Μήτρες
Ειδικές μήτρες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Το διάνυσμα ως μήτρα

- Είδαμε ότι ένα διάνυσμα $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ μπορεί να γραφεί και ως μήτρα 3x1,

  δηλ. μήτρα με <u>3 γραμμές</u> x <u>1 στήλη</u>: $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 2^{\eta} \text{ γραμμή} \\ \leftarrow 3^{\eta} \text{ γραμμή} \end{array} \\ \quad\ \ \uparrow 1^{\eta} \text{ στήλη} & \end{array}$$

Μήτρα γραμμή / Μήτρα στήλη

- Μία μήτρα A_{1xn} λέγεται ‘μήτρα γραμμή’

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

- Όπως και σε ένα διάνυσμα, μία ‘μήτρα στήλη’, έχουμε όταν A_{mx1}

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix}$$

Μήτρα

Μήτρα (ή πίνακας ή μητρώο) είναι ένα σύνολο στοιχείων/αριθμών που κατανέμονται σε μία διάταξη <u>m-γραμμών</u> x <u>n-στηλών</u>:

$$A=\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\text{η}}\ \text{γραμμή} \\ \\ \\ \leftarrow m\ \text{γραμμή} \end{array} \\ \begin{array}{ll} \uparrow 1^{\text{η}}\ \text{στήλη} & \uparrow n\ \text{στήλη} \end{array} & \end{array}$$

Αν **m=n** τότε η Α λέγεται **τετραγωνική μήτρα** και συμβολίζεται A_m

Η Α συμβολίζεται συχνά A_{mxn} ή $A = [\alpha_{ij}]$ ή $A=\left[\alpha_{ij}\right]_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$

Συμβολισμοί

- Ένα στοιχείο της μήτρας A_{mxn} προσδιορίζεται από την γραμμή του & την στήλη του, π.χ.
  - α_{ij} είναι το στοιχείο της $i^{ης}$ γραμμής / $j^{ης}$ στήλης

- Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ τότε:
  - $\alpha_{12} = -2$
  - $\alpha_{33} = \lambda$
  - $\alpha_{32} = \kappa$

κ.ο.κ.

Ισότητα μητρών

Δύο μήτρες Α=$[\alpha_{ij}]$ και Β=$[\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn είναι ίσες αν:

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij},$$

για κάθε $i=1,2, \dots m$ & $j=1,2, \dots n$

Άρα Α = Β όταν:

1. είναι ίσων διαστάσεων &
2. έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα

Άσκηση

- Ποια τα κ & λ τέτοια ώστε A = B;

1. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & \kappa & \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -\kappa-\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. αν $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & \kappa+\lambda & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \kappa-\lambda \end{pmatrix}$

Ειδικές μήτρες Ι

Μηδενική μήτρα: λέγεται η $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ όταν $\alpha_{ij}=0$
για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παραδείγματα:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Ανάστροφη μήτρα A^T της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ji}]_{nxm}$ έτσι ώστε $\beta_{ji}=\alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{pmatrix}$$

Άσκηση

Βρείτε την ανάστροφη μήτρα των επόμενων μητρών:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ειδικές μήτρες ΙΙ

Αντίθετη μήτρα –Α της $A=[\alpha_{ij}]_{mxn}$ λέγεται η $B=[\beta_{ij}]_{mxn}$ όταν $\beta_{ij} = -\alpha_{ij}$ για κάθε $i=1,2..m$ & $j=1,2..n$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$$

Μοναδιαία μήτρα I_n λέγεται η τετραγωνική μήτρα nxn τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = 1$ αν $i=j$ και $\alpha_{ij} = 0$ για $i\neq j$ για κάθε $i=1,2...n$

Παραδείγματα:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ειδικές μήτρες ΙΙΙ

Έστω Α=$[\alpha_{ij}]_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα

- Α άνω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Α κάτω τριγωνική αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Α διαγώνια αν $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Πρόσθεση μητρών

Έστω A = $[\alpha_{ij}]$ και B = $[\beta_{ij}]$ ίδιων διαστάσεων mxn,

τότε $A+B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$, για κάθε i=1,2. . m & j=1,2.. n

