Γραμμικά Συστήματα και Μήτρες

8

8.1 Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Το κύριο θέμα της **γραμμικής άλγεβρας** είναι η λύση συστημάτων (αλγεβρικών) *γραμμικών εξισώσεων*. Στο Λύκειο για την επίλυση συστημάτων δύο και τριών γραμμικών εξισώσεων χρησιμοποιήσατε την μέθοδο της *απαλοιφής*, περιορίζοντας την προσοχή σας σε συστήματα τα οποία έχουν μια και μόνο λύση και βρίσκοντας εφαρμογές σε «πραγματικά προβλήματα» τα οποία έχουν μια και μόνο «απάντηση». Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα μέρος της βασικής ορολογίας της γραμμικής άλγεβρας, εξετάζοντας τη στοιχειώδη τεχνική της απαλοιφής από μια ελαφρώς πιο γενική άποψη. Στις επόμενες ενότητες εφαρμόζουμε την ίδια τεχνική για την επίλυση συστημάτων πολλών γραμμικών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους. Οι εφαρμογές της μεθόδου της απαλοιφής είναι ποικίλες και σημαντικές, επειδή πολλά μαθηματικά προβλήματα εμπλέκουν την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Ας θυμηθούμε ότι αν a, b, και c είναι σταθερές με a και b όχι και οι δύο μηδέν, τότε η γραφική παράσταση της εξίσωσης

$$ax + by = c \tag{1}$$

είναι μια *ευθεία γραμμή* στο επίπεδο xy. Για αυτόν το λόγο, μια εξίσωση της μορφής (1) ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** των **μεταβλητών** x και y. Παρόμοια, μια εξίσωση η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$ax + by + cz = d \tag{2}$$

ονομάζεται **γραμμική** των τριών μεταβλητών x, y, και z (παρόλο που το γράφημα της βρίσκεται στο χώρο xyz και είναι επίπεδο και όχι γραμμή). Έτσι οι εξισώσεις

$$3x - 2y = 5 \quad \text{και} \quad x - 7y + 5z = -11$$

είναι γραμμικές, επειδή περιέχουν μόνο πρώτες δυνάμεις των μεταβλητών τους. Αντίθετα, οι εξισώσεις

$$x + y + xy = 5 \quad \text{και} \quad x^2 + y^3 + \sqrt{z} = 1$$

δεν είναι γραμμικές, επειδή δεν μπορούν να γραφούν χωρίς μεγαλύτερες δυνάμεις, ρίζες και γινόμενα.

Δύο Εξισώσεις με Δύο Αγνώστους

Ένα **σύστημα** γραμμικών εξισώσεων (επίσης ονομάζεται **γραμμικό σύστημα**) είναι απλά μια πεπερασμένη συλλογή γραμμικών εξισώσεων κάποιων μεταβλητών. Πολλές φορές αναφερόμαστε στις μεταβλητές με τον όρο «άγνωστοι» του συστήματος. Έτσι λοιπόν, ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y μπορεί να γραφεί στην μορφή

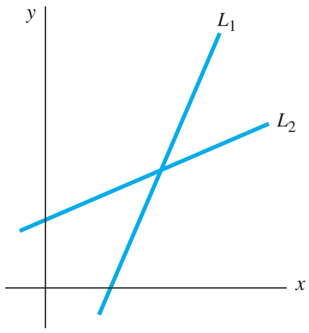
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \quad \textbf{(3)}$$

Λέγοντας **λύση** του συστήματος (3) εννοούμε ένα ζευγάρι τιμών (x, y)—συνήθως πραγματικών αριθμών—οι οποίες ικανοποιούν και τις *δύο* εξισώσεις *ταυτόχρονα*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Οι τιμές $x = 2$, $y = -1$ αποτελούν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \quad \textbf{(4)}$$

επειδή ικανοποιούνται και οι δυο εξισώσεις $2(2) - (-1) = 5$ και $(2) + 2(-1) = 0$. Οι τιμές $x = 3$, $y = 1$ ικανοποιούν την πρώτη Εξίσωση (4) αλλά δεν ικανοποιούν την δεύτερη. Έτσι οι $(3, 1)$ δεν είναι λύση του συστήματος (4).



ΣΧΗΜΑ 8.1.1 Δύο τεμνόμενες ευθείες: μοναδική λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 3 \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

δεν έχει λύση, επειδή αν $x + y = 1$, τότε $2x + 2y = 2$, και έτσι $2x + 2y \neq 3$. Βλέπουμε λοιπόν ότι δύο αριθμοί που ικανοποιούν την πρώτη Εξίσωση της (5) δεν ικανοποιούν ταυτόχρονα και την δεύτερη.

Ένα γραμμικό σύστημα θα λέμε ότι είναι **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση και **ασυμβίβαστο** εάν δεν έχει καμία. Άρα, το σύστημα του Παραδείγματος 1 είναι συμβιβαστό ενώ το σύστημα του Παραδείγματος 2 είναι ασυμβίβαστο.

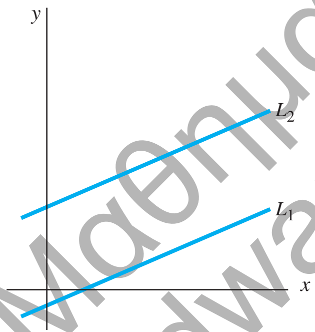
Οι Τρεις Πιθανότητες

Όταν δίνεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, η ερώτηση που προκύπτει είναι: Ποιο είναι το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος; Πιο σύντομα, ποιο είναι το **σύνολο λύσεων** του συστήματος;

Στην περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \textbf{(6)}$$

δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από την βασική γεωμετρία για να διακρίνουμε τις πιθανές λύσεις για το σύνολο λύσεων. Αν καμία Εξίσωση στο (6) δεν έχει στο αριστερό μέρος της και τους δύο συντελεστές μηδέν, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις στο επίπεδο xy είναι δύο ευθείες γραμμές L_1 και L_2. Τότε πρέπει να ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα.

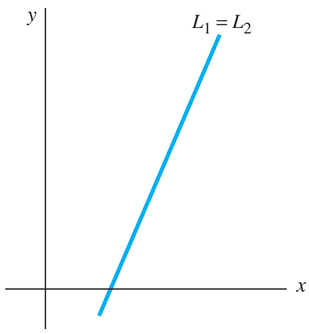


ΣΧΗΜΑ 8.1.2 Δύο παράλληλες ευθείες: καμία λύση.

- Οι ευθείες L_1 και L_2 τέμνονται σε ένα μόνο σημείο (όπως στο Σχήμα 8.1.1).
- Οι ευθείες L_1 και L_2 είναι παράλληλες (όπως στο Σχήμα 8.1.2).
- Οι ευθείες L_1 και L_2 ταυτίζονται— πρακτικά είναι η ίδια γραμμή (όπως στο Σχήμα 8.1.3).

Ένα ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών αποτελεί λύση του συστήματος (6) αν και μόνο αν το σημείο (x, y) στο σύστημα συντεταγμένων βρίσκεται πάνω *και στις δύο* ευθείες L_1 και L_2. Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε από το Σχήμα 8.1.1, ότι υπάρχει ακριβώς ένα τέτοιο σημείο. Στην περίπτωση του Σχήματος 8.1.2, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο, και στην περίπτωση του Σχήματος 8.1.3, υπάρχουν άπειρα τέτοια σημεία—κάθε σημείο της ευθείας $L_1 = L_2$ είναι ένα τέτοιο σημείο. Επομένως βλέπουμε ότι υπάρχουν μόνο *τρεις πιθανότητες* για ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους: Έχει είτε

- ακριβώς μια λύση,
- καμία λύση, ή
- άπειρες λύσεις.



ΣΧΗΜΑ 8.1.3 Δύο ευθείες που ταυτίζονται: άπειρες λύσεις.

Αποτελεί θεμελιώδη αρχή της γραμμικής άλγεβρας (την οποία θα αποδείξουμε στην Ενότητα 8.3) ότι όσες εξισώσεις και όσοι άγνωστοι κι αν εμφανίζονται σε ένα γραμμικό σύστημα πάντα θα υπάρχουν αυτές οι τρεις περιπτώσεις: Ένα γραμμικό σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους είτε έχει **μια μοναδική** λύση , ή δεν έχει λύση, ή έχει άπειρες λύσεις. Είναι αδύνατο, για παράδειγμα, για ένα γραμμικό σύστημα να έχει ακριβώς δύο λύσεις ή να έχει ακριβώς 17 λύσεις.

Η Μέθοδος της Απαλοιφής

Τα τρία επόμενα παραδείγματα μας δείχνουν πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη μέθοδο της απαλοιφής για να λύσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Το να **λύσουμε** ένα σύστημα σημαίνει να προσδιορίσουμε πιο είναι το σύνολό των λύσεων του. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι:

- Αρχικά, προσθέτουμε ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής στην δεύτερη. Η ιδέα είναι να διαλέξουμε το πολλαπλάσιο με τέτοιο τρόπο ώστε να απαλείψουμε των άγνωστο x από την δεύτερη εξίσωση.
- Στην συνέχεια, η νέα εξίσωση περιέχει μόνο τη μεταβλητή y, έτσι λύνουμε απευθείας ως προς y.
- Τελικά, προσδιορίζουμε την τιμή του x με «αναδρομική αντικατάσταση» της τιμής του y στην πρώτη εξίσωση.

Στα Παραδείγματα 3 έως 5 παρουσιάζουμε την μέθοδο στις τρεις περιπτώσεις που αντιστοιχούν στα Σχήματα 8.1.1 έως 8.1.3 (αντίστοιχα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 1 \\ x - 2y &= 8, \end{aligned} \tag{7}$$

πρώτα εναλλάσσουμε τις δύο εξισώσεις

$$\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ 5x + 3y &= 1. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -5 και προσθέτουμε τους όρους που προκύπτουν στη δεύτερη (χωρίς να αλλάξουμε την πρώτη εξίσωση). Έτσι, το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ 13y &= -39. \end{aligned} \tag{8}$$

Τώρα η δεύτερη εξίσωση δίνει αμέσως την τιμή του $y = -3$, και με *αναδρομική αντικατάσταση* της τιμής αυτής στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x = 2y + 8 = 2(-3) + 8 = 2.$$

Θεωρώντας προφανές (προς το παρόν) ότι τα συστήματα (7) και (8) έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, καταλήγουμε ότι το αρχικό σύστημα (7) έχει την *μοναδική λύση* $x = 2$, $y = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 4 \\ 3x + 9y &= 11, \end{aligned} \tag{9}$$

αρχικά πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $\frac{1}{2}$ και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 3x + 9y &= 11. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -3 και προσθέτουμε κάθε αντίστοιχο όρο της στην δεύτερη εξίσωση. Άρα

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 0 &= 5. \end{aligned} \tag{10}$$

Η νέα εξίσωση μας δίνει, $0 = 5$. Τι όμως σημαίνει αυτό; Αν γράψουμε το σύστημα (10) έχουμε

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 0x + 0y &= 5. \end{aligned}$$

Επειδή προφανώς το 0 δεν είναι ίσο με το 5, *δεν υπάρχουν* τιμές x και y που να ικανοποιούν την δεύτερη εξίσωση. Επομένως δεν υπάρχουν ούτε τιμές που να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις ταυτόχρονα. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το αρχικό σύστημα (9) *δεν έχει λύσεις*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Αν αντί του συστήματος (9), είχαμε ξεκινήσει στο Παράδειγμα 4 με το σύστημα,

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 4 \\ 3x + 9y &= 6 \end{aligned} \tag{11}$$

και είχαμε εφαρμόσει τους ίδιους μετασχηματισμούς, θα είχαμε βρει, αντί του (10) το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Εδώ, $0 = 0$ είναι η συντομογραφία για την εξίσωση

$$0x + 0y = 0,$$

η οποία ικανοποιείται για *όλες* τις τιμές x και y. Όσο αφορά τους περιορισμούς ή τις συνθήκες για το x και y, μια από τις αρχικές δύο εξισώσεις εξαφανίστηκε, αφήνοντάς μας με την εξίσωση

$$x + 3y = 2. \tag{13}$$

Φυσικά αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, γιατί κάθε Εξίσωση στο (11) είναι πολλαπλάσιο της εξίσωσης του (13). Κατά κάποιο τρόπο είχαμε ήδη από την αρχή μία μόνο εξίσωση. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (13) το y με οποιαδήποτε τιμή θέλουμε και στην συνέχεια να λύσουμε ως προς x. Έτσι το σύστημά μας στην (11) έχει *άπειρες λύσεις*. Για να τις εκφράσουμε, ας γράψουμε όπου $y = t$, όπου t είναι μια νέα **παράμετρος** την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τα ζεύγη των λύσεων (x, y). Τότε η Εξίσωση (13) μας δίνει $x = 2 - 3t$, έτσι οι άπειρες του συστήματος (11) είναι:

$$x = 2 - 3t, \quad y = t$$

καθώς η αυθαίρετη παράμετρος t μπορεί να πάρει όλες τις τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, αν $t = 2$ τότε έχουμε την λύση $(-4, 2)$, και αν $t = -3$ έχουμε την λύση $(11, -3)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Υπάρχει μια σχετική ευελιξία στο πώς παραμετροποιούνται οι άπειρες λύσεις ενός συστήματος. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να παραμετροποιήσουμε τις λύσεις του συστήματος (11) διαφορετικά, γράφοντας $x = s$ στην (13), παίρνοντας έτσι μια *διαφορετική* παραμετροποίηση

$$x = s, \quad y = \tfrac{1}{3}(2 - s)$$

η οποία δίνει τις *ίδιες* λύσεις. Για παράδειγμα, οι τιμές της παραμέτρου $s = -4$ και $s = 11$ μας δίνουν τις προηγούμενες λύσεις $(-4, 2)$ και $(11, -3)$ του αρχικού συστήματος (13).

Σχόλιο Αυτά τα τρία παραδείγματα επεξηγούν τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου της απαλοιφής, στην οποία «μετασχηματίζουμε» ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόζοντας μια ακολουθία βημάτων που δεν αλλάζουν τις λύσεις του συστήματος. Κάθε ένα από αυτά τα βήματα αποτελείται από έναν από τους τρεις **στοιχειώδεις μετασχηματισμούς**:

1. Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση με μια μη μηδενική σταθερά.
2. Εναλλάσσουμε δύο εξισώσεις.
3. Προσθέτουμε ένα πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης σε μια άλλη εξίσωση.

Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου θα συζητήσουμε τη συστηματική χρήση αυτών των στοιχειωδών μετασχηματισμών για την διαδοχική απαλοιφή αγνώστων σε οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα, ανεξάρτητα από τον αριθμό των εξισώσεων και των αγνώστων. Με τον τρόπο αυτό θα δούμε ότι κάθε γραμμικό σύστημα αντιστοιχεί σε ακριβώς μία από τις τρεις καταστάσεις που απεικονίζονται στα Παραδείγματα 3 έως 5. Δηλαδή, είτε

- υπάρχει μία μοναδική λύση για το σύστημα (όπως στο Παράδειγμα 3), ή
- δεν υπάρχει λύση για το σύστημα (όπως στο Παράδειγμα 4), ή
- το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Τρεις Εξισώσεις με Τρεις Αγνώστους

Στην περίπτωση ενός συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x, y, και z, μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Υποθέτουμε ότι η πρώτη εξίσωση περιέχει τον άγνωστο x και τη χρησιμοποιούμε για να απαλείψουμε το x από την δεύτερη και την τρίτη εξίσωση προσθέτοντας το κατάλληλο πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης. Στην συνέχεια, υποθέτουμε ότι η δεύτερη εξίσωση περιέχει τον άγνωστο y και χρησιμοποιούμε την νέα δεύτερη εξίσωση για να απαλείψουμε το y από την τρίτη. Λύνουμε την νέα τρίτη εξίσωση ως προς z, αντικαθιστούμε αναδρομικά στη δεύτερη εξίσωση για να προσδιορίσουμε το y, και, τελικά, με αναδρομική αντικατάσταση των y και z στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε το x. Τα ακόλουθα δύο παραδείγματα περιγράφουν αυτή τη διαδικασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Λύστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 8y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 9z &= 23. \end{aligned} \tag{14}$$

Λύση Αρχικά, προσθέτουμε στην δεύτερη εξίσωση -3 φορές την πρώτη και το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2y + 4z &= 8 \\ 2x + 7y + 9z &= 23. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια η πρόσθεση -2 φορές της πρώτης εξίσωσης στην τρίτη δίνει

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2y + 4z &= 8 \\ 3y + 7z &= 15. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε απαλείψει το x από την δεύτερη και την τρίτη εξίσωση. Για να απλοποιήσουμε την διαδικασία απαλοιφής του y από την τρίτη εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με $\frac{1}{2}$, και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ 3y + 7z &= 15. \end{aligned}$$

Τελικά, η πρόσθεση -3 φορές της δεύτερης εξίσωσης στην τρίτη μας δίνει

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3. \end{aligned} \tag{15}$$

Αυτό το σύστημα έχει *τριγωνική* μορφή η οποία κάνει εύκολη την επίλυση του. Με αναδρομική αντικατάσταση του $z = 3$ στην δεύτερη εξίσωση στο (15), βρίσκουμε ότι

$$y = 4 - 2z = 4 - 2(3) = -2;$$

τότε η πρώτη εξίσωση δίνει

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y - z \\ &= 4 - 2(-2) - (3) = 5. \end{aligned}$$

Επομένως το αρχικό σύστημα (14) έχει την μοναδική λύση $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$.

Παρατήρηση Τα βήματα με τα οποία μετασχηματίσαμε το (14) στο (15) μας δείχνουν ότι κάθε λύση του συστήματος (14) είναι λύση του συστήματος στο (15). Βέβαια αυτά τα βήματα μπορούν να αντιστραφούν για να δείξουμε παρόμοια ότι κάθε λύση του συστήματος (15) είναι επίσης λύση του συστήματος (14). Έτσι τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα με την έννοια ότι έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων. Από τον υπολογισμό στο τέλος του Παραδείγματος βλέπουμε ότι το (15) έχει την μοναδική λύση $(x, y, z) = (5, -2, 3)$, και προκύπτει ότι αυτή είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (14).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Λύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x - 8y + 10z &= 22 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x - 9y - 8z &= -11. \end{aligned} \tag{16}$$

Λύση Για να αποφύγουμε τα κλάσματα στην απαλοιφή του x, πρώτα αντιμεταθέτουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ 3x - 8y + 10z &= 22 \\ 2x - 9y - 8z &= -11. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας -3 φορές την πρώτη εξίσωση στην δεύτερη έχουμε

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ y + 4z &= 7 \\ 2x - 9y - 8z &= -11, \end{aligned}$$

και έπειτα προσθέτοντας -2 φορές την πρώτη εξίσωση στην τρίτη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ y + 4z &= 7 \\ -3y - 12z &= -21. \end{aligned}$$

Τελικά, προσθέτοντας 3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ y + 4z &= 7 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

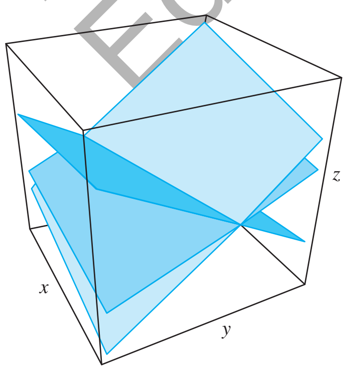
Επειδή η τρίτη εξίσωση έχει εξαφανισθεί, μπορούμε αυθαίρετα να επιλέξουμε $z = t$ και μετά να λύσουμε για x και y:

$$\begin{aligned} y &= 7 - 4z = 7 - 4t, \\ x &= 5 + 3y - 2z \\ &= 5 + 3(7 - 4t) - 2t = 26 - 14t. \end{aligned}$$

Έτσι το σύστημα (16) έχει άπειρες λύσεις. Επιπλέον, ένας βολικός τρόπος για να τις περιγράψουμε είναι:

$$x = 26 - 14t, \quad y = 7 - 4t, \quad z = t. \tag{18}$$

Η αυθαίρετη παράμετρος t μπορεί να πάρει για τιμές όλους του πραγματικούς αριθμούς, και έτσι να δημιουργήσει όλες (τις άπειρες) λύσεις του αρχικού συστήματος (16). Στο Σχήμα 8.1.4 βλέπουμε τα τρία επίπεδα που αντιστοιχούν στις τρεις εξισώσεις του (16). Αυτά τα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος της ευθείας που παραμετροποιήται από τις εξισώσεις στο (18).



ΣΧΗΜΑ 8.1.4 Τα τρία επίπεδα του Παραδείγματος 7.

