# Παραδείγματα και Ασκήσεις

**Καρτεσιανό γινόμενο - Παράδειγμα**

Αν $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}$, τότε έχουμε

$$A \times B = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}, B \times A = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, B \times B = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2)\}.$$

**Άσκηση**

*Να υπολογιστούν όσες από τις παραστάσεις $A+B, AB, BA, AA^t$ έχουν νόημα, όπου*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Λύση**

Το $A+B$ δεν ορίζεται γιατί οι $A$,$B$ δεν είναι του αυτού μεγέθους. Το $AB$ δεν ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του $A$ (τρία) δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του $B$ (δύο). Το $BA$ ορίζεται γιατί το πλήθος των στηλών του $B$ είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του $A$. Έχουμε

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 0 + 0\cdot 3 & (-1)\cdot 2 + 0\cdot(-1) & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το $AA^t$ ορίζεται για κάθε $A$, γιατί αν ο $A$ έχει $n$ στήλες, τότε ο ανάστροφος $A^t$ έχει $n$ γραμμές. Έχουμε

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 \\ 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 26 \end{pmatrix}.$$

## Άσκηση

*Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί πίνακες $X$ τέτοιοι ώστε $AX = XA$, όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

## Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι για να ορίζονται τα γινόμενα $AX, XA$ πρέπει ο $X$ να είναι $2\times 2$. Έστω $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
& AX = XA \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+z & 3y+w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+3y & 2x+y \\ z+3w & 2z+w \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
& \begin{pmatrix} 2z-3y & 2w-2x \\ 3x-3w & 3y-2z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} 2z-3y=0 \\ 2w-2x=0 \\ 3x-3w=0 \\ 3y-2z=0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = w, y = \frac{2}{3}z$ με $w, z \in \mathbb{R}$. Άρα οι ζητούμενοι πίνακες είναι οι $X = \begin{pmatrix} w & \frac{2}{3}z \\ z & w \end{pmatrix}, w, z \in \mathbb{R}$.

## Άσκηση

*Έστω ότι ο $A$ είναι ένας πραγματικός πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 - A - I = 0$.*

*Αποδείξτε ότι ο $A - I$ είναι αντιστρέψιμος.*

## Λύση

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$A^2 - A = I \Leftrightarrow A(A-I) = I \Leftrightarrow A(A-I) = (A-I)A = I.$$

Άρα ο $A - I$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με τον Ορισμό

### Άσκηση

*Αποδείξτε ότι* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *για κάθε θετικό ακέραιο n.*

### Λύση

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο $n$. Για $n=1$, η σχέση αληθεύει. Έστω ότι η σχέση αληθεύει για ένα συγκεκριμένο $n$. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + \left(3^n - 2^n\right)3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2 \cdot 2^n + 3^n \cdot 3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

### Άσκηση

*Να υπολογιστεί ο πίνακας* $A^{2005}$, *όπου*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

### Λύση

1. Έχουμε $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ . Άρα

$$A^{2005} = A^{2004} A = \left(A^2\right)^{1002} A = I^{1002} A = IA = A.$$

*Σημείωση*. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$A^2 = I$$
$$A^3 = A^2 A = IA = A$$
$$A^4 = A^3 A = AA = A^2 = I$$
$$A^5 = A^4 A = IA = A.$$

Με βάση αυτά εικάζουμε ότι $A^n = \begin{cases} I, \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ A, \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$ Αυτό αποδεικνύεται

εύκολα με επαγωγή ή ως εξής. Αν $n$ είναι άρτιος, $n=2k$, τότε

**Άσκηση**

Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

1. Να υπολογιστεί η παράσταση $A^2-3A+2I$, όπου $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.
2. Εξετάστε αν ισχύει $AB=BA$.
3. Εξετάστε αν ισχύει $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$.

**Απάντηση** 1. $\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -6 & 0\end{pmatrix}$ 2. $AB=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ 3. Έχουμε

$(A+B)^2=A^2+B^2+2AB \Leftrightarrow AB=BA$ και η τελευταία ισότητα δεν ισχύει.

**Άσκηση**

Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, ο αντίστροφοι των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 1 & 3 & a\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$.

**Απάντηση** $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$. Ο $B$ είναι αντιστρέψιμος αν $a\neq\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ και στην περίπτωση αυτή έχουμε $B^{-1}=\frac{1}{a^2-a-3}\begin{pmatrix}3 & -a & a^2-6\\ a-1 & -1 & -a+2\\ -3 & a & 3-a\end{pmatrix}$.

**Άσκηση**

(i) Να ευρεθεί το μέγεθος των πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt[3]{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -\sqrt[4]{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Λύση*** Ο $A$ είναι $3 \times 5$ πίνακας, ο $B$ είναι $1 \times 5$ πίνακας, ο $C$ είναι $5 \times 1$ πίνακας και ο $D$ είναι $3 \times 3$ πίνακας.