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Όμοια ορίζεται και η αφαίρεση μητρών

Βαθμωτό γινόμενο μητρών

Έστω Α = $[\alpha_{ij}]_{mxn}$ και λ ένας αριθμός,

τότε $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]$, για κάθε i=1,2. . m & j=1,2.. n

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -2 \qquad \lambda \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -14 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις

1) Αν $A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ 9 & 24 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $(-\frac{1}{3}) \cdot A$

2) Αν $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 12 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ να υπολογίστε την $C = B + (-\frac{1}{3}) \cdot A$

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα γινομένου μητρών

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Γινόμενο μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{mxr}$ και $B = [\beta_{ij}]_{rxn}$ τότε

$C = A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn}$

όπου c_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i γραμμής με τα αντίστοιχα της j στήλης

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rj} & \dots & \beta_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & c_{ij} & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & \dots & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

ή

$$c_{ij} = \alpha_{i1} \cdot \beta_{1j} + \alpha_{i2} \cdot \beta_{2j} + \dots\dots + \alpha_{ir} \cdot \beta_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot \beta_{kj}$$

Ασκήσεις

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Ασκήσεις$_2$

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = ?$

Τι παρατηρείτε από το αποτέλεσμα στην $2^{η}$ άσκηση;
Μπορείτε να εξάγετε ένα γενικό συμπέρασμα;

Ερωτήσεις κατανόησης

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα …

1. για την πρόσθεση μητρών;
2. για το βαθμωτό γινόμενο μητρών;
3. για το γινόμενο μητρών;

Μια πράξη @ είναι αντιμεταθετική αν:
α @ β = β @ α

Ιδιότητες πρόσθεσης και βαθμωτού γινόμενου μητρών

Πρόσθεση

- $A + B = B + A$
- $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$

όπου O η μηδενική μήτρα

Βαθμωτό γινόμενο

- $(\kappa + \lambda) \cdot A = \kappa \cdot A + \lambda \cdot A$
- $\kappa \cdot (A + B) = \kappa \cdot A + \kappa \cdot B$
- $\kappa \cdot (\lambda \cdot A) = (\kappa \lambda) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού μητρών

Αν $A = [\alpha_{ij}]_{\nu x \kappa}$, $B = [\beta_{ij}]_{\kappa x \lambda}$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{\lambda x \mu}$, $S = [s_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ & $T = [\tau_{ij}]_{\kappa x \lambda}$ και α, β αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $I_\nu \cdot A = A \cdot I_\kappa$
2. $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$
3. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

Προσεταιριστικές ιδιότητες

4. $A \cdot (B + S) = A \cdot B + A \cdot S$ ο πλ/σμός μητρών είναι ‘αριστερά επιμεριστικός’
5. $(B + T) \cdot \Gamma = B \cdot \Gamma + T \cdot \Gamma$ ο πλ/σμός μητρών είναι ‘δεξιά επιμεριστικός’
6. $O_{\lambda x \nu} \cdot A = O_{\lambda x \kappa}$
7. $A \cdot O_{\kappa x \mu} = O_{\nu x \mu}$

Όπου $O_{\lambda x \kappa}$ είναι η μηδενική μήτρα διάστασης λxκ …

Άσκηση

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

και C = O_2, τότε:

O_2: η μηδενική μήτρα 2x2

1. Να δείξετε ότι A · B = O
   Τι συμπεραίνετε; (παρότι $B \neq O_2 \neq A$)

2. Από το προηγούμενο έχουμε ότι A · B = A · C
   Τι συμπεραίνετε και πάλι για τις ιδιότητες των μητρών; (παρότι $B \neq C$)

Συμπέρασμα

Στους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν τα επόμενα:

1. Αν $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
2. Αν $\alpha \cdot \delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{είτε } \alpha = 0 \\ \text{είτε } \delta = 0 \end{cases}$

Αυτές οι ιδιότητες ΔΕΝ ισχύουν στις μήτρες!

(η απόδειξη ονομάζεται με αντιπαράδειγμα)