Εφαρμογή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά η οποία πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε την γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης όπου γενικά περιέχονται *δυο* αυθαίρετες σταθερές. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης συνήθως περιλαμβάνει *δυο* αρχικές συνθήκες, η εφαρμογή των οποίων οδηγεί σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τις δύο αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Αν A και B είναι σταθερές και

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}, \tag{19}$$

με παραγώγιση έχουμε

$$y'(x) = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x} \tag{20}$$

και

$$y''(x) = 9Ae^{3x} + 9Be^{-3x} = 9y(x).$$

Έτσι η συνάρτηση $y(x)$ που ορίζεται από την (19) ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης

$$y'' - 9y = 0. \tag{21}$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών το οποίο αποτελείται από την διαφορική εξίσωση και τις δύο αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 7, \quad y'(0) = 9. \tag{22}$$

Τότε αντικαθιστώντας με $x = 0$ στην (19) και (20) έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ 3A - 3B &= 9 \end{aligned}$$

το οποίο δίνει άμεσα ότι $A = 5$ και $B = 2$. Επομένως, η λύση

$$y(x) = 5e^{3x} + 2e^{-3x}$$

ικανοποιεί και την διαφορική εξίσωση (21) και τις αρχικές συνθήκες (22).

8.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 22, χρησιμοποιήστε την μέθοδο της απαλοιφής για να προσδιορίσετε εάν το σύστημα είναι συμβιβαστό ή όχι. Για κάθε συμβιβαστό σύστημα, βρείτε την μοναδική λύση του, διαφορετικά περιγράψτε το σύνολο των άπειρων λύσεων χρησιμοποιώντας μια αυθαίρετη παράμετρο t (όπως στα Παραδείγματα 5 και 7).

1. $\begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ x - y &= 8 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 5y &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x - 6y &= 1 \\ 6x - 5y &= 10 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 4x - 2y &= 4 \\ 6x - 3y &= 7 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - 4y &= -10 \\ -2x + 8y &= 20 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x - 6y &= 12 \\ 2x - 4y &= 8 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x + 5y + z &= 2 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + 7y + 2z &= 3 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ 2x + 7y + 7z &= -1 \\ 2x + 5y + 2z &= 7 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x + 7y + 3z &= 11 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 7y + 9z &= -12 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 13 \\ 2x + 7y + z &= 28 \\ x + 7y + 2z &= 32 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 3x + 9y + 7z &= 0 \\ 2x + 7y + 4z &= 0 \\ 2x + 6y + 5z &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 4x + 9y + 12z &= -1 \\ 3x + y + 16z &= -46 \\ 2x + 7y + 3z &= 19 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 5 \\ x - y + 3z &= 3 \\ 3x + y + 8z &= 10 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 6 \\ x + 4y - z &= 4 \\ 5x + 6y + z &= 20 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 7 \\ 3x + 2y - 2z &= 3 \\ 5x + y + 2z &= 15 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x + 5y + 6z &= 3 \\ 5x + 2y - 10z &= 1 \\ 8x + 17y + 8z &= 5 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 \\ 2x - y - 4z &= 13 \\ x - y - z &= 5 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 15 \\ Thevaluesx + 4y + z &= 20 \\ x + 2y + 3z &= 10 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 4x + y + 5z &= 14 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 23 έως 30, δίνονται η διαφορική εξίσωση και η γενική λύση $y(x)$. Προσδιορίστε τις σταθερές A και B για να βρείτε την μερική λύση η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες για $y(0)$ και $y'(0)$.

23. $y'' + 4y = 0$, $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$,
$y(0) = 3$, $y'(0) = 8$

24. $y'' - 9y = 0$, $y(x) = A\cosh 3x + B\sinh 3x$,
$y(0) = 5$, $y'(0) = 12$

25. $y'' - 25y = 0$, $y(x) = Ae^{5x} + Be^{-5x}$,
$y(0) = 10$, $y'(0) = 20$

26. $y'' - 121y = 0$, $y(x) = Ae^{11x} + Be^{-11x}$,
$y(0) = 44$, $y'(0) = 22$

27. $y'' + 2y' - 15y = 0$, $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-5x}$,
$y(0) = 40$, $y'(0) = -16$

28. $y'' - 10y' + 21y = 0$, $y(x) = Ae^{3x} + Be^{7x}$,
$y(0) = 15$, $y'(0) = 13$

29. $6y'' - 5y' + y = 0$, $y(x) = Ae^{x/2} + Be^{x/3}$,
$y(0) = 7$, $y'(0) = 11$

30. $15y'' + y' - 28y = 0$, $y(x) = Ae^{4x/3} + Be^{-7x/5}$,
$y(0) = 41$, $y'(0) = 164$

31. Ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0, \end{aligned}$$

του οποίου οι σταθερές στο δεξί μέρος είναι όλες μηδέν, λέγεται **ομογενές**. Εξηγήστε με γεωμετρική συλλογιστική γιατί ένα τέτοιο σύστημα έχει είτε μια μοναδική λύση ή άπειρες λύσεις. Στην πρώτη περίπτωση, ποια είναι η μοναδική λύση;

32. Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

δυο εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(α΄) Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η γραφική παράσταση κάθε τέτοιας εξίσωσης είναι ένα επίπεδο στο χώρο xyz για να εξηγήσετε γιατί ένα τέτοιο σύστημα είτε δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

(β΄) Εξηγήστε γιατί το σύστημα πρέπει να έχει άπειρες λύσεις αν $d_1 = 0 = d_2$.

33. Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}$$

τριών εξισώσεων με τρεις άγνωστους αναπαρίσταται με τρεις γραμμές L_1, L_2, και L_3 στο xy-επίπεδο. Στο Σχήμα 8.1.5 βλέπουμε τους έξι πιθανούς σχηματισμούς αυτών των ευθειών. Για κάθε περίπτωση περιγράψτε το σύνολο των λύσεων του συστήματος.

34. Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους για να αντιπροσωπεύσουμε τα τρία επίπεδα P_1, P_2, και P_3 στον χώρο xyz. Περιγράψτε το σύνολο των λύσεων του συστήματος σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(α΄) Τα τρία επίπεδα είναι διακριτά και παράλληλα.

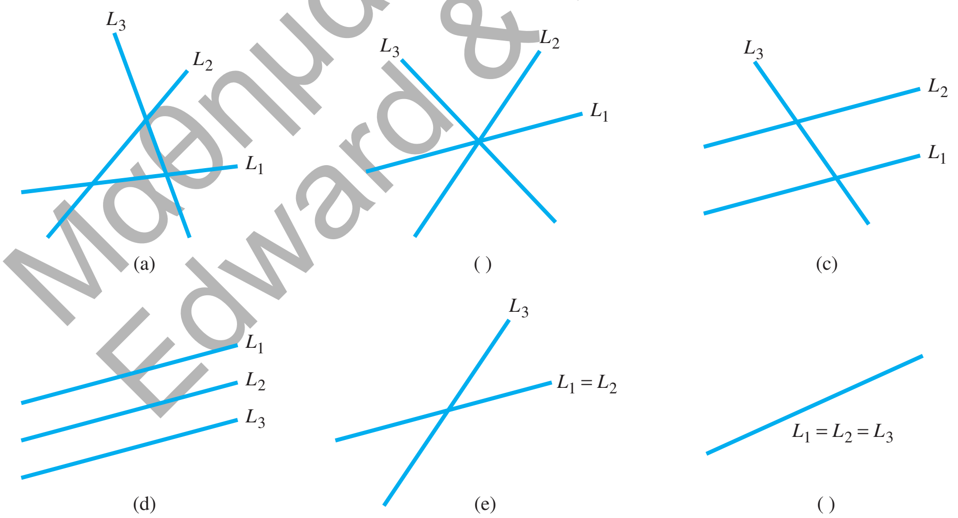
(β΄) Τα τρία επίπεδα συμπίπτουν—$P_1 = P_2 = P_3$.

(γ΄) P_1 και P_2 συμπίπτουν και είναι παράλληλα στο P_3.

(δ΄) P_1 και P_2 τέμνονται στην γραμμή L η οποία είναι παράλληλη στο P_3.

(ε΄) P_1 και P_2 τέμνονται στην γραμμή L η οποία βρίσκεται στο P_3.

(ϛ΄) P_1 και P_2 τέμνονται στην γραμμή L η οποία τέμνει το P_3 σε ένα μοναδικό σημείο.



ΣΧΗΜΑ 8.1.5 Οι τρεις ευθείες στο επίπεδο (Πρόβλημα 33).

8.2 Μήτρες και Κλιμακωτή Μορφή

Στο Παράδειγμα 6 της Ενότητας 81 εφαρμόσαμε την μέθοδο της απαλοιφής για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 1z &= 4 \\ 3x + 8y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 9z &= 23. \end{aligned} \tag{1}$$

Εφαρμόσαμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς για να μετατρέψουμε το σύστημα στο ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 1z &= 4 \\ 0x + 1y + 2z &= 4 \\ 0x + 0y + 1z &= 3, \end{aligned} \tag{2}$$

το οποίο μπορέσαμε να λύσουμε εύκολα με αναδρομική αντικατάσταση. Εδώ έχουμε τυπώσει έγχρωμα του συντελεστές και τους σταθερούς (ακόμα και τους 0 και 1 που συνήθως παραλείπονται). Επειδή οτιδήποτε άλλο–τα σύμβολα x, y, και z των αγνώστων και τα πρόσημα + και = —είναι επιπλέον φορτίο που σημαίνει μόνο επιπλέον γράψιμο. Έτσι, στο Παράδειγμα 6 χρησιμοποιήσαμε μια κατάλληλη ακολουθία μετασχηματισμών για να μετατρέψουμε την διάταξη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix} \tag{3}$$

των συντελεστών και σταθερών του (1) στην διάταξη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

των συντελεστών και σταθερών του (2).

Ορθογώνιες διατάξεις αριθμών όπως αυτοί στις (3) και (4) ονομάζονται *μήτρες*. Επομένως, η **μήτρα** είναι απλά μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, οι οποίοι καλούνται **εγγραφές** ή **στοιχεία** της μήτρας. Το **μέγεθος**, ή το **σχήμα**, της μήτρας προσδιορίζεται από το πόσες οριζόντιες **γραμμές** και κάθετες **στήλες** έχει. Κάθε μήτρα στις (3) και (4) έχει τρεις γραμμές και τέσσερις στήλες, άρα είναι μια μήτρα 3×4 (διαβάζεται «τρία επί τέσσερα»). *Πάντα* προσδιορίζουμε *πρώτα* των αριθμό των γραμμών και *μετά* τον αριθμό των στηλών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

έχουν μέγεθος 2×2, 1×4, και 3×1, αντίστοιχα.

Μήτρες των Συντελεστών

Ένα γενικό γραμμικό σύστημα m γραμμικών εξισώσεων και n αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{5}$$

Παρατηρήστε ότι με a_{ij} συμβολίζουμε τους (σταθερούς) συντελεστές της i εξίσωσης της j μεταβλητής x_j και ότι με b_i συμβολίζουμε την σταθερά στο δεξί μέρος της i εξίσωσης. Έτσι ο πρώτος δείκτης i αναφέρεται στην εξίσωση και ο δεύτερος δείκτης j αναφέρεται στον άγνωστο. Για παράδειγμα, με a_{32} συμβολίζουμε των συντελεστή του x_2 της τρίτης εξίσωσης. Αυτό το σχέδιο της συστηματικής χρήσης διπλών δεικτών μας επιτρέπει να καθορίζουμε άμεσα τη θέση κάθε συντελεστή σε ένα σύστημα με πολλές εξισώσεις και πολλούς αγνώστους. Επίσης μας βοηθά να απαλλαγούμε από τις περιττές πληροφορίες του 5), εστιάζοντας την προσοχή μας μόνο στους συντελεστές.

Η **μήτρα των συντελεστών** του γραμμικού συστήματος του (5) είναι η $m \times n$ μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε **έντονα** κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε τις μήτρες και μικρά γράμματα για να συμβολίσουμε αριθμούς. Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σύντομα σε μια μήτρα **A** και στα στοιχεία της, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} (i \text{ γραμμή}) \\ (j \text{ στήλη}) \end{array} \tag{7}$$

Ο πρώτος δείκτης i προσδιορίζει την γραμμή και ο δεύτερος δείκτης j την στήλη **A** στην οποία εμφανίζεται το στοιχείο a_{ij}:

Πρώτος δείκτης	Δεύτερος δείκτης
Γραμμή	Στήλη

Παρόλο που η χρήση των διπλών δεικτών μπορεί φαίνεται κουραστική όταν τη συναντά κανείς για πρώτη φορά, θα διαπιστώσετε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Για παράδειγμα, οι διπλοί δείκτες παραπέμπουν στο συμβολισμό που χρησιμοποιείται στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού. Πολλές πρακτικές εφαρμογές οδηγούν σε γραμμικά συστήματα με εκατοντάδες ή ακόμα και χιλιάδες αγνώστους και εξισώσεις. Στα τυπικά συστήματα υπολογιστών, η μήτρα των συντελεστών **A** ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί σε μια δισδιάστατη διάταξη όπου η $A(i, j)$ συμβολίζεται με a_{ij}. Με αυτή την προσέγγιση, ο υπολογιστής μπορεί να χειριστεί μια μήτρα 100×100 με τον ίδιο τρόπο που μπορεί να χειριστεί μια μήτρα 3×3 .

Οι μήτρες (3) και (4) δεν περιέχουν μόνο τους συντελεστές αλλά και τις σταθερές του δεξιού μέρους των συστημάτων (1) και (2). Ας γράψουμε

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

για την στήλη των σταθερών στη γενική μορφή (5). Μια $m \times 1$ μήτρα—δηλαδή, μια μήτρα με μια μόνο στήλη—συχνά καλείται (**στήλη**) **διάνυσμα** και συμβολίζεται με έντονα γράμματα. Όταν επισυνάπτουμε το σταθερό διάνυσμα **b** στην μήτρα των συντελεστών **A** (ως μια τελική στήλη), έχουμε την μήτρα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Μια τέτοια $m \times (n + 1)$ μήτρα ονομάζεται **επαυξημένη μήτρα των συντελεστών**, ή απλά η επαυξημένη μήτρα του $m \times n$ συστήματος (5).

Παρόλο που η περιγραφή της επαυξημένης μήτρας ενός *γενικού* γραμμικού συστήματος χρειάζεται αρκετή δουλειά, είναι εξαιρετικά απλό να γράψουμε την επαυξημένη μήτρα ενός *συγκεκριμένου* συστήματος. Αν το σύστημα είναι γραμμένο με κιμωλία σε μαυροπίνακα με τις μεταβλητές στην ίδια σειρά για κάθε εξίσωση, διαγράφουμε απλώς όλα τα x_j, τα συν και τα σύμβολα της ισότητας και εισάγουμε ένα μηδενικό σε κάθε σημείο στο οποίο ο άγνωστος λείπει από την εξίσωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Η επαυξημένη μήτρα των συντελεστών του συστήματος τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad - 9x_4 &= 17 \end{aligned}$$

είναι μια 3×5 μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -9 & 17 \end{bmatrix}.$$

Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Στην Ενότητα 8.1 περιγράψαμε τις τρεις στοιχειώδεις πράξεις που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο της απαλοιφής. Σε κάθε μία από αυτές αντιστοιχεί μια *στοιχειώδης πράξη γραμμών* στην επαυξημένη μήτρα του συστήματος. Για παράδειγμα, όταν εναλλάσσουμε δύο εξισώσεις στο σύστημα, εναλλάσσονται και οι αντίστοιχες γραμμές της επαυξημένης μήτρας των συντελεστών.

ΟΡΙΣΜΟΣ Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Οι τρεις τύποι των **στοιχειωδών πράξεων γραμμών** μιας μήτρας **A** είναι:

1. Πολλαπλασιασμός οποιασδήποτε (μιας μόνο) γραμμής της **A** με μια μη μηδενική σταθερά.
2. Εναλλαγή δύο γραμμών της **A**.
3. Πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής της **A** σε μια άλλη γραμμή.

Στο Σχήμα 8.2.1 βλέπουμε συνοπτικά τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \tag{10}$$

βλέπουμε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης 3 φορές της 1η γραμμής στην 2η. Σημειώστε ότι, όταν εφαρμόζουμε την πράξη $(c)R_p + R_q$ σε μια μήτρα—δηλαδή, όταν προσθέτουμε c φορές την γραμμή p στην γραμμή q— η γραμμή p δεν αλλάζει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 23, \end{aligned} \tag{11}$$

του οποίου η επαυξημένη μήτρα των συντελεστών είναι αυτή που φαίνεται στην (3), πραγματοποιούμε την εξής ακολουθία πράξεων γραμμών, που αντιστοιχούν στα βήματα επίλυσης του Παραδείγματος 6 της Ενότητας 8.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Είδος	Πράξη Γραμμών	Συμβολισμός
1	Πολλαπλασιασμός της p γραμμής με c	cR_p
2	Εναλλαγή των γραμμών p και q	ΕΝΑΛΛΑΓΗ(R_p, R_q)
3	Πρόσθεση c φορές την γραμμή p στην γραμμή q	$(c)R_p + R_q$

ΣΧΗΜΑ 8.2.1 Συμβολισμός για τις στοιχειώδης πράξεις γραμμών.

$$\xrightarrow{(-3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(13)}$$

Η τελική μήτρα είναι η επαυξημένη μήτρα του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}. \qquad \textbf{(14)}$$

το οποίο έχει μοναδική λύση (που βρίσκεται εύκολα με αναδρομική αντικατάσταση) την $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

Δεν είναι αυτονόητο ότι μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων γραμμών παράγει ένα γραμμικό σύστημα που έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό. Για να φανεί αυτό χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γραμμοϊσοδυναμες Μήτρες

Δύο μήτρες καλούνται **γραμμοϊσοδυναμες** εάν η μία μπορεί να προκύψει από την άλλη εφαρμόζοντας μια (πεπερασμένη) ακολουθία στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Έτσι οι δύο μήτρες στην (10) είναι γραμοϊσοδύναμες, όπως και οι μήτρες στις (12) και (13). Στο Πρόβλημα 29 σας ζητείται να δείξετε ότι αν μια μήτρα **B** μπορεί να προκύψει από μια μήτρα **A** με στοιχειώδείς πράξεις γραμμών, τότε και η **A** μπορεί να προκύψει από την **B** με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι «αντιστρέψιμες». Στο Πρόβλημα 30 προτείνουμε μια απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ισοδύναμα Συστήματα και Ισοδύναμες Μήτρες

Αν οι επαυξημένες μήτρες των συντελεστών των δύο γραμμικών συστημάτων είναι γραμοϊσοδύναμες, τότε τα δύο συστήματα έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Έτσι, τα γραμμικά συστήματα (11) και (14) έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, επειδή οι επαυξημένες μήτρες (12) και (13) είναι γραμοϊσοδύναμες.

Κλιμακωτές Μήτρες

Έως αυτό το σημείο έχουμε δει μια άτυπη περιγραφή της μεθόδου της απαλοιφής. Στόχος της μεθόδου είναι να μετατρέψει ένα δοσμένο γραμμικό σύστημα, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, σε μια μορφή όπου με αναδρομική αντικατάσταση εύκολα προκύπτει η λύση του συστήματος. Ο ακόλουθος ορισμός μας λέει πώς πρέπει να είναι η μορφή της επαυξημένης μήτρας των συντελεστών του μετασχηματισμένου συστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ Κλιμακωτή Μήτρα

Η μήτρα $\mathbf{E}$ ονομάζεται **κλιμακωτή μήτρα** εφόσον έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

1. Κάθε γραμμή της $\mathbf{E}$ που αποτελείται αποκλειστικά από μηδενικά (εάν υπάρχουν) βρίσκεται *κάτω από* κάθε γραμμή που περιέχει ένα μη μηδενικό στοιχείο.
2. Σε κάθε γραμμή της $\mathbf{E}$ που περιέχει ένα μη μηδενικό στοιχείο, το *πρώτο* μη μηδενικό στοιχείο βρίσκεται αυστηρά στα *δεξιά* του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της προηγούμενης σειράς (εάν υπάρχει προηγούμενη σειρά).

Οι κλιμακωτές μήτρες ορισμένες φορές ονομάζονται *κλιμακωτές μορφές κατά γραμμές*. Η ιδιότητα 1 μας λέει ότι αν μια $\mathbf{E}$ έχει μηδενικές γραμμές, τότε όλες βρίσκονται στο κάτω μέρος της μήτρας. Το πρώτο (από αριστερά) *μη μηδενικό* στοιχείο καθεμίας από τις υπόλοιπες γραμμές ονομάζεται **ηγετικό στοιχείο**. Η ιδιότητα 2 μας λέει ότι ηγετικά στοιχεία σχηματίζουν «φθίνουσα κλίμακα» από τα αριστερά προς τα δεξιά, όπως στην κλιμακωτή μήτρα που ακολουθεί.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εδώ έχουμε επισημάνει τα ηγετικά στοιχεία και και την φθίνουσα κλίμακα που σχηματίζεται.