(ii) Ποιες από τις ακόλουθες πράξεις μεταξύ των ανωτέρω πινάκων είναι επιτρεπτές και ποιο είναι το μέγεθος των πινάκων που προκύπτουν μετά την εκτέλεση των πράξεων;

$$A + B, \quad A + A, \quad BA, \quad AB, \quad BC, \quad CB, \quad DA, \quad AD.$$

***Λύση*** Η πρόσθεση πινάκων είναι επιτρεπτή μόνο αν οι προσθετέοι πίνακες είναι ιδίου μεγέθους. Συνεπώς, μόνο η πράξη $A + A$ είναι επιτρεπτή και ο πίνακας που προκύπτει είναι ένας $3 \times 5$ πίνακας.
Ο πολλαπλασιασμός δύο πινάκων είναι επιτρεπτός μόνο αν το πλήθος των στηλών τού πρώτου συμπίπτει με το πλήθος των γραμμών τού δευτέρου. Ο πίνακας που προκύπτει έχει τόσες γραμμές όσες έχει ο πρώτος πίνακας και τόσες στήλες όσες έχει ο δεύτερος πίνακας. Έτσι τα μόνα επιτρεπτά γινόμενα είναι τα:
$BC$ που είναι ένας $1 \times 1$ πίνακας, $CB$ που είναι ένας $5 \times 5$ πίνακας και $DA$ που είναι ένας $3 \times 5$ πίνακας.

**Άσκηση**

Έστω ότι οι $A$, $B$ και $A + B$ είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$$

***Λύση*** (ii)

$$\begin{aligned}
&(A^{-1} + B^{-1})(A(A + B)^{-1}B) = A^{-1}A(A + B)^{-1}B + B^{-1}A(A + B)^{-1}B = \\
&(A + B)^{-1}B + B^{-1}A(A + B)^{-1}B = (I_n + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B = \\
&(B^{-1}B + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B = B^{-1}(B + A)(A + B)^{-1}B = B^{-1}B = I_n.
\end{aligned}$$

*Σημείωση.* Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα όσα αναφέραμε στην αμέσως προηγούμενη άσκηση προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι επίσης ισχύει:

$$(A(A + B)^{-1}B)(A^{-1} + B^{-1}) = I_n.$$

## Άσκηση

Στο σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ των $2\times 2$ πινάκων με συνιστώσες από τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:

$$AB,\ \ BA,\ \ (A+B)^2,\ \ A^2+2AB+B^2,\ \ AC,\ \ CA,\ \ (A+C)^2,\ \ A^2+2AC+C^2,$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ \ \text{και}\ \ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

**Λύση**

$$AB=BA=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

και γι' αυτό

$$(A+B)^2=A(A+B)+B(A+B)=AA+AB+BA+BB=\begin{pmatrix}18 & 18\\ 18 & 18\end{pmatrix}=$$
$$A^2+2AB+B^2.$$

$$AC=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 5 & 8\end{pmatrix}\neq CA=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 11 & 10\end{pmatrix}$$

και γι' αυτό

$$(A+C)^2=AA+AC+CA+CC=\begin{pmatrix}24 & 28\\ 35 & 45\end{pmatrix}\neq$$
$$\begin{pmatrix}26 & 34\\ 29 & 43\end{pmatrix}=A^2+2AC+C^2.$$

Παρατηρούμε ότι για δύο τετραγωνικούς πίνακες $A$ και $B$ ισχύει η σχέση $AB=BA$, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

**Άσκηση** : *Δίνονται οι πίνακες*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

*Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:*

$$A\cdot B,\ \ B\cdot A,\ \ A\cdot C,\ \ C\cdot A,\ \ B\cdot C$$

*Λύση.* Θα έχουμε:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad A\cdot C=\begin{pmatrix}-5\\ 1\end{pmatrix},\qquad B\cdot C=\begin{pmatrix}8\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$$

Οι πίνακες $B\cdot A$ και $C\cdot A$ δεν ορίζονται.

**Άσκηση**

Για ποιες τιμές τού $m$ είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος;

***Λύση*** (iv) Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη–μηδενική. Εδώ έχουμε:

$$\det A = (m+1)(m-1) - 4 = m^2 - 1 - 4 = m^2 - 5.$$

Επομένως, ο $A$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $m \neq \pm\sqrt{5}$.

**Άσκηση** *Να γράψετε αναλυτικά τον* $6 \times 6$ *πίνακα* $A = (a_{ij})$ *όπου* $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.

*Λύση.* Θα έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1+1-2 & 1+1-3 & 1+1-4 & 1+1-5 & 1+1-6 \\ 1+2-1 & 2+2-2 & 2+2-3 & 2+2-4 & 2+2-5 & 2+2-6 \\ 1+3-1 & 2+3-2 & 3+3-3 & 3+3-4 & 3+3-5 & 3+3-6 \\ 1+4-1 & 2+4-2 & 3+4-3 & 4+4-4 & 4+4-5 & 4+4-6 \\ 1+5-1 & 2+5-2 & 3+5-3 & 4+5-4 & 5+5-5 & 5+5-6 \\ 1+6-1 & 2+6-2 & 3+6-3 & 4+6-4 & 5+6-5 & 6+6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση** *Αν* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, *να δειχθεί ότι* $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$.

