονομάζεται και **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

<u>Παράδειγμα</u>: οι παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x

$$-5x^7 - 2x^3 + x - 4$$

$$7x + 1$$

$$4x^3 - 4x^2 + 10$$

Βαθμός & Ρίζα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$,

όπου $n \in Z+$ & $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$

- Αν $\alpha_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου είναι n (η μέγιστη δύναμη)

  (εξαίρεση αποτελεί ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου που έχει οριστεί = **-**∞)

- **Ρίζα ρ του P(x)** είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $P(\rho) = 0$

Παράδειγμα πολυωνύμου

Έστω $P(x) = x^2 + 4x$

- Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου = ;
- Για x = ; είναι   P(x) = 0

  (δηλ. ρίζα του πολυώνυμου P(x);)

Μαθηματική επαγωγή

Η **μαθηματική επαγωγή** (ή **τέλεια επαγωγή**) είναι μια μέθοδος απόδειξης προτάσεων που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς.

Έστω ότι επιθυμούμε την απόδειξη μιας πρότασης Π(ν), όπου ν ϵ N:

1. Ελέγχουμε ότι Π(1) αληθεύει (το πρώτο ν δηλ.)
2. Θεωρούμε ότι η Π(κ) αληθεύει επίσης (κ ϵ N)
3. Αποδεικνύουμε ότι αληθεύει η Π(κ+1)

Παράδειγμα μαθηματικής επαγωγής

Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν :

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot \nu = \nu \cdot (\nu + 1)$$