Η ακόλουθη λίστα εμφανίζει *όλες* τις πιθανές μορφές μιας 3×3 κλιμακωτής μήτρας, με αστερίσκους να συμβολίζουν τα (μη μηδενικά) ηγετικά στοιχεία, ενώ με τα στοιχεία που μπορεί να είναι ή να μην είναι μηδέν.

$$\begin{bmatrix} * & \# & \# \\ 0 & * & \# \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & \# & \# \\ 0 & * & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & \# & \# \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & * & \# \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & * & \# \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, από τις Ιδιότητες 1 και 2 έχουμε ότι τα στοιχεία που βρίσκονται *κάτω* από κάθε ηγετικό στοιχείο στην ίδια στήλη είναι όλα μηδέν. Οι μήτρες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτές μήτρες επειδή η $\mathbf{A}$ δεν έχει την Ιδιότητα 1 και η $\mathbf{B}$ δεν έχει την Ιδιότητα 2.

Υποθέστε ότι ένα γραμμικό σύστημα βρίσκεται σε **κλιμακωτή μορφή**—δηλαδή η επαυξημένη μήτρα του είναι κλιμακωτή μήτρα. Τότε οι άγνωστοι που αντιστοιχούν σε *στήλες* οι οποίες περιέχουν ηγετικά στοιχεία ονομάζονται **ηγετικοί άγνωστοι**, ενώ όλοι οι άλλοι ονομάζονται **ελεύθεροι άγνωστοι**. Ο ακόλουθος αλγόριθμός περιγράφει την διαδικασία της **αναδρομικής αντικατάστασης** που επιλύει το σύστημα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Αναδρομική Αντικατάσταση

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα σε κλιμακωτή μορφή με αναδρομική αντικατάσταση, εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα

1. Ορίζουμε κάθε ελεύθερη μεταβλητή ίση με μια αυθαίρετη παράμετρο (διαφορετική για κάθε ελεύθερη μεταβλητή).
2. Λύνουμε την *τελευταία* (μη μηδενική) εξίσωση ως προς τον ηγετικό άγνωστο.
3. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην προτελευταία εξίσωση και στη συνέχεια λύνουμε ως προς τον ηγετικό της άγνωστο.
4. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο προς τα επάνω έως ότου προσδιορισθούν όλοι οι άγνωστοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η επαυξημένη μήτρα του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ x_3 + 2x_5 &= -3 \\ x_4 - 4x_5 &= 7 \end{aligned} \tag{15}$$

είναι η κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Τα ηγετικά στοιχεία είναι στην πρώτη, την τρίτη, και στην τέταρτη στήλη. Έτσι οι x_1, x_3, και x_4 είναι οι ηγετικοί άγνωστοι και x_2 και x_5 είναι οι ελεύθεροι άγνωστοι. Για να λύσουμε το σύστημα με αναδρομική αντικατάσταση, πρώτα πρέπει να γράψουμε

$$x_2 = s, \quad x_5 = t, \tag{17α}$$

όπου s και t είναι αυθαίρετες παράμετροι. Τότε η τρίτη εξίσωση στο (15) δίνει

$$x_4 = 7 + 4x_5 = 7 + 4t; \tag{17β}$$

η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$x_3 = -3 - 2x_5 = -3 - 2t; \tag{17γ}$$

και τέλος, η πρώτη εξίσωση του (15) δίνει

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 \\ &= 10 + 2s - 3(-3 - 2t) - 2(7 + 4t) - t. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$x_1 = 5 + 2s - 3t. \tag{17δ}$$

Έτσι το σύστημα (15) έχει άπειρες λύσεις που περιλαμβάνουν όλους τους αγνώστους $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ και δίνονται μέσω των παραμέτρων s και t ως εξής

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2s - 3t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -3 - 2t \\ x_4 &= 7 + 4t \\ x_5 &= t. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, με $s = 2$ και $t = 1$ έχουμε την λύση $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$, $x_4 = 11$, και $x_5 = 1$.

Μέθοδος Απαλοιφής του Gauss

Επειδή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική αντικατάσταση για να λύσουμε οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα το οποίο βρίσκεται ήδη σε κλιμακωτή μορφή, μένει μόνο να προσδιορίσουμε έναν τρόπο για να μετασχηματίζουμε μια οποιαδήποτε μήτρα (χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών) σε κλιμακωτή μήτρα. Η διαδικασία αυτή, την οποία έχουμε ήδη δείξει σε πολλά παραδείγματα, είναι γνωστή ως **απαλοιφή του Gauss**. Η ακόλουθη συστηματική περιγραφή της διαδικασίας καθιστά σαφές ότι λειτουργεί για *οποιαδήποτε* μήτρα **A**.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Μέθοδος Απαλοιφής του Gauss

1. Προσδιορίστε την πρώτη στήλη της **A** που περιέχει μη μηδενικά στοιχεία.
2. Αν το πρώτο στοιχείο σε αυτή την στήλη είναι μηδέν, αντιμεταθέστε την πρώτη γραμμή της **A** με την γραμμή της οποίας το αντίστοιχο στοιχείο δεν είναι μηδέν.
3. Τώρα το πρώτο στοιχείο της στήλης δεν είναι μηδέν. Αντικαταστήστε τα στοιχεία κάτω από αυτό με μηδέν προσθέτοντας τα κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής της **A** στις γραμμές κάτω από αυτήν.
4. Μετά τα Βήματα 1 έως 3, η μήτρα μοιάζει όπως η παρακάτω, αν και μπορεί να υπάρχουν διάφορες αρχικές στήλες μηδενικών ή και καμία. Εκτελέστε τα βήματα 1 έως 3 για την μήτρα A_1 που βλέπετε κάτω δεξιά
5. Επαναλάβετε αυτόν τον κύκλο βημάτων έως ότου προκύψει η κλιμακωτή μορφή.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & * & \# & \# & \cdots & \# \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & \mathbf{A}_1 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \tag{17}$$

Με λίγα λόγια, δουλεύουμε μία στήλη την φορά, από τα αριστερά προς τα δεξιά, στην μήτρα **A**. Σε κάθε στήλη που περιέχει ένα ηγετικό στοιχείο (ίσως μετά από αντιμετάθεση γραμμών), θα «καθαρίσουμε» τα μη μηδενικά στοιχεία κάτω από αυτό και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στην επόμενη στήλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 27, \end{aligned} \tag{18}$$

ανάγουμε την επαυξημένη μήτρα των συντελεστών στην κλιμακωτή μορφή της όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΗ}(R_2, R_3)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Το τελικό μας αποτέλεσμα είναι η κλιμακωτή μήτρα της (16). Έτσι από τις Εξισώσεις (17α)–(17δ) του Παραδείγματος 4, οι άπειρες λύσεις του συστήματος (18) περιγράφονται μέσω των αυθαίρετων παραμέτρων s και t ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2s - 3t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -3 - 2t \\ x_4 &= 7 + 4t \\ x_5 &= t. \end{aligned} \tag{19}$$

Επομένως, η αντικατάσταση οποιωνδήποτε δύο συγκεκριμένων τιμών με τις s και t στην (19) δίνει μια συγκεκριμένη λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ του συστήματος, οπότε κάθεμια από τις άπειρες διαφορετικές λύσεις του συστήματος είναι αποτέλεσμα μιας τέτοιας αντικατάστασης.

Στα Παραδείγματα 3 και 5 βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίον η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss μπορεί να δώσει αποτελέσματα είτε η λύση του είναι μοναδική είτε έχει άπειρες λύσεις. Από την άλλη πλευρά, αν η μετάβαση από την επαυξημένη μήτρα στην κλιμακωτή μορφή οδηγεί σε μια γραμμή της μορφής

$$0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad *,$$

όπου ο αστερίσκος υποδηλώνει ένα μη μηδενικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, τότε έχουμε την εξίσωση,

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = *,$$

και επομένως το σύστημα δεν έχει λύση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Χρησιμοποιούμε αλγορίθμους όπως αυτούς της αναδρομικής αντικατάστασης και της απαλοιφής του Gauss αυτής της ενότητας για να περιγράψουμε τις βασικές υπολογιστικές διαδικασίες της γραμμικής άλγεβρας. Στους σύγχρονους αριθμητικούς υπολογισμούς, αυτές οι διαδικασίες συχνά πραγματοποιούνται από υπολογιστή. Για παράδειγμα, τα γραμμικά συστήματα περισσότερων από τέσσερις εξισώσεων συνήθως λύνονται χρησιμοποιώντας υπολογιστή για τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

8.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Λύστε τα γραμμικά συστήματα στα Προβλήματα 1 έως 10, τα οποία βρίσκονται σε κλιμακωτή μορφή, με αναδρομική αντικατάσταση

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 9 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_2 - 7x_3 &= 5 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_4 &= -4 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 17 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 13x_4 &= 5 \\ x_3 + 3x_4 &= 10 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= 0 \\ x_2 - 13x_3 + 3x_4 - 7x_5 &= 0 \\ x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Στα Προβλήματα 11 έως 22, χρησιμοποιήστε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να μετασχηματίσετε κάθε επαυξημένη μήτρα στην κλιμακωτή μορφή της. Στην συνέχεια λύστε το σύστημα με αναδρομική αντικατάσταση.

11. $$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -9 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -5 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 23 \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 29 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 17 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 12x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 12 \\ 5x_1 + 8x_2 + 21x_3 &= 17 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= -7 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 13x_4 &= 15 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 21x_4 &= 21 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 26x_4 &= 23 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 14 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 17 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 3x_5 &= 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 6x_4 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= -13 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 &= 13 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= -10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 17 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 &= 12 \end{aligned}$$

Στα Προβλήματα 23 έως 27, προσδιορίστε για ποια τιμή του k κάθε σύστημα έχει (α) μία μοναδική λύση, (β) καμία λύση, (γ) άπειρες λύσεις.

23. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 6x + 4y &= k \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ 6x + ky &= 0 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 11 \\ 6x + ky &= 21 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 7x + 5y &= k \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y - 3z &= 5 \\ 4x + 3y - z &= k \end{aligned}$$

28. Κάτω από ποιες συνθήκες για τις σταθερές a, b, και c το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= a \\ x + 2y + z &= b \\ 7x + 4y + 9z &= c \end{aligned}$$

έχει μία μοναδική λύση; Δεν έχει λύση; Έχει άπειρες λύσεις;

29. Το πρόβλημα αυτό ασχολείται με την αντιστρεψιμότητα των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

(α΄) Αν ο στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών cR_p μετασχηματίζει τη μήτρα $\mathbf{A}$ στη μήτρα $\mathbf{B}$, δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $(1/c)R_p$ μετασχηματίζει την $\mathbf{B}$ στην $\mathbf{A}$.

(β΄) Αν ο ΕΝΝΑΛΑΓΗ (R_p, R_q) μετασχηματίζει τη μήτρα $\mathbf{A}$ στη μήτρα $\mathbf{B}$, δείξτε ότι μετασχηματίζει και την $\mathbf{B}$ στην $\mathbf{A}$.

(γ΄) Αν ο $cR_p + R_q$ μετασχηματίζει τη μήτρα $\mathbf{A}$ στη μήτρα $\mathbf{B}$, δείξτε ότι $(-c)R_p + R_q$ μετασχηματίζει τη μήτρα $\mathbf{B}$ στη μήτρα $\mathbf{A}$.

(δ΄) Συμπεράνετε ότι αν η μήτρα $\mathbf{A}$ μπορεί να μετασχηματιστεί στη μήτρα $\mathbf{B}$ από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, τότε η $\mathbf{B}$ μπορεί παρόμοια να μετασχηματισθεί στην $\mathbf{A}$.

30. Το πρόβλημα αυτό περιγράφει μια απόδειξη ότι δύο γραμμικά συστήματα LS_1 και LS_2 είναι γραμοϊσοδυναμα (δηλαδή, έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων) αν οι επαυξημένες μήτρες των συντελεστών $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ είναι επίσης γραμοϊσοδύναμες/

(α΄) Αν *ένας* στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών μετασχηματίζει την $\mathbf{A}_1$ στην $\mathbf{A}_2$, δείξτε απευθείας — εξετάζοντας ξεχωριστά τις τρεις περιπτώσεις—ότι κάθε λύση του LS_1 είναι και λύση του LS_2.

(β΄) Εξηγήστε γιατί από το Πρόβλημα 29 προκύπτει τώρα ότι κάθε λύση του ενός συστήματος είναι και λύση του άλλου συστήματος. Έτσι, τα δύο συστήματα έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

8.2 Εφαρμογή Αυτοματοποιημένες λειτουργίες γραμμών

Τα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας χρησιμοποιούνται συχνά προκειμένου να διευκολύνουν την διαδικασία των υπολογισμών με μήτρες, συμπεριλαμβανομένων και των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Η 3×4 επαυξημένη μήτρα των συντελεστών του Παραδείγματος 3 μπορεί να εισαχθεί με την εντολή του *Maple*

```
with(linalg):
A := array( [[1, 2, 1,  4],
             [3, 8, 7, 20],
             [2, 7, 9, 23]] )·
```

ή με την εντολή *Mathematica* του

```
A = ««1, 2, 1,  4»,
     «3, 8, 7, 20»,
     «2, 7, 9, 23»»
```

ή με την εντολή MATLAB του

```
A = [1 2 1  4
     3 8 7 20
     2 7 9 23]
```

Το πακέτο linalg του *Maple* περιέχει εντολές για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών οι οποίες μπορούν να εφαρμοσθούν για τη μήτρα A του Παραδείγματος 3 ως εξής:

```
A := addrow(A,1,2,-3);# (-3)R1 + R2
A := addrow(A,1,3,-2); # (-2)R1 + R3
 A := mulrow(A,2,1/2); # (1/2)R2
A := addrow(A,2,3,-3); # (-3)R2 + R3
```

Οι παρατηρήσεις, που συνοδεύουν τους συμβολισμούς στο Σχήμα 8.2.1, εξηγούν τη δομή αυτών των μετασχηματισμών στο *Maple*.

Στο *Mathematica* η *i* γραμμή της μήτρας A συμβολίζεται με A[[i]], και μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς γραμμών του Παραδείγματος 3, έως εξής:

```
A[[2]] = (-3)A[[1]] + A[[2]]·        (*  (-3)R1 + R2   *)
A[[3]] = (-2)A[[1]] + A[[3]]·        (*  (-2)R1 + R3   *)
A[[2]] = (1/2)A[[2]]·                (*   (1/2)R2      *)
A[[3]] = (-3)A[[2]] + A[[3]]·        (*  (-3)R2 + R3   *)
```

Στο MATLAB, η *i* γραμμή της μήτρας A συμβολίζεται με A(i,:), και μπορούμε να εφαρμόσουμε παρόμοιους μετασχηματισμούς, έως εξής:

```
A(2,:) = (-3)*A(1,:) + A(2,:)        %  (-3)R1 + R2
A(3,:) = (-2)*A(1,:) + A(3,:)        %  (-2)R1 + R3
A(2,:) = (1/2)*A(2,:)                %  (1/2)R2
A(3,:) = (-3)*A(2,:) + A(3,:)        %  (-3)R2 + R3
```

Θα πρέπει να επαληθεύσετε (χρησιμοποιώντας ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας της επιλογής σας) ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί δίνουν την κλιμακωτή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αν θέλετε να αντιμεταθέσετε την 1η και 3η γραμμή— και στην συνέχεια να λύσετε το αντίστοιχο σύστημα με «ευθεία αντικατάσταση» αντί για αναδρομική—αυτό μπορεί να γίνει έως εξής:

```
A := swaprow(A,1,3)·                 (Maple)
A[[«1,3»]] = A[[«3,1»]]·             (Mathematica)
A([1 3],:) = A([3 1],:)              (MATLAB)
```

Αυτοί οι «αυτοματοποιημένοι» στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα Προβλήματα 11 έως 22 αυτής της Ενότητας.

8.3 Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή Μητρών

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας της απαλοιφής του Gauss που περιγράφονται στην Ενότητα 8.2 δεν είναι μοναδικά ορισμένα. Δηλαδή, δύο διαφορετικές ακολουθίες στοιχειωδών μετασχηματισμών, που εφαρμόζονται και οι δύο στην ίδια μήτρα **A**,μπορεί να δώσουν δύο διαφορετικές κλιμακωτές μήτρες. Βέβαια κάθε μια από αυτές θα εξακολουθεί να είναι ισοδύναμη με την **A**. Για παράδειγμα, οι δυο κλιμακωτές μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

είναι φανερό (όπως στο Πρόβλημα 31) ότι είναι γραμμοϊσοδύναμες. Έτσι είναι πιθανό να ξεκινήσουμε με μια κατάλληλη 3×3 μήτρα και να καταλήξουμε μέσω της απαλοιφής του Gauss σε μία από τις δυο διαφορετικές κλιμακωτές μήτρες της (1).

Η πλήρης κατανόηση της δομής των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων εξαρτάται από τον ορισμό μιας ειδικής κατηγορίας κλιμακωτών μητρών. Η κατηγορία αυτή έχει την ιδιότητα ότι κάθε μήτρα που ανήκει σ' αυτήν είναι γραμμοϊσοδύναμη με μία και μόνο μία από αυτές τις ειδικές κλιμακωτές μήτρες. Θυμηθείτε ότι μια κλιμακωτή μήτρα **E** είναι αυτή που έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

1. Κάθε μηδενική γραμμή της **E** βρίσκεται κάτω από κάθε γραμμή η οποία περιέχει ένα μη μηδενικό στοιχείο.
2. Το ηγετικό μη μηδενικό κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιά από το μη μηδενικό ηγετικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Μια *ανηγμένη* κλιμακωτή μήτρα έχει δύο επιπλέον ιδιότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ανοιγμένη Κλιμακωτή Μήτρα

Μια **ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα E** είναι μια κλιμακωτή μήτρα η οποία έχει, επιπλέον των Ιδιοτήτων 1 και 2, τις ακόλουθες ιδιότητες:

3. Κάθε ηγετικό στοιχείο της **E** είναι το 1.
4. Κάθε ηγετικό στοιχείο της **E** είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Μια μήτρα λέμε ότι είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** εάν είναι μια ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα. Παρόμοια, ένα γραμμικό σύστημα είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** εάν η επαυξημένη μήτρα των συντελεστών του είναι ανοιγμενη κλιμακωτή μήτρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Οι ακόλουθες μήτρες είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι κλιμακωτές μήτρες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι σε *ανηγμένη* κλιμακωτή μορφή, επειδή η **A** δεν έχει την Ιδιότητα 3 και η **B** δεν έχει την Ιδιότητα 4.

Η διαδικασία μετασχηματισμού μιας μήτρας **A** σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ονομάζεται **απαλοιφή Gauss-Jordan**.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Απαλοιφή Gauss-Jordan

1. Πρώτα μετασχηματίστε την $\mathbf{A}$ σε κλιμακωτή μορφή με την απαλοιφή του Gauss.
2. Στην συνέχεια διαιρέστε κάθε στοιχείο σε κάθε μη μηδενική *γραμμή* με το ηγετικό στοιχείο της (για να ικανοποιήσετε την Ιδιότητα 3).
3. Τελικά, χρησιμοποιείστε κάθε ηγετικό 1 για να «εξαλήψετε» τα μη μηδενικά στοιχεία που απομένουν στη *στήλη* του (για να ικανοποιήσετε την Ιδιότητα 4).