*Λύση.* Θα έχουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

και άρα:

$$A^2 - 2A - 8I_2 = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14-6-8 & -2+2+0 \\ -10+10+0 & 6+2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

**Άσκηση** *Αν $x, y$ είναι πραγματικοί αριθμοί και*

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

*να δειχθεί ότι οι πίνακες $A$ και $B$ είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι πίνακες $A^{-1}$ και $B^{-1}$, και να δειχθεί ότι:*

$$AB = BA$$

*Λύση.* Θεωρούμε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + sinx \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Τέλος θα έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos x \sin y + \sin x \cos y \\ -\sin x \cos y - \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Παρόμοια:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y \cos x - \sin y \sin x & \cos y \sin x + \sin y \cos x \\ -\sin y \cos x - \cos y \sin x & -\sin y \sin x + \cos y \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Άρα $A \cdot B = B \cdot A$.

**Σχόλιο 1.** *Στην παραπάνω Άσκηση χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές ταυτότητες:*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \textit{και} \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

**Άσκηση**

Για ποιες τιμές τού $m$ είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος;

***Λύση*** (iv) Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι μη–μηδενική. Εδώ έχουμε:

$$\det A = (m+1)(m-1) - 4 = m^2 - 1 - 4 = m^2 - 5.$$

Επομένως, ο $A$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $m \neq \pm\sqrt{5}$.

**Άσκηση** *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Βρείτε τον πίνακα* $A^n, \ n \in \mathbb{N}$.

*Λύση.* Υπολογίζουμε εύκολα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι, $\forall n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής για $n = 1$, $n = 2$. Υποθέτουμε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου $k \geq 3$. Τότε:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα η επαγωγική υπόθεση είναι αληθής για $n = k+1$, και επομένως από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

**Άσκηση** *Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες τής μορφής:*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*Λύση.* Ας είναι $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας πίνακας με $AC = CA$, δηλαδή $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $b = 0$ και $c = d - a$. Επομένως ο πίνακας $C$ είναι της μορφής

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d-a & d \end{pmatrix} \quad (a, d \in \mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον $A$.

Ας είναι $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ ένας πίνακας με $BC = CB$, δηλαδή $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$. Τότε

$$d = 0, \quad g = 0, \quad h = 0, \quad e = a, \quad k = a, \quad f = b$$

Επομένως ο πίνακας $C$ είναι της μορφής

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον $B$.

**Άσκηση**

Έστω ότι $A$ και $B$ είναι δύο $n\times n$ πίνακες και έστω ότι ο $I_n - AB$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.
Να δειχθεί ότι

$$(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n.$$

Να συμπεράνετε ότι ο $(I_n - BA)$ είναι επίσης αντιστρέψιμος.

***Λύση*** (i)

$$\begin{aligned}
&(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = \\
&I_n - BA + (I_n - BA)B(I_n - AB)^{-1}A = \\
&I_n - BA + B(I_n - AB)^{-1}A - BAB(I_n - AB)^{-1}A = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)^{-1}A - AB(I_n - AB)^{-1}A] = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}]A = \\
&I_n - BA + B[(I_n - AB)(I_n - AB)^{-1}]A = \\
&I_n - BA + BA = I_n.
\end{aligned}$$

**Άσκηση**

Ποιες από τις επόμενες εξισώσεις με αγνώστους τα $x_1, x_2, x_3$ είναι γραμμικές;

(1) $x_1 + 2x_3 = 3$, (2) $x_1x_2 + x_2 = 1$, (3) $x_1 - x_2 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_1$,

(4) $x_1 - x_2 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_2$, (5) $|x_1| - |x_2| = 0$, (6) $\pi x_1 + \sqrt{7}x_2 = \sqrt{3}$.

***Λύση*** (i)

Η (1) είναι γραμμική.
Η (2) δεν είναι γραμμική, αφού έχουμε γινόμενο αγνώστων.
Η (3) είναι γραμμική, αφού το δεξιό μέλος της ισούται πάντοτε με 1.
Η (4) δεν είναι γραμμική, αφού το δεξιό μέλος της εμπεριέχει μη–γραμμικές συναρτήσεις επί των αγνώστων.
Η (5) επίσης δεν είναι γραμμική, αφού τώρα έχουμε την εφαρμογή απόλυτων τιμών επί των αγνώστων.
Η (6) είναι γραμμική.

---

**Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα είναι από:**


- Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας (Μιχάλης Μαλιάκας, Μαρία Αδάμ)
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (Α. Μπεληγιάννης)
- Ασκήσεις Γραμμικής 'Αλγεβρας (Ν. Μαρμαρίδης - Κ. Μέξης)