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μιας μήτρας *είναι* μοναδική. Η ειδική κατηγορία μητρών που αναφέραμε στην αρχή αυτής της συζήτησης είναι απλά η κατηγορία όλων των κλιμακωτών μητρών. Μια απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος μπορείτε να βρείτε στον Ενότητα 4.2 του *Applied Linear Algebra* των B. Noble και J. W. Daniel, 3rd ed. (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1988).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Μοναδικότητα της Ανοιγμένης Κλιμακωτής Μορφής

Κάθε μήτρα είναι γραμμοϊσοδύναμη με μια και μόνο μια ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}.$$

Λύση Στο Παράδειγμα 3 της Ενότητας 8.2 βρήκαμε τη κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

η οποία ικανοποιεί ήδη την Ιδιότητα 3. Για τις στήλες 2 και 3 (προκειμένου να ικανοποιήσουν την Ιδιότητα 4), θα κάνουμε την αναγωγή ως εξής.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα, βλέπουμε κατευθείαν από αυτή την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 8y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 9z &= 23 \end{aligned}$$

με επαυξημένη μήτρα συντελεστών $\mathbf{A}$ έχει μοναδική λύση την, $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Για να χρησιμοποιήσουμε την απαλοιφή του Gauss-Jordan για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 31, \end{aligned} \tag{2}$$

μετασχηματίζουμε την επαυξημένη μήτρα των συντελεστών σε *ανηγμένη* κλιμακωτή μορφή, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του συστήματος (2) είναι

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_2 - \quad x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 0 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Οι κύριες μεταβλητές είναι οι x_1 και x_2 ενώ οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_3 και x_4. Αν θέσουμε

$$x_3 = s \quad \text{και} \quad x_4 = t,$$

τότε από την (3) έχουμε απευθείας

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - 2s + 3t, \\ x_2 &= 5 + s - 4t. \end{aligned}$$

Σε πρακτικό επίπεδο η απαλοιφή των Gauss-Jordan γενικά δεν προσφέρει σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss (μετασχηματισμό σε μη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή) ακολουθούμενη από αναδρομική αντικατάσταση. Έτσι, η μέθοδος απαλοιφής του Gauss είναι αυτή που συνήθως χρησιμοποιείται σε πρακτικές διαδικασίες και σε υπολογιστικά προγράμματα για την αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Ο Τρεις Πιθανότητες

Η κύρια σπουδαιότητα της απαλοιφής του Gauss-Jordan πηγάζει από το γεγονός ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός γενικού γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4}$$

σαφέστατα εμφανίζει την δομή της και μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήσεις σχετικά με τον αριθμό και τον τύπο των λύσεων της πιο εύκολα. Εάν οι ηγετικές μεταβλητές είναι $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$, τότε η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του συστήματος (4) θα είναι κάπως έτσι

$$
\begin{aligned}
x_{j_1} \qquad\qquad\qquad &+ \sum_{k=r+1}^{n} c_{1k} x_{j_k} = d_1 \\
x_{j_2} \qquad\qquad &+ \sum_{k=r+1}^{n} c_{2k} x_{j_k} = d_2 \\
\ddots \qquad &\qquad \vdots \\
x_{j_r} &+ \sum_{k=r+1}^{n} c_{rk} x_{j_k} = d_r \\
&\qquad\quad 0 = d_{r+1} \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\qquad\quad 0 = d_m,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

όπου τα αθροίσματα περιλαμβάνουν μόνο τις (μη ηγετικές) ελεύθερες μεταβλητές $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}$.

Τώρα, αν μια οποιαδήποτε από τις σταθερές $d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_m$ στην (5) είναι μη μηδενική, τότε το σύστημα *δεν* έχει πραγματικές λύσεις. Από την άλλη, υποθέστε ότι $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$. Αν $r < n$, τότε υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές τις οποίες μπορούμε να εξισώσουμε με αυθαίρετες παραμέτρους, οπότε το σύστημα θα έχει *άπειρες* λύσεις. Αν αντίθετα $r = n$, τότε τα αθροίσματα στην (5) εξαφανίζονται και έχουμε μια *μοναδική* λύση $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$, $\ldots$, $x_n = d_n$. Αυτές οι παρατηρήσεις εδραιώνουν το ακόλουθο αποτέλεσμα, στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Οι τρεις Πιθανότητες

Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει είτε

- μια μοναδική λύση, ή
- καμία λύση, ή
- άπειρες λύσεις.

Ομογενή Συστήματα

Το γραμμικό σύστημα στην (4) ονομάζεται **ομογενές** αν οι σταθερές $b_1, b_2, \ldots, b_m$ στη δεξιά πλευρά είναι όλες μηδέν. Έτσι ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους έχει την μορφή

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Κάθε ομογενές σύστημα έχει προφανώς τουλάχιστον την **τετριμμένη λύση**

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0. \tag{7}$$

Έτσι (από το Θεώρημα 2) ξέρουμε από την αρχή ότι *κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα είτε έχει μόνο την τετριμμένη λύση ή έχει άπειρες λύσεις*. Αν έχει μια *μη τετριμμένη* λύση—μια με όχι όλα τα x_i ίσα με το μηδέν—τότε θα πρέπει λογικά να έχει άπειρες λύσεις.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση, στην οποία είναι εγγυημένη μια μη τετριμμένη λύση, είναι αυτή ενός ομογενούς συστήματος με *περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις*: $m < n$. Για να δείτε γιατί πρέπει να υπάρχει μια λύση, θεωρήστε το ανοιγμένο κλιμακωτό σύστημα στο (5) με τις σταθερές στη δεξιά πλευρά να είναι όλες μηδέν (επειδή το πρωτότυπο σύστημα είναι ομογενές). Ο αριθμός r των ηγετικών μεταβλητών είναι το πολύ ο αριθμός m των εξισώσεων (διότι υπάρχει το πολύ μία ηγετική μεταβλητή ανά εξίσωση). Αν $m < n$, τότε $r < n$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ελεύθερη μεταβλητή που μπορεί να εξισωθεί με μια αυθαίρετη παράμετρο, αποδίδοντας έτσι απείρως πολλές λύσεις. Το επιχείρημα αυτό θέτει τον ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Ομογενή Συστήματα με Περισσότερους Αγνώστους από Εξισώσεις
Κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα με περισσότερους αγνώστους απ'ότι εξισώσεις έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 47x_1 - 73x_2 + 56x_3 + 21x_4 &= 0 \\ 19x_1 + 81x_2 - 17x_3 - 99x_4 &= 0 \\ 53x_1 + 62x_2 + 39x_3 + 25x_4 &= 0 \end{aligned}$$

τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους έχει αναγκαστικά άπειρες λύσεις. Το μόνο ερώτημα (το οποίο θα μπορούσαμε να απαντήσουμε ανάγοντας το σύστημα σε κλιμακωτή μορφή) είναι αν το σύστημα έχει έναν, δύο, ή τρεις ελεύθερους αγνώστους.

Η κατάσταση είναι διαφορετική για ένα *μη ομογενές* σύστημα με περισσότερους αγνώστους απ'ότι εξισώσεις. Στο απλό παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

βλέπουμε ότι ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να μην είναι συμβιβαστό. Στην περίπτωση που είναι —πράγμα που σημαίνει ότι $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή στο (5)—τότε το γεγονός ότι $m < n$ (όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος 3) έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ελεύθερος άγνωστος και ότι το σύστημα επομένως έχει άπειρες λύσεις. Έτσι *κάθε μη ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις είτε δεν έχει λύσεις ή έχει άπειρες λύσεις.*

Τετραγωνικά Συστήματα

Μια ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση για τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων είναι το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

με *ίδιο* αριθμό n αγνώστων και εξισώσεων. Η μήτρα των συντελεστών $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ σ' αυτή την περίπτωση έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών και έτσι είναι μια $n \times n$ **τετραγωνική μήτρα**.

Μας ενδιαφέρει περισσότερο η περίπτωση στην οποία το (8) έχει *μια* μόνο μη τετριμμένη λύση, την $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η κλιμακωτή μορφή του συστήματος *δεν* περιέχει ελεύθερες μεταβλητές. Επειδή το σύστημα αποτελείται από ακριβώς n εξισώσεις, συμπεραίνουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι απλώς

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_3 \qquad &= 0 \\ \ddots \quad &\ \ \vdots \\ x_n &= 0, \end{aligned}$$

και, συνεπώς, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της μήτρας των συντελεστών **A** είναι η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Μια τέτοια (τετραγωνική) μήτρα, με άσσους στην **κύρια διαγώνιο** (αυτή που ξεκινάει από την επάνω αριστερή γωνία και καταλήγει στην κάτω δεξιά) και μηδενικά παντού αλλού, ονομάζεται **ταυτοτική μήτρα** (για τους λόγους που εξηγούνται στην Ενότητα 8.4). Για παράδειγμα, οι 2×2 και 3×3 ταυτοτικές μήτρες είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα (9) είναι η $n \times n$ ταυτοτική μήτρα. Με αυτήν την ορολογία, το προηγούμενο επιχείρημα μας δίνει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Ομογενές Σύστημα με Μοναδική Λύση

Έστω **A** μια $n \times n$ μήτρα. Τότε το ομογενές σύστημα με μήτρα συντελεστών την **A** έχει μόνο την τετριμμένη λύση αν και μόνο αν η **A** είναι γραμμοϊσοδύναμη με την $n \times n$ ταυτοτική μήτρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Ο υπολογισμός του Παραδείγματος 2 (ανεξάρτητα από την τέταρτη στήλη σε κάθε μήτρα) δείχνει ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμοϊσοδύναμη με την 3×3 ταυτοτική μήτρα. Έτσι το Θεώρημα 4 μας δίνει ότι το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με μήτρα συντελεστών **A** έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

8.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για κάθε μια από τις μήτρες των Προβλημάτων 1 έως 20.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 15 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & -19 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 19 \\ 4 & -7 & 70 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 3 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 9 & 4 & -7 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -12 & 1 \\ 2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 7 & 22 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & 19 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 & 7 \\ 2 & 4 & 22 & 8 \\ 2 & 7 & 34 & 17 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -12 & 1 \\ 2 & 3 & 18 & 11 & 9 \\ 2 & 5 & 26 & 21 & 11 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -10 & -19 & 13 \\ 1 & 3 & -4 & -8 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 7 & 13 \\ 5 & 10 & 8 & 18 & 47 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 26 \end{bmatrix}$

21–30. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan (μετασχηματίζοντας την επαυξημένη μήτρα στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της) για να επιλύσετε τα Προβλήματα 11 έως 20 της Ενότητας 8.2.

31. Δείξτε ότι οι δύο μήτρες στην (1) είναι και οι δύο ισοδύναμες με την 3×3 ταυτοτική μήτρα (και έτσι, από το Θεώρημα 1, είναι ισοδύναμες και μεταξύ τους).

32. Δείξτε ότι η 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

είναι γραμοϊσοδύναμη με μια 2×2 ταυτοτική μήτρα υπό τον όρο ότι $ad - bc \neq 0$.

33. Παραθέστε όλες τις πιθανές ανοιγμένες κλιμακωτές μορφές μιας 2×2 μήτρας, χρησιμοποιώντας αστερίσκους για να δείξετε τα στοιχεία που μπορεί να είναι είτε μηδέν ή μη μηδενικά.

34. Παραθέστε όλες τις πιθανές ανηγμένες κλιμακωτές μορφές μιας 3×3 μήτρας, χρησιμοποιώντας αστερίσκους για να δείξετε τα στοιχεία που μπορεί να είναι είτε μηδέν ή μη μηδενικά.

35. Έστω το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0. \end{aligned}$$

(α΄) Αν $x = x_0$ και $y = y_0$ είναι μια λύση και ο k είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε δείξτε ότι $x = kx_0$ και $y = ky_0$ είναι επίσης μια λύση·

(β΄) Αν $x = x_1$, $y = y_1$ και $x = x_2$, $y = y_2$ είναι και οι δύο λύσεις, τότε δείξτε ότι και $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ είναι μια λύση.

36. Υποθέστε ότι $ad - bc \neq 0$ στο ομογενές σύστημα του Προβλήματος 35. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 32 για να δείξετε ότι η μόνη λύση είναι η τετριμμένη λύση.

37. Δείξτε ότι το ομογενές σύστημα του Προβλήματος 35 έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν $ad - bc = 0$.

38. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 37 για να βρείτε όλες τις τιμές της c για τις οποίες το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} (c+2)x + 3y &= 0 \\ 2x + (c-3)y &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη τετριμμένες λύσεις.

39. Θεωρήστε ένα *ομογενές* σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Υποθέστε ότι η τρίτη εξίσωση είναι το άθροισμα κάποιου πολλαπλάσιου της πρώτης εξίσωσης και κάποιου πολλαπλάσιου της δεύτερης εξίσωσης. Δείξτε ότι το σύστημα έχει μη τετριμένες λύσεις.

40. Έστω $\mathbf{E}$ η κλιμακωτή μήτρα η οποία είναι γραμμοϊσοδύναμη με την μήτρα $\mathbf{A}$. Δείξτε ότι η $\mathbf{E}$ έχει τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών όσες έχει η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\mathbf{E}^*$ της $\mathbf{A}$. Έτσι ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών σε μια κλιμακωτη μορφή της $\mathbf{A}$ είναι «αναλλοίωτος» στην μήτρα $\mathbf{A}$. *Υπόδειξη*: Εξετάστε την αναγωγή της $\mathbf{E}$ στην $\mathbf{E}^*$.

8.3 Εφαρμογή Αυτοματοποιημένη Αναγωγή Γραμμών

Τα περισσότερα συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας περιέχουν εντολές οι οποίες υπολογίζουν κατευθείαν την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Για παράδειγμα αν εισάγουμε τη μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 2 —όπως φαίνεται στην Εφαρμογή 8.2—τότε η εντολή *Maple*

```
with(linalg): R := rref(A);
```

ή η εντολή *Mathematica*

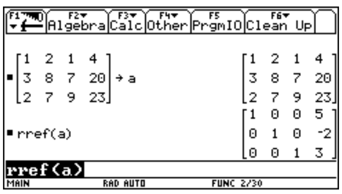
```
R = RowReduce[A] // MatrixForm
```

ή η εντολή Matlab

```
R = rref(A)
```

παράγουν την ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



ΣΧΗΜΑ 8.3.1 Βρίσκοντας την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με με την αριθμομηχανή TI-89.

που παρουσιάζει ως λύση του γραμμικού συστήματος την επαυξημένη μήτρα συντελεστών $\mathbf{A}$. Ο ίδιος υπολογισμός απεικονίζεται στην οθόνη της αριθμομηχανής στο Σχήμα 8.3.1. Λύστε με παρόμοιο τρόπο τα συστήματα στα ακόλουθα προβλήματα (τα οποία προφανώς θα είναι κάπως κουραστικό να λυθούν με το χέρι):

1. $17x + 42y - 36z = 213$
$13x + 45y - 34z = 226$
$12x + 47y - 35z = 197$

2. $32x + 57y - 41z = 713$
$23x + 43y - 37z = 130$
$42x - 61y + 39z = 221$

3. $231x + 157y - 241z = 420$
$323x + 181y - 375z = 412$
$542x + 161y - 759z = 419$

4. $837x + 667y - 729z = 1659$
$152x - 179y - 975z = 1630$
$542x + 328y - 759z = 1645$

5. $49w - 57x + 37y - 59z = 97$
$73w - 15x - 19y - 22z = 99$
$52w - 51x + 14y - 29z = 89$
$13w - 27x + 27y - 25z = 73$

6. $64w - 57x + 97y - 67z = 485$
$92w + 77x - 34y - 37z = 486$
$44w - 34x + 53y - 34z = 465$
$27w + 57x - 69y + 29z = 464$

8.4 Πράξεις Μητρών

Έως τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει μήτρες μόνο για να απλοποιήσουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι μπορούμε να προσθέτουμε και να πολλαπλασιάζουμε μήτρες με τρόπους παρόμοιους με αυτούς που προστίθενται και πολλαπλασιάζονται οι αριθμοί. Τέτοιου είδους πράξεις μητρών έχουν εκτεταμένες εφαρμογές.

Όλοι γνωρίζουμε ότι $2 + 3 = 5$ και δεν εξετάζουμε περαιτέρω τη σημασία της εξίσωσης αυτής. Στην περίπτωση των μητρών όμως πρέπει να ξεκινήσουμε με ακριβείς ορισμούς του τί ακριβώς σημαίνει η οικεία σε μας αλγεβρική γλώσσα όταν χρησιμοποιείται σε μήτρες αντί για αριθμούς.

Δύο μήτρες **A** και **B** *του ίδιου μεγέθους*—με το ίδιο πλήθος γραμμών και το ίδιο πλήθος στηλών—ονομάζονται **ίσες** αν κάθε στοιχείο της **A** είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο της **B**. Έτσι δύο μήτρες του ίδιου μεγέθους είναι ίσες εφόσον είναι *ίσες κατά στοιχείο*, και γράφουμε $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ για να συμβολίσουμε την ισότητα των δύο μητρών **A** και **B**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix},$$

τότε $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ επειδή $a_{22} = 6$, ενώ $b_{22} = 7$, και $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$ επειδή η μήτρες **A** και **C** δεν είναι του ίδιου μεγέθους.

Οι δύο επόμενοι ορισμοί αποτελούν επιπλέον παραδείγματα των πράξεων «κατα στοιχείο»

ΟΡΙΣΜΟΣ Πρόσθεση Μητρών

Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ και $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ είναι μήτρες *του ίδιου μεγέθους*, τότε το **άθροισμα** $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ είναι η μήτρα η οποία προσδιορίζεται με πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων των μητρών **A** και **B**. Δηλαδή,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

όπου ο συμβολισμός στα δεξιά υποδεικνύει ότι το εκάστοτε στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης της μήτρας $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ είναι $a_{ij} + b_{ij}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 11 & -7 & 3 \end{bmatrix},$$

αλλά το άθροισμα $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ δεν ορίζεται επειδή οι μήτρες **A** και **C** δεν είναι του ίδιου μεγέθους.

ΟΡΙΣΜΟΣ Πολλαπλασιασμός Μήτρας με Αριθμό

Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ είναι μια μήτρα και c είναι ένας αριθμός, τότε $c\mathbf{A}$ είναι μια μήτρα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου της $\mathbf{A}$ με c. Δηλαδή,

$$c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{ij} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό μιας μήτρας με ένα βαθμωτό μέγεθος, ορίζουμε την **αρνητική** $-\mathbf{A}$ της μήτρας $\mathbf{A}$ και την **διαφορά** $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ των δυο μητρών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ γράφοντας

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι οι 2×3 μήτρες του Παραδείγματος 2, τότε

$$3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 6 & -21 & 15 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -6 \\ -9 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

και

$$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -9 \\ -3 & -21 & 17 \end{bmatrix}.$$

Διανύσματα

Η πρώτη εφαρμογή των πράξεων των μητρών είναι στα διανύσματα. Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 8.2. ένα **διάνυσμα στήλη** (ή απλά **διάνυσμα**) είναι απλώς μια $n \times 1$ μήτρα, που έχει μία στήλη. Συνήθως χρησιμοποιούμε έντονα μικρά γράμματα για να συμβολίσουμε τα διανύσματα. Αν

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix},$$

τότε μπορούμε να σχηματίσουμε συνδυασμούς, όπως

$$3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Για τυπογραφικούς κυρίως λόγους, μερικές φορές γράφουμε

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{3}$$

Δηλαδή, το $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι απλά ένας άλλος συμβολισμός για το *διάνυσμα στήλη* με στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Δεν πρέπει να το μπερδεύουμε με το *διάνυσμα γραμμή*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ένα **διάνυσμα γραμμή** είναι μια $1 \times n$ (και όχι μια $n \times 1$) μήτρα που έχει μία μόνο γραμμή, και

$$(3, 2, 1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

επειδή οι δύο μήτρες εδώ έχουν διαφορετικές διαστάσεις (παρόλο που έχουν τα ίδια στοιχεία).

Τώρα ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{5}$$

m εξισώσεων με *n* άγνωστους. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια λύση αυτού του σύστημα ως ένα *διάνυσμα*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{6}$$

του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν κάθε μια από τις εξισώσεις στην (5). Αν θέλουμε να αναφέρουμε ξεκάθαρα τον αριθμό των στοιχείων, μπορούμε να αποκαλούμε το $\mathbf{x}$ ένα ***n*-διάστατο διάνυσμα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Θεωρήστε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 19x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 26x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η κλιμακωτή μορφή της επαυξημένης μήτρας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι x_1 και x_2 θεωρούμε ότι είναι οι ηγετικοί άγνωστοι ενώ x_3 και x_4 είναι οι ελεύθεροι άγνωστοι. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους των Ενοτήτων 8.2 και 8.3, βλέπουμε ότι οι άπειρες λύσεις του συστήματος (7) περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_4 &= t, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= 4s - 3t, \\ x_1 &= 3s + 2t \end{aligned} \tag{8}$$

συναρτήσει των αυθαίρετων παραμέτρων s και t.

Τώρα ας γράψουμε την λύση $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ με τον συμβολισμό των διανυσμάτων. Η εξίσωση (8) δίνει

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s + 2t \\ 4s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix},$$

και «διαχωρίζοντας» τα s και t έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3s \\ 4s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ -3t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

—δηλαδή,

$$\mathbf{x} = s(3, 4, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1) = s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2. \tag{9}$$

Η εξίσωση (9) εκφράζει σε **διανυσματική μορφή** τη γενική λύση του γραμμικού συστήματος στην (7). Μας λέει ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι λύση αν και μόνο αν το $\mathbf{x}$ είναι *γραμμικός συνδυασμός*—άθροισμα πολλαπλασίων—των συγκεκριμένων λύσεων $\mathbf{x}_1 = (3, 4, 1, 0)$ και $\mathbf{x}_2 = (2, -3, 0, 1)$. Οι παράμετροι s και t είναι απλά οι συντελεστές στο «άθροισμα των πολλαπλασίων.»

Με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο προέκυψε η Εξίσωση (9) από τις Εξισώσεις στην (8), μπορεί να εκφραστεί και η γενική λύση κάθε ομογενούς γραμμικού συστήματος ως γραμμικός συνδυασμός συγκεκριμένων διανυσμάτων. Για το λόγο αυτό (αλλά και για άλλους ακόμα), οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων θα παίξουν κεντρικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια.

Πολλαπλασιασμός Μητρών

Η πρώτη έκπληξη είναι ότι οι μήτρες *δεν* πολλαπλασιάζονται κατά στοιχείο. Ο αρχικός στόχος του πολλαπλασιασμού μητρών είναι για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό των γραμμικών συστημάτων. Αν γράψουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{10}$$

τότε $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$, και $\mathbf{b}$ αποτελούν, αντίστοιχα, τη μήτρα των συντελεστών, το διάνυσμα των άγνωστων και το διάνυσμα των σταθερών για το γραμμικό σύστημα στην (5). Θέλουμε να ορίσουμε το γινόμενο $\mathbf{Ax}$ με τέτοιο τρόπο ώστε ολόκληρο το γραμμικό σύστημα να απλοποιείται σε μία μόνο εξίσωση μητρών, την

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{11}$$

Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε το γινόμενο ενός διανύσματος *γραμμής* $\mathbf{a}$ με ένα διάνυσμα *στήλη* $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

κάθε ένα από τα οποία έχει n στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση, το γινόμενο $\mathbf{ab}$ *ορίζεται* να είναι

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \tag{12}$$

Έτσι $\mathbf{ab}$ είναι το *άθροισμα των γινομένων* των αντίστοιχων στοιχείων των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (2)(3) + (-3)(5) = -9$$

και

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + (-1)(-3) + 7 \cdot 4 = 46.$$

Σημειώστε ότι αν

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{ax} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Έτσι η εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{13}$$

απλοποιείται στην εξίσωση

$$\mathbf{ax} = b, \tag{14}$$

η οποία είναι ένα βήμα προς τον στόχο που εκφράσαμε στην Εξίσωση (11). Αυτή η παρατήρηση είναι το βασικό κίνητρο για τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ Πολλαπλασιασμός Μητρών

Υποθέστε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια $m \times p$ μήτρα και η $\mathbf{B}$ είναι μια $p \times n$ μήτρα. Τότε το **γινόμενο** $\mathbf{AB}$ είναι μια $m \times n$ μήτρα που ορίζεται ως εξής: Το στοιχείο της $\mathbf{AB}$ που βρίσκεται στην i γραμμή και στην j στήλη είναι το *άθροισμα των γινομένων* των αντίστοιχων στοιχείων της i γραμμής της $\mathbf{A}$ με τα στοιχεία της j στήλης της $\mathbf{B}$.

Δηλαδή, αν η i γραμμή της $\mathbf{A}$ είναι

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix}$$

και η j στήλη της $\mathbf{B}$ είναι

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix},$$

τότε το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης του γινομένου $\mathbf{AB}$ είναι

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

τότε $m = p = n = 2$, οπότε το $\mathbf{AB}$ είναι μια 2×2 μήτρα. Για να βρείτε το $\mathbf{AB}$, υπολογίζετε το άθροισμα των γινομένων όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{AB}, \text{ γραμμή } 1, \text{ στήλη } 1: && (2)(1) + (-1)(3) = -1;\\
&\mathbf{AB}, \text{ γραμμή } 1, \text{ στήλη } 2: && (2)(5) + (-1)(7) = 3;\\
&\mathbf{AB}, \text{ γραμμή } 2, \text{ στήλη } 1: && (-4)(1) + (3)(3) = 5;\\
&\mathbf{AB}, \text{ γραμμή } 2, \text{ στήλη } 2: && (-4)(5) + (3)(7) = 1.
\end{aligned}$$

Έτσι

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για την πρώτη επαφή σας με τον πολλαπλασιασμό μητρών, υπολογίστε

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 14 \\ -22 & 18 \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Αυτό δείχνει ότι ο πολλαπλασιασμός μητρών *δεν* είναι αντιμεταθετικός! Πρέπει, συνεπώς, να είμαστε προσεκτικοί με τη σειρά με την οποία γράφουμε τις μήτρες σε ένα γινόμενο μητρών.

Ο ορισμός του γινομένου μητρών χρειάζεται προσεκτική εξέταση για να δούμε πώς λειτουργεί. Πρώτα απ'όλα, το γεγονός ότι η $\mathbf{A}$ είναι $m \times p$ και η $\mathbf{B}$ είναι $p \times n$ σημαίνει ότι ο αριθμός των *στηλών* της $\mathbf{A}$ είναι ίσος με τον αριθμό των *γραμμών* της $\mathbf{B}$. Εφόσον συμβαίνει αυτό, τότε το μέγεθος του γινομένου $\mathbf{AB}$ προκύπτει διαγράφοντας κατά κάποιον τρόπο τις «εσωτερικές» διαστάσεις:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \text{φορές} & \mathbf{B} & = & \mathbf{AB} \\ m \times p & & p \times n & & m \times n. \end{array}$$

Αυτές «διαγράφονται.»

Αν οι «εσωτερικές» διαστάσεις δεν είναι ίσες, τότε το γινόμενο $\mathbf{AB}$ *δεν ορίζεται.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Αν η $\mathbf{A}$ είναι μια μήτρα 3×2 και η $\mathbf{B}$ μια μήτρα 2×3, τότε το $\mathbf{AB}$ θα είναι μια μήτρα 3×3, ενώ το $\mathbf{BA}$ θα είναι μια μήτρα 2×2. Αν η $\mathbf{C}$ είναι μια μήτρα 3×5 και η $\mathbf{D}$ μια μήτρα 5×7, τότε το $\mathbf{CD}$ θα είναι μια μήτρα 3×7, αλλά το $\mathbf{DC}$ δεν ορίζεται.

Για να τονίσουμε το γεγονός ότι το *ij* στοιχείο του **AB** είναι το γινόμενο της i γραμμής της **A** και της j στήλης της **B**, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \text{———} \ \mathbf{a}_1 \ \text{———} \\ \text{———} \ \mathbf{a}_2 \ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \ \mathbf{a}_i \ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \ \mathbf{a}_m \ \text{———} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{b}_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix},$$

όπου με $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ συμβολίζουμε τα m **διανύσματα γραμμή** της **A** και με $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ συμβολίζουμε τα n **διανύσματα στήλη** της **B**. Πιο συνοπτικά, αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

συναρτήσει των γραμμών της **A** και των στηλών της **B**, τότε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Επομένως, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το ij στοιχείο $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j$ του **AB** δίνεται συναρτήσει των στοιχείων των **A** και **B** από την σχέση

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{16}$$

Μπορεί κανείς να οπτικοποιήσει το γινόμενο αν φανταστεί ότι «αφήνουμε την i γραμμή της **A** να πάνω στην j στήλη της **B**» έως ότου τα στοιχεία σχηματίσουν ζευγάρια, και στη συνέχεια ότι σχηματίζεται το άθροισμα των γινομένων αυτών των ζευγαριών, για να προσδιορίσει το στοιχείο c_{ij} της μήτρας $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Υπόδειξη Το κλειδί για την ακρίβεια και την αυτοπεποίθηση στον υπολογισμό του γινομένου μητρών είναι το να γίνονται συστηματικά. Να κάνετε πάντοτε τους υπολογισμούς σας με την ίδια σειρά. *Πρώτα* υπολογίστε τα στοιχεία της *πρώτης* γραμμής του **AB** πολλαπλασιάζοντας την *πρώτη* γραμμή της **A** διαδοχικά με τις στήλες της **B**. *Στην συνέχεια*, υπολογίστε τα στοιχεία της *δεύτερης* γραμμής του **AB** πολλαπλασιάζοντας τη *δεύτερη* γραμμή της **A** διαδοχικά με τις στήλες της **B** κ.ο.κ

Για τον υπολογισμό «μεγάλων» μητρών συνήθως χρησιμοποιούνται υπολογιστικά συστήματα. Αν έχουν εισαχθεί οι μήτρες **A** και **B**, με κατάλληλα μεγέθη, —όπως απεικονίζεται στην Εφαρμογή 3.2 —τότε η εντολή του *Maple*

```
with(linalg) : C := multiply(A,B),
```

: ή η εντολή του *Mathematica*

```
C = A.B,
```

ή η εντολή του MATLAB

```
C = A*B
```

μας δίνουν κατευθείαν το αποτέλεσμα $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Εξισώσεις Μητρών

Αν $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ είναι μια $m \times n$ μήτρα συντελεστών και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι μια $n \times 1$ μήτρα αγνώστων (στήλη), τότε το γινόμενο $\mathbf{Ax}$ είναι η μήτρα $m \times 1$.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \overset{(?)}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{17}$$

αν και μόνο αν η $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι λύση του γραμμικού συστήματος (5). Έτσι, το γινόμενο μητρών μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους στην απλή εξίσωση μητρών (17), συμβολισμός που είναι ανάλογος με την απλή βαθμωτή εξίσωση $ax = b$ μιας μεταβλητής x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 10 \\ 4x_1 \phantom{{}-4x_2} - 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους είναι ισοδύναμο με την εξίσωση μητρών

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Άλγεβρα Μητρών

Οι ορισμοί της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μητρών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν τους κανόνες της άλγεβρας των μητρών όπως παρουσιάζονται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Κανόνες Άλγεβρας Μητρών

Αν **A**, **B**, και **C** είναι μήτρες κατάλληλων διαστάσεων, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες.

Αντιμεταθετικός νόμος της πρόσθεσης: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

Προσεταιριστικός νόμος της πρόσθεσης: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

Προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

Επιμεριστικοί νόμοι: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

και

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

Η μόνη απόδειξη η οποία έχει κάποια δυσκολία είναι αυτή του προσεταιριστικού νόμου του πολλαπλασιασμού (βλέπε Πρόβλημα 44). Κάθε άλλη απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Ως παράδειγμα, θα αποδείξουμε τον πρώτο επιμεριστικό νόμο. Υποθέστε ότι η $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ είναι μια $m \times p$ μήτρα και ότι η $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$ και η $\mathbf{C} = \left[c_{ij} \right]$ είναι $p \times n$ μήτρες. Τότε

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \left[b_{ij} + c_{ij} \right],$$

έτσι από την (16) το ij στοιχείο της $m \times n$ μήτρας $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ είναι

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}). \tag{18}$$

Το ij στοιχείο της $m \times n$ μήτρας $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ είναι

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}). \tag{19}$$

Αλλά ο επιμεριστικός νόμος των πραγματικών αριθμών, $a(b + c) = ab + ac$, μας λέει ότι οι αντίστοιχοι όροι του αθροίσματος στις (18) και (19) είναι ίσοι. Έτσι και οι ij όροι των δύο $m \times n$ μητρών $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ και $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ είναι ίσοι, επομένως και οι μήτρες είναι ίσες: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε κανόνες όπως οι

$$(a + b)\mathbf{C} = a\mathbf{C} + b\mathbf{C}, \quad (ab)\mathbf{C} = a(b\mathbf{C}), \quad a(\mathbf{BC}) = (a\mathbf{B})\mathbf{C}$$

είναι ακόμα πιο εύκολο να αποδειχθούν. Αυτό που σημαίνουν όλοι αυτοί οι κανόνες είναι: *Στον πολλαπλασιασμό μητρών, οι παρενθέσεις μπορούν να εισάγονται με τον συνηθισμένο τρόπο που έχουμε και στην συνήθη άλγεβρα των πραγματικών αριθμών.*

Αλλά στην άλγεβρα των μητρών δεν μεταφέρονται όλοι οι κανόνες που γνωρίζουμε από την «κανονική» άλγεβρα. Στο Παράδειγμα 5 είδαμε ότι ο πολλαπλασιασμός μητρών *δεν* είναι αντιμεταθετικός —γενικά, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Άλλες εξαιρέσεις σχετίζονται με τις μηδενικές μήτρες. **Μηδενική μήτρα** είναι εκείνη η οποία έχει *όλα* τα στοιχεία της μηδέν, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνήθως συμβολίζουμε τη μηδενική μήτρα (οποιουδήποτε μεγέθους) με $\mathbf{0}$. Πρέπει να είναι φανερό ότι για οποιαδήποτε μήτρα $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{0}, \quad \mathbf{A0} = \mathbf{0}, \quad \text{και} \quad \mathbf{0A} = \mathbf{0},$$

όπου σε κάθε μια από τις περιπτώσεις το $\mathbf{0}$ είναι μια μηδενική μήτρα κατάλληλου μεγέθους. Έτσι, οι μηδενικές μήτρες φαίνεται ότι στην αριθμητική των μητρών παίζουν ρόλο παρόμοιο με αυτόν του πραγματικού αριθμού μηδέν στην συνήθη αριθμητική. Γνωρίζουμε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι παρακάτω δύο κανόνες:

- Αν $ab = ac$ και $a \neq 0$, τότε $b = c$
  («νόμος της απλοποίησης»).
- Αν $ad = 0$, τότε είτε $a = 0$ ή $d = 0$.

Στο επόμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι στις μήτρες *δεν* ισχύει κανένας από αυτούς τους δύο κανόνες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

τότε $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, αλλά

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 25 & -10 \\ 18 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{AC}. \qquad \text{(Προσέξτε αυτό!)}$$

Έτσι ο νόμος της απλοποίησης δεν ισχύει γενικά για τις μήτρες. Αν

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

παρά το γεγονός ότι ούτε η **A** ούτε η **D** είναι μηδενικές μήτρες. Δείτε τα Προβλήματα 31 έως 38 για πρόσθετους τρόπους με τους οποίους η άλγεβρα των μητρών διαφέρει σημαντικά από την γνωστή σε όλους μας άλγεβρα των πραγματικών αριθμών.

Ας θυμηθούμε ότι η *ταυτοτική μήτρα* είναι η τετραγωνική μήτρα **I** η οποία έχει στην κύρια διαγώνιο της το ένα και παντού αλλού μηδέν. Οι ταυτοτικές μήτρες στην αριθμητική των μητρών έχουν ρόλο ανάλογο με αυτόν του πραγματικού αριθμού ένα, για τον οποίον ισχύει ότι $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a. Για παράδειγμα, μπορείτε να δείτε ότι

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια, αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$. Για παράδειγμα, το στοιχείο της δεύτερης γραμμής και τρίτης στήλης της **AI** είναι

$$(a_{21})(0) + (a_{22})(0) + (a_{23})(1) = a_{23}.$$

Αν a είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και $b = a^{-1}$, τότε $ab = ba = 1$. Δεδομένης μιας τετραγωνικής μήτρας **A**, η ερώτηση σχετικά με το αν υπάρχει μια *αντίστροφη μήτρα* **B**, τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, είναι πιο πολύπλοκη και διερευνάται στην Ενότητα8.5.

8.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στα Προβλήματα 1 έως 4, δίνονται δυο μήτρες **A** *και* **B** *και δύο αριθμοί* c *και* d. *Υπολογίστε την μήτρα* $c\mathbf{A} + d\mathbf{B}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, c = 3, d = 4$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}, c = 5, d = -3$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, c = -2, d = 4$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}, c = 7, d = 5$

Στα Προβλήματα 5 έως 12, δύνονται δύο μήτρες **A** *και* **B**. *Υπολογίστε ποιες από τις μήτρες* **AB** *και* **BA** *ορίζονται.*

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 3 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

Στα Προβλήματα 13 έως 16, δίνονται τρεις μήτρες **A**, **B**, *και* **C**. *Αποδείξτε υπολογίζοντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων τον προσεταιριστικό νόμο* $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Στα Προβλήματα 17 έως 22, αρχικά γράψτε τα ομογενή συστήματα που δίνονται στην μορφή $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Στην συνέχεια βρείτε το διάνυσμα λύσης, όπως στην Εξίσωση (9).

17. $$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \quad\;\; + 6x_4 &= 0 \\ x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad + 3x_4 - \;\, x_5 &= 0 \\ x_2 \quad\;\; - 2x_4 + 6x_5 &= 0 \\ x_3 + \;\, x_4 - 8x_5 &= 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \quad\quad\quad + \;\; 7x_5 &= 0 \\ x_3 \quad\;\; - \;\; 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 10x_5 &= 0 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} x_1 \quad\;\; - \;\, x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\;\; + 7x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 - \;\, x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

23. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

και

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{I} = \mathbf{BA}$ ως ακολούθως: Πρώτα εξισώστε τις δύο πλευρές της εξίσωσης $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Στην συνέχεια λύστε τις τέσσερις εξισώσεις που προκύπτουν για τα a, b, c, και d. Τελικά επαληθεύστε ότι $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

24. Επαναλάβετε το Πρόβλημα 23, αντικαθιστώντας την $\mathbf{A}$ με τη μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

25. Επαναλάβετε το Πρόβλημα 23, αντικαθιστώντας την $\mathbf{A}$ με τη μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

26. Χρησιμοποιήστε την τεχνική του Προβλήματος 23 για να δείξετε ότι αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

δεν υπάρχει μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. *Υπόδειξη*: Δείξτε ότι το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων με αγνώστους a, b, c, και d είναι ασυμβίβαστο.

27. Μια **διαγώνια μήτρα** είναι μια τετραγωνική μήτρα της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

στην οποία κάθε στοιχείο εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν. Δείξτε ότι το γινόμενο $\mathbf{AB}$ δύο $n \times n$ διαγώνιων μητρών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι διαγώνια μήτρα. Διατυπώστε έναν περιεκτικό κανόνα υπολογισμού του $\mathbf{AB}$. Είναι ξεκάθαρο ότι $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$· Εξηγήστε γιατί.

28. Η θετική ακέραια δύναμη μιας μήτρας $\mathbf{A}$ ορίζεται έως εξής:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{AA}^2, \\ &\mathbf{A}^4 = \mathbf{AA}^3, \ldots, \quad\quad \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{AA}^n, \ldots . \end{aligned}$$

Υποθέστε ότι οι r και s είναι θετικοί ακέραιου. Αποδείξτε ότι $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$ και ότι $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$ (ιδιότητες ανάλογες με αυτές των δυνάμεων των πραγματικών αριθμών).

29. Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, τότε δείξτε ότι

$$\mathbf{A}^2 = (a + d)\mathbf{A} - (ad - bc)\mathbf{I},$$

όπου με $\mathbf{I}$ συμβολίζουμε την 2×2 ταυτοτική μήτρα. Έτσι κάθε 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{A}^2 - (\operatorname{trace}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

όπου με $\det\mathbf{A} = ad - bc$ συμβολίζουμε την ορίζουσα της μήτρας $\mathbf{A}$, και με $\operatorname{trace}\mathbf{A}$ συμβολίζουμε το ίχνος των διαγώνιων στοιχείων της. Αυτό το αποτέλεσμα είναι η δισδιάστατη περίπτωση του θεωρήματος Cayley-Hamilton που θα δούμε στην Ενότητα 10.3.

30. Ο τύπος του Προβλήματος 29 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την $\mathbf{A}^2$ χωρίς πολλαπλασιασμούς μητρών. Προκύπτει ότι

$$\mathbf{A}^3 = (a + d)\mathbf{A}^2 - (ad - bc)\mathbf{A}$$

χωρίς πολλαπλασιασμό της μήτρας,

$$\mathbf{A}^4 = (a + d)\mathbf{A}^3 - (ad - bc)\mathbf{A}^2,$$

και κ.ο.κ. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αυτή για να υπολογίσετε τις $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, και $\mathbf{A}^5$ αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Στα Προβλήματα 31 έως 38 παρουσιάζονται κανόνες της άλγεβρας μητρών οι οποίοι δεν είναι ανάλογοι με αυτούς της άλγεβρας των πραγματικών αριθμων.

31. (α΄) Υποθέστε ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι οι μήτρες του Παραδείγματος 5. Δείξτε ότι $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

(β΄) Υποθέστε ότι οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τετραγωνικές μήτρες με την ιδιότητα $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Δείξτε ότι $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

32. (α΄) Υποθέστε ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι οι μήτρες του Παραδείγματος 5. Δείξτε ότι $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

(β΄) Υποθέστε ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τετραγωνικές μήτρες τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Δείξτε ότι $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

33. Βρείτε τέσσερις διαφορετικές 2×2 μήτρες $\mathbf{A}$, των οποίων το στοιχείο της κύριας διαγωνίου να είναι είτε $+1$ ή -1, τέτοιες ώστε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

34. Βρείτε μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ με στοιχεία $+1$ ή -1 τέτοια ώστε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Ο τύπος του Προβλήματος 29 μπορεί να βοηθήσει.

35. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Προβλήματος 29 για να βρείτε μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ τέτοια ώστε $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ αλλά τέτοια ώστε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

36. Βρείτε μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ της οποίας τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι μηδέν και $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

37. Βρείτε μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ της οποίας τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου να είναι μηδέν και $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}$.

38. Ως συνέχεια των προηγούμενων δύο προβλημάτων. Βρείτε δύο 2×2 μη μηδενικές μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ τέτοιες ώστε $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$.

39. Χρησιμοποιήστε των πολλαπλασιασμό για να δείξετε ότι αν $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ είναι δύο λύσεις του ομογενούς συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ και c_1 και c_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε το $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ είναι επίσης λύση.

40. (α΄) Χρησιμοποιήστε των πολλαπλασιασμό για να δείξετε ότι αν $\mathbf{x}_0$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{x}_1$ είναι λύση του μη ομογενούς συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, τότε η $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ είναι επίσης λύση του μη ομογενούς συστήματος.

(β΄) Υποθέστε ότι $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ είναι λύσεις του μη ομογενούς συστήματος του (α) μέρους. Δείξτε ότι $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

41. Ως συνέχεια του Προβλήματος 32, δείξτε ότι αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τετραγωνικές μήτρες τέτοιες ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, τότε

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3 = \mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2\mathbf{B} + 3\mathbf{A}\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3$$

και

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^4 = \mathbf{A}^4 + 4\mathbf{A}^3\mathbf{B} + 6\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 + 4\mathbf{A}\mathbf{B}^3 + \mathbf{B}^4.$$

42. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{N}.$$

(α΄) Δείξτε ότι $\mathbf{N}^2 \neq \mathbf{0}$ αλλά $\mathbf{N}^3 = \mathbf{0}$.

(β΄) Χρησιμοποιήστε τον διωνυμικό τύπο για το Πρόβλημα 41 για να υπολογίσετε

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{I}+\mathbf{N})^2 = \mathbf{I} + 2\mathbf{N} + \mathbf{N}^2,$$
$$\mathbf{A}^3 = (\mathbf{I}+\mathbf{N})^3 = \mathbf{I} + 3\mathbf{N} + 3\mathbf{N}^2,$$

και

$$\mathbf{A}^4 = (\mathbf{I}+\mathbf{N})^4 = \mathbf{I} + 4\mathbf{N} + 6\mathbf{N}^2.$$

43. Ας θεωρήσουμε την 3×3 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά επιβεβαιώστε ότι $\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A}$. Στην συνέχεια βρείτε ότι $\mathbf{A}^{n+1} = 3^n\mathbf{A}$ για κάθε ακέραιο θετικό αριθμό n.

44. Έστω ότι οι $\mathbf{A} = \left[a_{hi} \right]$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij} \right]$, και $\mathbf{C} = \left[c_{jk} \right]$ είναι μήτρες διαστάσεων $m \times n$, $n \times p$, και $p \times q$, αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε τον προσεταιριστικό νόμο $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, κάνουμε τα ακόλουθα. Στην Εξίσωση (16) το hjτη στοιχείο του $\mathbf{AB}$ είναι

$$\sum_{i=1}^{n} a_{hi}b_{ij}.$$

Με εφαρμογή πάλι της Εξίσωσης (16), το hj στοιχείο του $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ είναι

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{hi}b_{ij}\right)c_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{hi}b_{ij}c_{jk}.$$

Δείξτε παρόμοια ότι το διπλό άθροισμα στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι επίσης ίσο με το hj στοιχείο της $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Έτσι οι $m \times q$ μήτρες $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ και $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ είναι ίσες.

8.5 Αντίστροφες Μήτρες

Ας θυμηθούμε ότι μια $n \times n$ **ταυτοτική μήτρα** είναι η διαγώνια μήτρα η οποία έχει στην διαγώνιο το 1 και παντού αλλού το μηδέν

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Δεν είναι δύσκολο να συμπεράνει κανείς από τον ορισμό ότι η μήτρα $\mathbf{I}$ δρα όπως η μονάδα για τον πολλαπλασιασμό μητρών:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad \text{και} \quad \mathbf{IB} = \mathbf{B} \tag{2}$$

εφόσον το μέγεθος των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τέτοιο ώστε τα γινόμενα $\mathbf{AI}$ και $\mathbf{IB}$ να ορίζονται. Είναι, ωστόσο, διδακτικό να διερευνήσουμε τις ταυτότητες στην (2) βασιζόμενοι στα δύο δεδομένα για τον πολλαπλασιασμό των μητρών που παρατίθενται παρακάτω. Αρχικά, ας θυμηθούμε ότι ο συμβολισμός

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

εκφράζει την $m \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ ως προς τα διανύσματα στηλών $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Γεγονός 1 $\mathbf{Ax}$ *συναρτήσει των στηλών της* $\mathbf{A}$

Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι ένα n-διάνυσμα, τότε

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n. \tag{4}$$

Ο λόγος είναι ότι όταν κάθε διάνυσμα γραμμή της **A** πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα στήλη **x**, το j στοιχείο πολλαπλασιάζεται με το x_j.

Γεγονός 2 **AB** *συναρτήσει των στηλών* **B**

Αν η **A** είναι μια $m \times n$ μήτρα και η $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$ είναι μια $n \times p$ μήτρα, τότε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(5)}$$

Δηλαδή, *η j στήλη της* **AB** *είναι το γινόμενο της* **A** *και της jστήλης της* **B**. Ο λόγος είναι ότι τα στοιχεία της j στήλης της **AB** προσδιορίζονται από τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων γραμμών της **A** με την j στήλη της **B**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Η τρίτη στήλη του γινομένου **AB** των μητρών

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & -4 \\ -2 & 6 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathbf{Ab}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Για να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, ας σημειωθεί πρώτα ότι

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(6)}$$

όπου j το διάνυσμα στήλη της **I** είναι το j **βασικό μοναδιαίο διάνυσμα**

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \text{ στοιχείο.} \qquad \textbf{(7)}$$

Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, τότε από το Γεγονός 1

$$\mathbf{Ae}_j = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 1 \cdot \mathbf{a}_j + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_j. \qquad \textbf{(8)}$$

Επομένως, από το Γεγονός 2

$$\begin{aligned} \mathbf{AI} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Ae}_1 & \mathbf{Ae}_2 & \cdots & \mathbf{Ae}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

δηλαδή, $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$. Η απόδειξη ότι $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$ είναι παρόμοια. (Βλέπε Προβλήματα 41 και 42.)

Αντίστροφη Μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$

Αν $a \neq 0$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $b = a^{-1} = 1/a$ τέτοιος ώστε $ab = ba = 1$. Αν λοιπόν δεχθούμε μια μη μηδενική μήτρα **A**, αναρωτιόμαστε εάν υπάρχει μήτρα **B** τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Στα επόμενα δύο παραδείγματα βλέπουμε ότι η απάντηση σε αυτή την ερώτηση εξαρτάται από την συγκεκριμένη μήτρα **A**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I};$$

$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ με παρόμοιους υπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Αν η μήτρα $\mathbf{B}$ είχε την ιδιότητα $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a-3c & b-3d \\ -2a+6c & -2b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Όμως εξισώνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbf{AB}$ με την 2×2 ταυτοτική μήτρα στην τελευταία γραμμή, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} a - 3c &= 1 \\ -2a + 6c &= 0 \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} b - 3d &= 0 \\ -2b + 6d &= 1. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ασυμβίβαστες. Έτσι *δεν* υπάρχει μια 2×2 μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ *Αντιστρέψιμη μήτρα*

Μια τετραγωνική μήτρα $\mathbf{A}$ ονομάζεται **αντιστρέψιμη** εάν υπάρχει μια μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Έτσι η μήτρα $\mathbf{A}$ του Παραδείγματος 2 είναι αντιστρέψιμη, ενώ η μήτρα $\mathbf{A}$ του Παραδείγματος 3 δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μια μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ονομάζεται **αντίστροφη μήτρα** της μήτρας $\mathbf{A}$. Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι καμία μήτρα δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές αντίστροφες μήτρες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 *Μοναδικότητα της Αντίστροφης Μήτρας*

Αν μια μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει ακριβώς μια μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Απόδειξη Αν η $\mathbf{C}$ είναι μια (πιθανόν διαφορετική) μήτρα τέτοια ώστε και $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, τότε από τον προσεταιριστικό νόμο του πολλαπλασιασμού έχουμε ότι

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}.$$

Έτσι η $\mathbf{C}$ είναι στην πραγματικότητα η $\mathbf{B}$. ◆

Η μοναδικότητα της αντίστροφης μήτρας $\mathbf{A}$ συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$. Έτσι στο Παράδειγμα 2 έχουμε

$$\text{Αν} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση μιας 2×2 μήτρας $\mathbf{A}$, είναι εύκολο να προσδιοριστεί αν η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $\mathbf{A}^{-1}$ εάν υπάρχει. Στα Προβλήματα 36 και 37 σας ζητάμε να επιβεβαιώσετε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 *Αντιστροφή Μητρών 2 x 2*

Μια 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$, οπότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Η Εξίσωση (9) μας δίνει τον παρακάτω τροπο για να γράψουμε, εάν υπάρχει, την αντίστροφη μιας 2×2 μήτρας:

- Αρχικά, εναλλάξτε τα δύο διαγώνια στοιχεία.
- Στην συνέχεια, αλλάξτε το πρόσημο των δύο μη διαγώνιων στοιχείων.
- Τέλος, διαιρέστε κάθε στοιχείο της μήτρας που προκύπτει με το $ad - bc$.

Μπορείτε να ελέγξετε πως η $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ προκύπτει απο την $\mathbf{A}$ του Παραδείγματος 2 (στο οποίο $ad - bc = 1$) με αυτόν τον τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix},$$

τότε $ad - bc = 36 - 30 = 6 \neq 0$, οπότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Οι δυνάμεις μιας τετραγωνικής μήτρας $\mathbf{A}$ ορίζονται ως εξής, παρόλο που στην περίπτωση αρνητικού εκθέτη πρέπει να υποθέσουμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη. Αν ο n είναι θετικός ακεραίος, ορίζουμε

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A};$$
$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} \quad \text{για } n \geq 1\cdot$$
$$\mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n.$$

Στο Πρόβλημα 28 της Ενότητας 8.4, σας ζητήθηκε να επαληθεύσετε τους νόμους των δυνάμεων

$$\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}, \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs} \tag{10}$$

για θετικό εκθέτη, και στο Πρόβλημα 31 αυτής της ενότητας θα δούμε την περίπτωση του αρνητικού εκθέτη. Στο Πρόβλημα 29 σας ζητάμε να αποδείξετε τα μέρη (α) και (β) του επόμενου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Άλγεβρα Αντίστροφων Μητρών

Αν οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι του ίδιου μεγέθους και αντιστρέψιμες, τότε

η $\mathbf{A}^{-1}$ είναι αντιστρέψιμη και η $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}\cdot$

Αν ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε η $\mathbf{A}^n$ είναι αντιστρέψιμη και η $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n\cdot$

Το γινόμενο $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα και

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{11}$$

Απόδειξη του (iii)

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I};$$
$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Έτσι έχουμε $\mathbf{I}$ όταν πολλαπλασιάσουμε την $\mathbf{AB}$ με $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ *από οποιαδήποτε πλευρά* . Επειδή η αντίστροφη μήτρα της $\mathbf{AB}$ είναι μοναδική, αυτό αποδεικνύει ότι η $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφή της μήτρα είναι $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. ◆

Στα μαθηματικά είναι συχνά σημαντικό να σημειώνονται οι εκπλήξεις. Η έκπληξη στην Εξίσωση (11) είναι η αντιστροφή της φυσικής σειράς των παραγόντων του δεξιού μέρους. Είστε τώρα σε θέση να δείξετε ότι

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Γενικά, οποιοδήποτε γινόμενο αντιστρέψιμων μητρών του ίδιου μεγέθους είναι επίσης αντιστρέψιμο, και το αντίστροφο ενός γινομένου αντιστρέψιμων μητρών είναι το γινόμενο *με αντίστροφη σειρά* των αντιστρόφων τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Λύση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με την Αντίστροφης Μήτρας

Αν η $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{b}$ το σύστημα

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{12}$$

έχει τη μοναδική λύση

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{13}$$

η οποία προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της (12) από αριστερά με την μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$.

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ είναι η μόνη λύση της Εξίσωσης (12). Αρχικά, ο υπολογισμός

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$$

μας δείχνει ότι η $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ *είναι* λύση. Στην συνέχεια, αν $\mathbf{x}_1$ είναι οποιαδήποτε (πιθανώς διαφορετική) λύση, παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός κάθε πλευράς της εξίσωσης με $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ από αριστερά με $\mathbf{A}^{-1}$ δίνει $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, και έτσι η $\mathbf{x}_1$ είναι τελικά η ίδια λύση όπως η $\mathbf{x}$. ◆

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 18, \end{aligned}$$

χρησιμοποιούμε την αντίστροφη μήτρα των συντελεστών

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

που βρήκαμε στο Παράδειγμα 4. Τότε η Εξίσωση (13) δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι η $x_1 = -9$, $x_2 = 7$ είναι η μοναδική λύση.

Πως να βρείτε την A^{-1}

Το Θεώρημα 2 μας λέει μόνο πως να αντιστρέφουμε μήτρες 2×2. Η ανάπτυξη μιας μεθόδου για την αντιστροφή μεγαλύτερων μητρών περιλαμβάνει μια ειδική κατηγορία μητρών, που ορίζουμε στη συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ Στοιχειώδης Μήτρα

Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{E}$ ονομάζεται **στοιχειώδης μήτρα** εάν μπορεί να προκύψει εφαρμόζοντας *μια μόνο* στοιχειώδη πράξη γραμμών στην $n \times n$ ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Οι παρακάτω συνηθισμένες στοιχειώδεις μήτρες προκύπτουν ως εξής.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad (3)R_1 \quad} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad (2)R_1 + R_3 \quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΗ}(R_1, R_2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3$$

Οι τρεις στοιχειώδεις μήτρες $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, και $\mathbf{E}_3$ αντιστοιχούν στους τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

Τώρα, υποθέτουμε ότι μια $m \times m$ στοιχειώδη μήτρα $\mathbf{E}$ αντιστοιχεί σε έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Αποδεικνύεται ότι αν εκτελέσουμε την ίδια εργασία σε μια τυχαία $m \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$, παίρνουμε το γινόμενο $\mathbf{EA}$ το οποίο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την $\mathbf{A}$ στα *αριστερά* με την μήτρα $\mathbf{E}$. Έτσι μπορούμε να πραγματοποιήσουμε έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με την αντίστοιχη στοιχειώδη μήτρα. Στα Προβλήματα 38 έως 40 παρουσιάζονται τυπικές περιπτώσεις της απόδειξης του επόμενου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Στοιχειώδεις Μήτρες και Μετασχηματισμοί Γραμμών
Αν ένας στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών εφαρμοσθεί σε μια $m \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$, τότε το αποτέλεσμα είναι το γινόμενο $\mathbf{EA}$, όπου $\mathbf{E}$ είναι η στοιχειώδης μήτρα η οποία προκύπτει εφαρμόζοντας τον ίδιο μετασχηματισμό γραμμών στην ταυτοτική μήτρα $m \times m$.

Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών είναι αντιστρέψιμοι. Δηλαδή, σε κάθε στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών αντιστοιχεί ένας *αντίστροφος* στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών ο οποίος τον εξουδετερώνει (βλέπε Σχήμα 8.5.1). Άρα λοιπόν, *κάθε στοιχειώδης μήτρα είναι αντιστρέψιμη.* Για να δείτε γιατί, έστω $\mathbf{E}$ μια στοιχειώδης μήτρα και $\mathbf{E}_1$ η στοιχειώδης μήτρα που αντιστοιχεί στον αντίστροφο του μετασχηματισμού γραμμών που μετασχηματίζει την $\mathbf{I}$ στην $\mathbf{E}$. Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός γραμμών μετασχηματίζει την $\mathbf{E}$ στην $\mathbf{I}$, και από το Θεώρημα 5 έχουμε ότι $\mathbf{E}_1\mathbf{E} = \mathbf{I}$. Παρόμοια βλέπουμε ότι $\mathbf{E}\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}$. Έτσι , η στοιχειώδης μήτρα $\mathbf{E}$ είναι αντιστρέψιμη με $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}_1$.

Στοιχειώδης Μετασχηματισμός Γραμμών	Αντίστροφη Λειτουργία
$(c)R_i$	$\frac{1}{c}R_i$
ΕΝΝΑΛΑΓΗ(R_i, R_j)	ΕΝΝΑΛΑΓΗ(R_i, R_j)
$(c)R_i + R_j$	$(-c)R_i + R_j$

ΣΧΗΜΑ 8.5.1 Αντίστροφοι Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί Γραμμών.

Οι στοιχειώδεις μήτρες δεν χρησιμοποιούνται συχνά για υπολογιστικούς λόγους, καθώς είναι πιο εύκολο να εκτελούμε απευθείας τις γραμμοπράξεις παρά να πολλαπλασιάζουμε με στοιχειώδεις μήτρες. Αντίθετα, ο κύριος ρόλος τους είναι η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος, το οποίο οδηγεί με τη σειρά του σε μια πρακτική μέθοδο για την αντιστροφή μητρών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Αντιστρέψιμες Μήτρες και Πράξεις Γραμμών
Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμη με μια $n \times n$ ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$.

Απόδειξη Αρχικά υποθέτουμε ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη. Τότε, από το Θεώρημα 4 (με $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), έχουμε ότι η $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Αλλά από το Θεώρημα 4 της Ενότητας 8.3 έπεται ότι αυτό ισχύει μόνο αν η $\mathbf{A}$ είναι γραμμοϊσοδύναμη με την $\mathbf{I}$.

Τώρα υποθέτουμε, αντίστροφα ότι η $\mathbf{A}$ είναι γραμμοϊσοδύναμη με την $\mathbf{I}$. δηλαδή, υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών που μετατρέπουν την $\mathbf{A}$ στην $\mathbf{I}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5, καθεμία από αυτούς τους μετασχηματισμούς μπορούν να εκτελεστούν πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με την αντίστοιχη στοιχειώδη μήτρα. Αν $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_k$ είναι οι στοιχειώδεις μήτρες που αντιστοιχούν σε αυτές τις πράξεις γραμμών, έπεται ότι

$$\mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{14}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τώρα κάθε πλευρά την Εξίσωσης (14) με την αντίστροφη μήτρα $(\mathbf{E}_k)^{-1}$, $(\mathbf{E}_{k-1})^{-1}$, ..., $(\mathbf{E}_2)^{-1}$, $(\mathbf{E}_1)^{-1}$ αντίστοιχα, θα βρούμε ότι

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1)^{-1}(\mathbf{E}_2)^{-1}\cdots(\mathbf{E}_{k-1})^{-1}(\mathbf{E}_k)^{-1}. \tag{15}$$

Έτσι η **A** είναι το γινόμενο αντιστρέψιμων στοιχειωδών μητρών, και από το ((ς» του Θεωρήματος 3 έχουμε ότι η **A** είναι αντιστρέψιμη. ◆

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6 στην πραγματικότητα εξηγεί *πώς θα βρούμε* την αντίστροφη μήτρα της **A**. Αν αντιστρέψουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης (15) (θυμηθείτε να αντιστρέψετε τη σειρά από τα δεξιά), έχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}. \tag{16}$$

Επειδή κάθε αριστερός πολλαπλασιασμός με μια στοιχειώδη μήτρα είναι ισοδύναμος με την εκτέλεση του αντίστοιχου μετασχηματισμού γραμμής, βλέπουμε από τη σύγκριση των Εξισώσεων (14) και (16) ότι *η ίδια ακολουθία μετασχηματισμών γραμμών που μετασχηματίζει την* **A** *στην* **I** *μετασχηματίζει και την* **I** *στην* $\mathbf{A}^{-1}$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Βρείτε την A^{-1}

Για να βρείτε την αντίστροφη $\mathbf{A}^{-1}$ μια αντιστρέψιμης $n \times n$ μήτρας **A**, βρείτε μια ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών που μετασχηματίζει μια μήτρα **A** σε μια $n \times n$ ταυτοτική μήτρα **I**. Στην συνέχεια εφαρμόστε την ίδια ακολουθία μετασχηματισμών με την ίδια σειρά στην **I** για να την μετατρέψετε στην $\mathbf{A}^{-1}$.

Είναι πιο πρακτικό να μετασχηματίζουμε την μήτρα **A** στην **I** και την **I** στην $\mathbf{A}^{-1}$ παράλληλα όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Βρείτε την αντίστροφη της μήτρας 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Λύση Θέλουμε να μετασχηματίσουμε την **A** στην 3×3 ταυτοτική μήτρα **I** ενώ ταυτόχρονα θα εκτελούμε την ίδια ακολουθία των μετασχηματισμών γραμμών στην **I** για να προκύψει η $\mathbf{A}^{-1}$. Για να πραγματοποιήσουμε αυτή την διαδικασία αποτελεσματικά, προσαρτούμε τη **I** στο δεξιό μέρος της **A** και σχηματίζουμε μια μήτρα 3×6

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Τώρα εφαρμόζουμε την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών στην 3×6 μήτρα (έχει σχεδιαστεί για να μετασχηματίζει το αριστερό μισό της στην 3×3 ταυτοτική μήτρα).

$$\xrightarrow{(-1)R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{ΕΝΝΑΛΑΓΗ}(R_2, R_3)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-5)R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right]$$

Τώρα που έχουμε μετασχηματίσει το αριστερό μισό της 3×6 μήτρας στη $\mathbf{I}$, απλά εξετάζουμε το δεξί μισό της μήτρας για να δούμε ότι η αντίστροφη της $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{bmatrix}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Κανονικά, δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν μια δεδομένη τετραγωνική μήτρα είναι αντιστρέψιμη ή όχι. Για να το βρούμε, προσπαθούμε να εκτελέσουμε τη διαδικασία του Παραδείγματος 7. Αν καταφέρουμε να μετασχηματίσουμε την $\mathbf{A}$ στην $\mathbf{I}$, τότε η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη και έτσι βρίσκουμε την $\mathbf{A}^{-1}$. Διαφορετικά—αν, κάπου στην πορεία, εμφανιστεί στο αριστερό μέρος μια σειρά εξ ολοκλήρου με μηδενικές γραμμές — συμπεραίνουμε ότι η $\mathbf{A}$ δεν είναι γραμμοϊσοδύναμη με την $\mathbf{I}$, και έτσι (από το Θεώρημα 6) $\mathbf{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

Εξισώσεις Μητρών

Σε κάποιες εφαρμογές, χρειάζεται να λύσουμε διαδοχικά και αρκετές φορές ένα σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n εξισώσεων με n αγνώστους— με την ίδια $n \times n$ μήτρα συντελεστών $\mathbf{A}$ κάθε φορά, αλλά με διαφορετικό διάνυσμα σταθερών $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ στο δεξί μέρος. Έτσι θέλουμε να βρούμε τα διανύσματα λύσης $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k. \tag{17}$$

Από το 2ο Γεγονός στην αρχή αυτής της ενότητας,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_1 & \mathbf{Ax}_2 & \cdots & \mathbf{Ax}_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_k \end{bmatrix}.$$

Έτσι οι k εξισώσεις στη (17) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση μητρών

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{18}$$

όπου

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{bmatrix}.$$

Αν η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη και γνωρίζουμε την $\mathbf{A}^{-1}$, μπορούμε να βρούμε την $n \times k$ μήτρα των «αγνώστων» πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της Εξίσωσης (18) από αριστερά με $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{19}$$

Σημειώστε ότι αυτή η εξίσωση είναι η γενίκευση της Εξίσωσης (13) του Θεωρήματος 4. Αν $k = 1$, είναι πολλές φορές απλούστερο να λύσουμε το σύστημα με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss, αλλά όταν αναζητούμε περισσότερες λύσεις, μπορεί να είναι απλούστερο αρχικά να βρούμε την $\mathbf{A}^{-1}$ και στην συνέχεια να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (19).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Βρείτε μια 3×4 μήτρα $\mathbf{X}$ τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση Η μήτρα των συντελεστών είναι η μήτρα $\mathbf{A}$ της οποίας την αντίστροφη βρήκαμε στο Παράδειγμα 7, έτσι η Εξίσωση (19) δίνει

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & -13 & 14 & 1 \\ -1 & -5 & 8 & -2 \\ 11 & 33 & -39 & 4 \end{bmatrix}.$$

Κοιτώντας την τρίτη στήλη της $\mathbf{B}$ και $\mathbf{X}$, για παράδειγμα, βλέπουμε ότι η λύση του

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

είναι $x_1 = 14$, $x_2 = 8$, $x_3 = -39$.

Μη Ιδιάζουσες Μήτρες

Το Θεώρημα 6 μας λέει ότι μια τετραγωνική μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμη με την ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$, και από το Θεώρημα 4 στην Ενότητα 8.3 έχουμε ότι αυτό είναι αληθές αν και μόνο αν το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Μια τετραγωνική μήτρα που έχει αυτές τις ισοδύναμες ιδιότητες πολλές φορές ονομάζεται **μη ιδιάζουσα μήτρα**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Ιδιότητες Μη Ιδιάζουσας Μήτρας

Οι ακόλουθες ιδιότητες μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ είναι ισοδύναμες.

η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη.

η $\mathbf{A}$ είναι γραμμοϊσοδυναμη με την $n \times n$ ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$.

το $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση..

Για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{b}$, το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση.

Για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{b}$, το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό.

Απόδειξη Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν του Θεωρήματος 7, γνωρίζουμε ήδη ότι οι ιδιότητες (i), (ii), και (iii) είναι ισοδύναμες—αν μια $\mathbf{A}$ έχει μια από αυτές τις ιδιότητες,τότε έχει και τις άλλες δύο. Μπορούμε, ως εκ τούτου, να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θεμελιώνοντας μια λογική αλυσίδα

$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι αν η $\mathbf{A}$ έχει την ιδιότητα (iii), τότε έχει την ιδιότητα (iv), και, παρόμοια, ότι η (iv) συνεπάγεται την (v) και ότι η (v) συνεπάγεται την(i). (iii)

$\Rightarrow$ (iv): Γνωρίζουμε ήδη ότι η (iii) συνεπάγεται την (i), και από το Θεώρημα 4 έχουμε ότι η (i) συνεπάγεται την (iv). Έτσι, η (iii) συνεπάγεται την (iv). (iv) $\Rightarrow$ (v): Αυτό είναι

προφανές, γιατί αν το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση, τότε θα έχει σίγουρα μια λύση, και έτσι είναι συμβιβαστό. (v) $\Rightarrow$ (i): Με δεδομένο ότι το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ είναι

συμβιβαστό για κάθε $\mathbf{b}$, πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη. Έστω $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$, είναι το j διάνυσμα στήλη της ταυτοτικής μήτρας $\mathbf{I}$. Τότε η $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_j$ δίνει ένα n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}_j$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{Ax}_j = \mathbf{e}_j. \tag{20}$$

Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ μπορούν να προσδιορισθούν με αυτό τον τρόπο για $j = 1, 2, \ldots, n$, και έστω ότι η $\mathbf{B}$ είναι μια $n \times n$ μήτρα με αυτά τα διανύσματα ως στήλες της:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_1 & \mathbf{Ax}_2 & \cdots & \mathbf{Ax}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \qquad \text{[απο την (20)].} \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, και έτσι βρίσκουμε μια μήτρα $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμη αποδεικνύοντας ότι η $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση [και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ιδιότητα (γ) συνεπάγεται την ιδιότητα (α)]. Αλλά αν η $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$, τότε

$$\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{A0} = \mathbf{0},$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι $\mathbf{Ix} = \mathbf{0}$ και έτσι ότι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Άρα η $\mathbf{B}$ είναι πράγματι αντιστρέψιμη. Μπορούμε λοιπόν να πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της εξίσωσης $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ στο δεξί μέρος με $\mathbf{B}^{-1}$ για να έχουμε

$$\mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{IB}^{-1},$$

έτσι ώστε $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$. Έτσι η $\mathbf{A}$ είναι η αντίστροφη μιας αντιστρέψιμης μήτρας, επομένως είναι και η ίδια αντιστρέψιμη. Αυτό μας λέει ότι η ιδιότητα (ε) συνεπάγεται την ιδιότητα (α), και έτσι έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη. ◆

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7 είναι αρκετά μακροσκελής, αλλά συνοψίζει το μεγαλύτερο μέρος της βασικής θεωρίας του κεφαλαίου. Πράγματι, αυτό το θεώρημα είναι ένα από τα κεντρικά θεωρήματα της στοιχειώδους γραμμικής άλγεβρας, και επανειλημμένα θα αναφερόμαστε σε αυτό στα επόμενα κεφάλαια.

8.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στα Προβλήματα 1 έως 8, εφαρμόστε αρχικά τους τύπους της (9) για να βρείτε την $\mathbf{A}^{-1}$. Στην συνέχεια βρείτε την $\mathbf{A}^{-1}$ (όπως στο Παράδειγμα 5) για να λύσετε το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

Στα Προβλήματα 9 έως 22, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Παραδείγματος 7 για να βρείτε την αντίστροφη $\mathbf{A}^{-1}$ κάθε μήτρας $\mathbf{A}$.

9. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 13 \\ 3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Στα Προβλήματα 23 έως 28, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Παραδείγματος 8 για να βρείτε μια μήτρα $\mathbf{X}$ τέτοια ώστε $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

29. Επιβεβαιώστε τα τμήματα (α) και (β) του Θεωρήματος 3.

30. Υποθέστε ότι οι $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, και η $\mathbf{C}$ είναι αντιστρέψιμες μήτρες του ίδιου μεγέθους. Δείξτε ότι το γινόμενο $\mathbf{ABC}$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα και ότι $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

31. Υποθέστε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια αντιστρέψιμη μήτρα και ότι οι r και s είναι αρνητικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι $\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$ και ότι $(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$.

32. Αποδείξτε ότι η αν η $\mathbf{A}$ είναι μια αντιστρέψιμη μήτρα και $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, τότε $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Επομένως οι *αντιστρέψιμες* μήτρες μπορούν να απλοποιηθούν.

33. Έστω $\mathbf{A}$ μια $n \times n$ μήτρα τέτοια ώστε $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}$. Δείξτε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

34. Δείξτε ότι μια διαγώνια μήτρα είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν κάθε διαγώνιο στοιχείο της δεν είναι μηδενικό . Σε αυτή την περίπτωση, αναφέρετε συνοπτικά πως προκύπτει η αντίστροφη μήτρα.

35. Έστω $\mathbf{A}$ μια $n \times n$ μήτρα με είτε μια γραμμή είτε μια στήλη με μηδενικά στοιχεία. Δείξτε ότι $\mathbf{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμη.

36. Δείξτε ότι $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμη αν $ad - bc = 0$.

37. Υποθέστε ότι $ad - bc \neq 0$ και η $\mathbf{A}^{-1}$ ορίζεται όπως στην Εξίσωση (9). Αποδείξτε απευθείας ότι $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

38. Έστω ότι η $\mathbf{E}$ είναι η στοιχειώδης μήτρα $\mathbf{E}_1$ του Παραδείγματος 6. Αν η $\mathbf{A}$ είναι μια μήτρα 2×2, δείξτε ότι το $\mathbf{EA}$ είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της πρώτης γραμμής της $\mathbf{A}$ με το 3.

39. Έστω ότι η $\mathbf{E}$ είναι η στοιχειώδης μήτρα $\mathbf{E}_2$ του Παραδείγματος 6 και υποθέστε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια μήτρα 3×3 . Δείξτε ότι το $\mathbf{EA}$ είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης της πρώτη γραμμή της $\mathbf{A}$ δύο φορές στην τρίτη γραμμή της.

40. Έστω ότι η $\mathbf{E}$ είναι η στοιχειώδης μήτρα $\mathbf{E}_3$ του Παραδείγματος 6. Δείξτε ότι η $\mathbf{EA}$ είναι το αποτέλεσμα της αντιμετάθεσης των δύο πρώτων γραμμών της μήτρας $\mathbf{A}$.

41. Δείξτε ότι η i γραμμή του γινομένου $\mathbf{AB}$ είναι $\mathbf{A}_i\mathbf{B}$, όπου $\mathbf{A}_i$ είναι η i γραμμή της μήτρας $\mathbf{A}$.

42. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 41 για να δείξετε ότι αν η $\mathbf{B}$ είναι μια $m \times n$ μήτρα και η $\mathbf{I}$ είναι η $m \times m$ ταυτοτική μήτρα, τότε $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$.

43. Υποθέστε ότι οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι γραμμοϊσοδύναμες. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5 για να αποδείξετε ότι $\mathbf{B} = \mathbf{GA}$, όπου $\mathbf{G}$ είναι γινόμενο των στοιχειωδών μητρών.

44. Δείξτε ότι κάθε αντιστρέψιμη μήτρα είναι γινόμενο στοιχειωδών μητρών.

45. Εξαγάγετε από την απόδειξη του Θεωρήματος 7 μια αυτοτελή απόδειξη για το εξής: Αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τετραγωνικές μήτρες τέτοιες ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, τότε οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμες.

46. Συνάγετε από το αποτέλεσμα του Προβλήματος 45 ότι αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι τετραγωνικές μήτρες των οποίων το γινόμενο $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμη μήτρα, τότε οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι και αυτές αντιστρέψιμες.

8.5 Εφαρμογή Αυτοματοποιημένη Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Τα γραμμικά συστήματα με περισσότερες από δύο ή τρεις εξισώσεις είναι πιο σύνηθες να λύνονται με την βοήθεια αριθμομηχανής ή υπολογιστή. Αν ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$ είναι γραμμένο στην μορφή $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε χρειάζεται αρχικά να υπολογίσουμε την αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$ και στην συνέχεια το γινόμενο $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Υποθέστε ότι εισάγουμε μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα στήλης $\mathbf{b}$ (όπως είδαμε στην Εφαρμογή 8.2). Αν η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εντολή with(linalg): inverse(A) του *Maple*, την Inverse[A] του *Mathematica* ή την inv(A) του MATLAB. Κατά συνέπεια το διάνυσμα λύσης $\mathbf{x}$ υπολογίζεται στο *Maple* με την εντολή

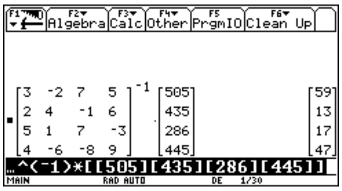
```
with(linalg): x := multiply(inverse(A),b)·
```

ή με την εντολή *Mathematica*

```
x = Inverse[A].b
```

ή με την εντολή MATLAB

```
x = inv(A)*b
```



ΣΧΗΜΑ 8.5.2 TI-89 επιλύοντας ένα γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Στο Σχήμα 8.5.2 βλέπουμε έναν παρόμοιο υπολογισμό από αριθμομηχανή για το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 505 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 &= 435 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 &= 286 \\ 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 445 \end{aligned}$$

με τη λύση $x_1 = 59$, $x_2 = 13$, $x_3 = 17$, $x_4 = 47$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Παρόλο που στις προηγούμενες εντολές βλέπουμε να χρησιμοποιούνται αντίστροφες μήτρες στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα είναι εφοδιασμένα και με άμεσες μεθόδους—όπως της απαλοιφής του Gauss αλλά και ακόμα πιο εξελιγμένες τεχνικές—οι οποίες είναι πιο αποτελεσματικές και αριθμητικά αξιόπιστες για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *χωρίς* πρώτα να υπολογίζουμε την αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$.

Χρησιμοποιήστε μια αριθμομηχανή ή έναν υπολογιστή για να λύσετε τα γραμμικά συστήματα των Προβλημάτων 1 έως 6 της Εφαρμογής 83. Τα παρακάτω εφαρμοσμένα προβλήματά είναι στοιχειώδη— για την ακρίβεια μοιάζουν με προβλήματα σχολικής άλγεβρας—αλλά μπορούν να δείξουν την πρακτική εφαρμογή των αυτοματοποιημένων λύσεων.

1. Καθώς περπατάτε, εντοπίζετε στο πεζοδρόμιο μια μικρή αλλά βαριά δερμάτινη τσάντα. Αποδεικνύεται ότι περιέχει χρυσά νομίσματα ΗΠΑ των εξής ειδών:

   - Χρυσά νομίσματα μισής ουγγιάς αξίας \$285 το καθένα,
   - Χρυσά νομίσματα ενός τετάρτου της ουγγιάς αξίας \$150 το καθένα, και
   - Χρυσά νομίσματα ενός δεκάτου της ουγγιάς αξίας \$70 το καθένα,

   Μια τραπεζική απόδειξη που βρέθηκε στην τσάντα πιστοποιεί ότι αυτή περιέχει 258 τέτοια νομίσματα με συνολικό βάρος 67 ουγγιές, συνολικής αξίας \$ 40 , 145. Πόσα κέρματα κάθε είδους υπάρχουν;

2. Τώρα πραγματικά την κάνατε λαχείο! Βρήκατε μια τσάντα που περιέχει χρυσά νομίσματα ΗΠΑ της μιας ουγγιάς αξίας \$ 550 το καθένα, μαζί με νομίσματα μισής ουγγιάς και ενός τετάρτου της ουγγιάς τα οποία αποτιμώνται όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα. Εάν αυτή η τσάντα περιέχει συνολικά 365 νομίσματα, με συνολικό βάρος ακριβώς £ 11 , συνολικής αξίας \$ 100 , 130, πόσα χρυσά νομίσματα κάθε είδους υπάρχουν;

3. Ένας πελάτης παραγγέλνει 81 γαλόνια μπογιάς που να αποτελείται από ίσες ποσότητες κόκκινου, πράσινου και μπλε χρώματος — και, ως εκ τούτου, θα μπορούσε να παρασκευαστεί αναμιγνύοντας 27 γαλόνια από κάθε χρώμα. Ωστόσο, το κατάστημα επιθυμεί να προετοιμάσει την παραγγελία αναμιγνύοντας τρεις τύπους μπογιάς οι οποίοι είναι ήδη διαθέσιμοι σε μεγάλες ποσότητες:

   - μια *κοκκινωπή* μπογιά που αποτελείται από 50% κόκκινο, 25% πράσινο, και 25% μπλε,
   - μια *πρασινωπή* μπογιά που αποτελείται από 12.5% κόκκινο, 75% πράσινο, και 12.5% μπλε και
   - μια *γαλαζωπή* μπογιά που αποτελείται από 20% κόκκινο, 20% πράσινο, και 60% μπλε.

   Πόσα γαλόνια από κάθε μπογιά απαιτούνται για να προετοιμαστεί η παραγγελία του πελάτη·

4. Τώρα το χρωματοπωλείο λαμβάνει μια πραγματικά μεγάλη παραγγελία — για 244 γαλόνια μπογιάς που να αποτελείται από 1/2 κόκκινο χρώμα, 1/ 4 πράσινο και 1/ 4 μπλε χρώμα. Το κατάστημα διαθέτει σε μεγάλες ποσότητες τρεις τύπους μπογιάς οι οποίοι έχουν ήδη αναμειχθεί— την πρασινωπή και τη γαλαζωπή μπογιά του προηγούμενου προβλήματος, καθώς και μια κοκκινωπή μπογιά η οποία αποτελείται από 03.02 κόκκινο χρώμα, 1/ 6 πράσινο χρώμα, και 1 / 6 μπλε χρώμα. Πόσα γαλόνια από κάθε μπογιά πρέπει να αναμιχθούν προκειμένου να καλυφθεί η παραγγελία;

5. Ένα γκρουπ 45 ατόμων παρακολούθησε δύο περιηγήσεις με λεωφορείο σε θεματικά πάρκα της Φλόριντα σε διαδοχικές ημέρες. Την 1η ημέρα η είσοδος ήταν \$ 15 ανά ενήλικα, \$ 8 ανά παιδί, \$ 12 ανά άτομο τρίτης ηλικίας και το συνολικό κόστος ανήλθε σε \$558 δολάρια. Τη 2η ημέρα η είσοδος ήταν \$ 20 ανά ενήλικα, \$ 12 ανά παιδί και \$ 17 ανά άτομο τρίτης ηλικίας και το συνολικό κόστος ανήλθε σε \$771 δολάρια. Πόσοι ενήλικες, παιδιά και ηλικιωμένοι ήταν σε αυτό το γκρουπ;

6. Για κάποιον τρελό λόγο, τα γεύματα που αγοράστηκαν στο πρώτο θεματικό πάρκο υπολογίστηκαν ξεχωριστά για τους ενήλικες, τα παιδιά και τους ηλικιωμένους. Οι ενήλικες παρήγγειλαν 34 χοτ ντογκ, 15 τηγανητές πατάτες και 24 αναψυκτικά κάνοντας συνολικό λογαριασμό \$ 70.85. Τα παιδιά παρήγγειλαν 20 χοτ ντογκ, 14 τηγανιτές πατάτες και 15 αναψυκτικά κάνοντας συνολικό λογαριασμό \$ 46.65. Οι ηλικιωμένοι παρήγγειλαν 11 χοτ ντογκ, 10 τηγανιτές πατάτες, και 12 αναψυκτικά και έκαναν συνολικό λογαριασμό\$ 30.05. Ποιες ήταν οι τιμές του χοτ ντογκ, της μερίδας τηγανητές πατάτες και του αναψυκτικού;

7. Ένα εστιατόριο fast-food πουλάει τέσσερα είδη σάντουιτς — χάμπουργκερ, τσίζμπεργκερ, με βοδινό και με κοτόπουλο — και έχει τέσσερις ταμειακές μηχανές. Στο τέλος κάθε ημέρας, κάθε ταμειακή μηχανή λογαριάζει τον αριθμό κάθε τύπου σάντουιτς που πωλήθηκε και τα συνολικά έσοδα από σάντουιτς για την ημέρα. Οι τέσσερις ταμίες δουλεύουν με διαφορετικές ταχύτητες, και τα σύνολα μιας ημέρας είχαν ως εξής:

	Χάμπουργκερ	Τσίζμπεργκερ	Βοδινό	Κοτόπουλο	Απόδειξη
Ταμείο 1	37	44	17	23	\$232.99
Ταμείο 2	28	35	13	17	\$178.97
Ταμείο 3	32	39	19	21	\$215.99
Ταμείο 4	47	51	25	29	\$294.38

   Ποια ήταν η τιμή του καθενός από τα τέσσερα είδη σάντουιτς;

8. Το εστιατόριο του προηγούμενου προβλήματος προσθέτει ένα σάντουιτς ζαμπόν στο μενού και, λόγω της αυξημένης κίνησης, προσθέτει και μια πέμπτη ταμειακή μηχανή και μειώνει τις τιμές. Μετά από αυτή την επέκταση, τα σύνολα μίας ημέρας ήταν ως ακολούθως:

	Χάμπουργκερ	Τσίζμεργκερ	Βοδινό	Κοτόπουλο	Ζαμπόν	Απόδειξη
Ταμείο 1	41	49	22	26	19	\$292.79
Ταμείο 2	34	39	18	20	16	\$236.73
Ταμείο 3	36	43	23	24	18	\$270.70
Ταμείο 4	49	52	26	31	24	\$340.19
Ταμείο 5	52	55	24	28	25	\$341.64

Ποιες ήταν οι νέες τιμές των πέντε τύπων σάντουιτς;

8.6 Ορίζουσες

Στο Θεώρημα 2 της Ενότητας 8.5 είδαμε ότι μια 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$. Ο αριθμός $ad - bc$ ονομάζετε **ορίζουσα** μιας 2×2 μήτρας $\mathbf{A}$. Υπάρχουν αρκετοί συμβολισμοί για τις ορίζουσες:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1}$$

Ειδικότερα, σημειώστε ότι οι κάθετες γραμμές είναι αυτές που διαφοροποιούν τις ορίζουσες από τις μήτρες. Ορισμένες φορές γράφουμε $\det(\mathbf{A})$ για να τονίσουμε η (1) είναι μια συνάρτηση που συνδέει έναν αριθμό $|\mathbf{A}|$ για κάθε μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (3)(-6) - (4)(7) = -46$$

Οι ορίζουσες συχνά χρησιμοποιούνται στην στοιχειώδη άλγεβρα για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2×2 της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Από τα Θεωρήματα 2 και 7 της Ενότητας 8.5 προκύπτει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η **ορίζουσα των συντελεστών**—δηλαδή η ορίζουσα της μήτρας $\mathbf{A}$ των συντελεστών—δεν είναι μηδέν:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Τότε, ο **κανόνας του Cramer** μας λέει ότι αυτή η μοναδική λύση δίνεται από

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Έτσι ο κανόνας του Cramer μας δίνει κάθε ένα από τα x και y ως το πηλίκο δύο οριζουσών, όπου ο παρανομαστής είναι η ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών. Στον αριθμητή για το x οι συντελεστές a_{11} και a_{21} του x αντικαθίστανται από τους συντελεστές b_1 και b_2, ενώ στον αριθμητή για το y οι συντελεστές του y αντικαθίστανται από τους συντελεστές b_1 και b_2. Η απόδειξη του κανόνα του Cramer προκύπτει με απλούς υπολογισμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 7x + 8y &= 5 \\ 6x + 9y &= 4 \end{aligned}$$

με ορίζουσα των συντελεστών την

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 15,$$

απλά αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4) και έχουμε

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{15} = \frac{13}{15}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{15} = -\frac{2}{15}.$$

Ορίζουσες Ανωτέρας Τάξης

Ορίζουμε 3×3 ορίζουσες συναρτήσει 2×2 οριζουσών, 4×4 ορίζουσες συναρτήσει 3×3 οριζουσών, κ.ο.κ. Αυτός ο τύπος του ορισμού—ενός μεγέθους την φορά, με τον ορισμό κάθε μεγέθους να εξαρτάται από ένα μικρότερο μέγεθος—ονομάζεται *επαγωγικός ορισμός*.

Η ορίζουσα $\det \mathbf{A} = |a_{ij}|$ μιας 3×3 μήτρας $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(5)}$$

Σημειώστε το μοναδικό αρνητικό πρόσημο στη δεξιά πλευρά. Οι τρεις 2×2 ορίζουσες στην (5) πολλαπλασιάζονται με τα στοιχεία a_{11}, a_{12} και a_{13} κατά μήκος της *πρώτης γραμμής* της μήτρας $\mathbf{A}$. Κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία a_{1j} πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα της 2×2 υπομήτρας της $\mathbf{A}$ που απομένει αφού διαγραφούν η γραμμή και η στήλη που περιέχουν το στοιχείο a_{1j}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1) + (2)(5) - (3)(-4) = 27$$

Ο ορισμός των οριζουσών ανωτέρας τάξης απλοποιείται με την χρήση της ορολογίας και των συμβολισμών που ακολουθούν.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ελάσσονες Ορίζουσες και Συμπαράγοντες

Έστω $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ μια $n\times n$ μήτρα. Η *ij* **ελάσσων** της $\mathbf{A}$ (επίσης ονομάζεται και **ελάσσων** του a_{ij}) είναι η ορίζουσα M_{ij} μιας $(n-1)\times(n-1)$ υπομήτρας η οποία προκύπτει αφού διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη της $\mathbf{A}$. Η *ij* **συμπαράγουσα** A_{ij} της $\mathbf{A}$ (ή η **συμπαράγουσα** του a_{ij}) ορίζεται να είναι

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad \textbf{(6)}$$

Για παράδειγμα, η ελάσσων του a_{12} σε μια 3×3 μήτρα είναι

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Η ελάσσων του a_{32} σε μια 4×4 μήτρα είναι

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Σύμφωνα με την Εξίσωση (6), η συμπαράγουσα A_{ij} προκύπτει προσαρτώντας το πρόσημο $(-1)^{i+j}$ στην ελάσσονα υποορίζουσα M_{ij}. Αυτό το πρόσημο είναι εύκολο να το θυμάστε ως εκείνο που εμφανίζεται στην *ij* θέση σε συστοιχίες όπως

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι το θετικό πρόσημο εμφανίζεται πάντα στην επάνω αριστερή γωνία και ότι τα πρόσημα εναλλάσσονται οριζόντια και κάθετα. Στην περίπτωση 4×4 για παράδειγμα,είναι

$$\begin{aligned} A_{11} &= +M_{11}, \quad A_{12} = -M_{12}, \quad A_{13} = +M_{13}, \quad A_{14} = -M_{14}, \\ A_{21} &= -M_{21}, \quad A_{22} = +M_{22}, \quad A_{23} = -M_{23}, \quad A_{24} = +M_{24}, \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.

Με χρήση αυτού του συμβολισμού, ο ορισμός της 3×3 ορίζουσας στην (5) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι το **ανάπτυγμα συμπαραγουσών** της $\det \mathbf{A}$ ως προς την *πρώτη γραμμή* της $\mathbf{A}$. Η φυσιολογική του γενίκευση δίνει τον ορισμό της ορίζουσας μιας $n\times n$ μήτρας, υπό την επαγωγική υπόθεση ότι οι $(n-1)\times(n-1)$ ορίζουσες έχουν ήδη ορισθεί.

ΟΡΙΣΜΟΣ $\quad n \times n$ Ορίζουσες

Η **ορίζουσα** $\det \mathbf{A} = |a_{ij}|$ μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ ορίζεται ως εξής

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \tag{8}$$

Έτσι πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής της $\mathbf{A}$ με την συμπαράγουσα της και στη συνέχεια προσθέτουμε τα n γινόμενα για να βρούμε την $\det \mathbf{A}$.

Στους αριθμητικούς υπολογισμούς, είναι συνήθως πιο βολικό να εργαζόμαστε πρώτα με τις ελάσσονες ορίζουσες παρά με τις συμπαράγουσες και στην συνέχεια να προσαρτούμε το κατάλληλο πρόσημο σύμφωνα με τους κανόνες που δείξαμε προηγουμένως. Σημειώστε ότι οι ορίζουσες έχουν ορισθεί μόνο για *τετραγωνικές* μήτρες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο δύο μη μηδενικοί όροι για τον υπολογισμό των συμπαραγουσών κατά μήκος της πρώτης γραμμής. Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τους συμπαράγοντες για τα μηδενικά, διότι θα πολλαπλασιάζονται με το μηδέν στον υπολογισμό της ορίζουσας. Ως εκ τούτου

$$\det \mathbf{A} = +(2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Κάθε μια από τις 3×3 ορίζουσες στο δεξί μέρος έχει έναν μόνο μη μηδενικό όρο και έτσι το ανάπτυγμα της συμπαράγουσας ως προς την πρώτη γραμμή θα είναι

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (2)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (3)(+1)\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(12-10) + (3)(14+18) = 92. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι, αν μπορούσαμε να αναπτύξουμε και ως προς την δεύτερη γραμμή στο Παράδειγμα 4, θα είχαμε μία μόνο 3×3 ορίζουσα να υπολογίσουμε. Ισχύει πράγματι ότι μια ορίζουσα μπορεί να αναπτυχθεί κατά μήκος *οποιασδήποτε* γραμμής *ή* στήλης. Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος παρουσιάζεται στην επόμενη Ενότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ανάπτυγμα Συμπαραγόντων Ορίζουσας

Η ορίζουσα μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ μπορεί να προσδιορισθεί κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης. Το ανάπτυγμα των συμπαραγουσών κατά μήκος της i γραμμής είναι

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \tag{9}$$

Το ανάπτυγμα των συμπαραγουσών κατά μήκος της j στήλης είναι

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{10}$$

Οι τύποι (9) και (10) μας δίνουν τα $2n$ διαφορετικά αναπτύγματα συμπαραγουσών μιας $n \times n$ ορίζουσας. Για $n = 3$, για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \left.\begin{aligned} &a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ =\ &a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ =\ &a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned}\right\} \text{ανάπτυγμα γραμμών} \\ &\left.\begin{aligned} =\ &a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ =\ &a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ =\ &a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}\right\} \text{ανάπτυγμα στηλών} \end{aligned}$$

Σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε φυσικά να προσπαθήσουμε να επιλέξουμε το ανάπτυγμα που απαιτεί την ελάχιστη υπολογιστική εργασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

αναπτύσσουμε ως προς την τρίτη στήλη, επειδή έχει μια μόνο μη μηδενική τιμή. Έτσι

$$\det \mathbf{A} = -(2)\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(35-24) = -22.$$

Εκτός του ότι μας παρέχει τρόπους υπολογισμού των οριζουσών, το θεώρημα για το Ανάπτυγμα Συμπαραγόντων Ορίζουσας είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τη διερεύνηση των γενικών ιδιοτήτων των οριζουσών. Για παράδειγμα, προκύπτει άμεσα από τους τύπους (9) και (10) ότι, *αν η τετραγωνική μήτρα* $\mathbf{A}$ *περιέχει είτε μια γραμμή είτε μια στήλη μόνο με μηδενικά, τότε* $\det \mathbf{A} = 0$. Για παράδειγμα, αναπτύσσοντας κατά μήκος της δεύτερης γραμμής βλέπουμε απευθείας ότι

$$\begin{vmatrix} 17 & 33 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 80 & -62 & 41 \end{vmatrix} = 0.$$

Ιδιότητες Γραμμών και Στηλών

Τώρα θα παραθέσουμε επτά ιδιότητες των οριζουσών οι οποίες απλοποιούν τον υπολογισμό τους. Κάθε μια από αυτές τις ιδιότητες μπορεί να επαληθευτεί άμεσα στην περίπτωση των οριζουσών 2×2 . Όπως ακριβώς ο ορισμός μας των $n \times n$ οριζουσών ήταν επαγωγικός, έτσι και οι ακόλουθες Ιδιότητες 1 έως 7 αποδεικνύονται επαγωγικά. Έτσι, υποθέτουμε ότι $n \geq 3$ και ότι οι ιδιότητες αυτές έχουν ήδη αποδειχθεί για ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$.

Ιδιότητα **1:** Αν η $n \times n$ μήτρα $\mathbf{B}$ προκύπτει από την $\mathbf{A}$ με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) της $\mathbf{A}$ με την σταθερά k, τότε $\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$.

Για παράδειγμα, αν η i γραμμή της $\mathbf{A}$ πολλαπλασιάζεται με k, τότε τα στοιχεία *εκατέρωθεν* της i γραμμής της $\mathbf{A}$ δεν αλλάζουν. Έτσι για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$, οι ij συμπαράγουσες της $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι ίσες: $A_{ij} = B_{ij}$. Επομένως, το ανάπτυγμα της $\mathbf{B}$ κατά μήκος της i γραμμής είναι

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= (ka_{i1})B_{i1} + (ka_{i2})B_{i2} + \cdots + (ka_{in})B_{in}\\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}),\end{aligned}$$

και έτσι $\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$. Από την ιδιότητα 1 προκύπτει άπλα ότι μια σταθερά μπορεί να βγει κοινός παράγοντας από μια γραμμή ή στήλη της ορίζουσας. Έτσι βλέπουμε ότι

$$\begin{vmatrix} 7 & 15 & -17 \\ -2 & 9 & 6 \\ 5 & -12 & 10 \end{vmatrix} = (3) \begin{vmatrix} 7 & 5 & -17 \\ -2 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

βγάζοντας κοινό παράγοντα το 3 από την δεύτερη στήλη.

Ιδιότητα **2:** Αν η $n \times n$ μήτρα $\mathbf{B}$ προκύπτει από την $\mathbf{A}$ αντιμεταθέτοντας δύο γραμμές (ή δύο στήλες), τότε $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Για να το αποδείξουμε, υποθέστε (για παράδειγμα) ότι η πρώτη γραμμή *δεν* είναι μια από τις δύο που αντιμετατίθενται (θυμηθείτε ότι $n \geq 3$). Τότε για κάθε ένα από τα $j = 1, 2, \ldots, n$, η συμπαράγουσα B_{1j} προσδιορίζεται αντιμεταθέτοντας δύο γραμμές της συμπαράγουσας A_{1j}. Έτσι, $B_{1j} = -A_{1j}$ από την Ιδιότητα 2 των οριζουσών $(n-1) \times (n-1)$. Επειδή, $b_{1j} = a_{1j}$ για κάθε j, έπεται αναπτύσσοντας κατά μήκος της πρώτης γραμμής ότι

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B} &= b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + \cdots + b_{1n}B_{1n}\\ &= a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + \cdots + a_{1n}(-A_{1n})\\ &= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}),\end{aligned}$$

και έτσι $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Ιδιότητα **3:** Αν δύο γραμμές (ή δύο στήλες) μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ είναι ίδιες, τότε $\det \mathbf{A} = 0$.

Για να το αποδείξουμε, έστω $\mathbf{B}$ η μήτρα που προσδιορίζεται αντιμεταθέτοντας τις δύο ταυτοτικές γραμμές της $\mathbf{A}$. Τότε $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, έτσι $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$. Αλλά από την Ιδιότητα 2 έχουμε ότι $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$. Έτσι $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$, και έπεται άμεσα ότι $\det \mathbf{A} = 0$.

Ιδιότητα **4:** Υποθέστε ότι οι $n \times n$ μήτρες $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, και $\mathbf{B}$ είναι ίδιες εκτός από την i γραμμή–δηλαδή, οι άλλες $n-1$ γραμμές των τριών μητρών είναι ίδιες—και ότι η i γραμμή της $\mathbf{B}$ είναι το άθροισμα των i γραμμών των $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$. Τότε

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}_1 + \det \mathbf{A}_2.$$

Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει επίσης και για στήλες.

Η Ιδιότητα 4 αποδεικνύεται απευθείας αναπτύσσοντας την $\mathbf{B}$ κατά μήκος της i σειράς της. Στο Πρόβλημα 45 σας ζητείται να δώσετε λεπτομέρειες μιας τυπικής περίπτωσης τέτοιου είδους. Η σπουδαιότητα (στο σημείο αυτό) της Ιδιότητας 4 είναι ότι από αυτήν προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα σχετικά με τις ορίζουσες και τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

Ιδιότητα **5:** Αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{B}$ προκύπτει από την πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής (ή μιας στήλης) της $\mathbf{A}$ σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) της $\mathbf{A}$, τότε $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.

Επομένως η τιμή μιας ορίζουσας *δεν* διαφοροποιείται ούτε από τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών ούτε από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό στήλης. Στον ακόλουθο υπολογισμό με μήτρες 3×3 περιγράφεται η γενική απόδειξη της Ιδιότητας 5. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{bmatrix}.$$

Επομένως η $\mathbf{B}$ είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης k φορών της πρώτης στήλης της $\mathbf{A}$ στην τρίτη της στήλη. Τότε

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

Εδώ εφαρμόζουμε πρώτα την Ιδιότητα 4 και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα το k από τον δεύτερο όρο του αθροίσματος με τη βοήθεια της Ιδιότητας 1. Τώρα η πρώτη ορίζουσα από τα δεξιά στην (11) είναι απλά $\det \mathbf{A}$, ενώ η δεύτερη ορίζουσα είναι μηδέν (από την Ιδιότητα 3—η πρώτη και η τρίτη στήλη της είναι ίδιες). Δείξαμε, επομένως, ότι $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.

Παρόλο που χρησιμοποιούμε μόνο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών για να μετασχηματίσουμε μια μήτρα σε κλιμακωτή μορφή, από τις Ιδιότητες 1, 2, και 5 προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τόσο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών όσο και ανάλογους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών προκειμένου να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό των οριζουσών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν έχει μηδενικά στοιχεία ώστε να απλοποιείται ο υπολογισμός της ορίζουσας της *χωρίς να επέμβουμε*. Παρατηρούμε ωστόσο ότι μπορούμε να «εξαφανίσουμε» τα δύο πρώτα στοιχεία της τρίτης στήλης προσθέτοντας δύο φορές την πρώτη στήλη στην τρίτη στήλη. Από αυτό έχουμε

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (+7) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 35.$$

Το ηθικό δίδαγμα από το παράδειγμα είναι το εξής: Υπολογίστε τις ορίζουσες με μάτια ανοιχτά.

Μια **άνω τριγωνική μήτρα** είναι μια τετραγωνική μήτρα η οποία έχει μόνο μηδενικά *κάτω από* την κύρια διαγώνιο της. Μια **κάτω τριγωνική μήτρα** είναι μια τετραγωνική μήτρα η οποία έχει μόνο μηδενικά *πάνω από* την κύρια διαγώνιο της. Μια **τριγωνική μήτρα** είναι είτε άνω τριγωνική είτε κάτω τριγωνική, και άρα φαίνεται κάπως έτσι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η ιδιότητα που ακολουθεί μας λέει ότι οι ορίζουσες τριγωνικών μητρών είναι ιδιαιτέρως εύκολο να υπολογιστούν.

Ιδιότητα **6:** Η ορίζουσα μιας τριγωνικής μήτρας ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων της.

Το παραπάνω ισχύει διότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα οποιασδήποτε τριγωνικής μήτρας ως ακολούθως:

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (3)\begin{vmatrix} -2 & 8 & -6 \\ 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-2)\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (3)(-2)(5)(-4) = 120.$$

Σε κάθε βήμα, αναπτύσσουμε κατά μήκος της πρώτης στήλης και διαλέγουμε κάποιο άλλο διαγώνιο στοιχείο ως παράγοντα της ορίζουσας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Για να υπολογίσουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix},$$

προσθέτουμε πρώτα την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και στη συνέχεια αφαιρούμε δύο φορές την πρώτη γραμμή από την τρίτη. Από αυτό προκύπτει

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

επειδή έχουμε μια τριγωνική μήτρα με ένα μηδενικό στην κύρια διαγώνιο της. (Μπορείτε να βρείτε έναν ακόμα πιο γρήγορο τρόπο; Κρατείστε τα μάτια σας ανοιχτά!)

Ανάστροφη Μήτρα

Η ανάστροφη μήτρα $\mathbf{A}^T$ μιας 2×2 μήτρας $\mathbf{A}$ προκύπτει από την αναστροφή των στοιχείων εκατέρωθεν της διαγωνίου της:

$$\text{Αν} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Γενικότερα, η **ανάστροφη** της $m \times n$ μήτρας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ είναι η $n \times m$ μήτρα $\mathbf{A}^T$ η οποία ορίζεται από

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Παρατηρήστε την αντιστροφή των δεικτών. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο της $\mathbf{A}^T$ στην σειρά j και τη στήλη i είναι το στοιχείο της $\mathbf{A}$ στην σειρά i και στη στήλη j της $\mathbf{A}$. Έτσι οι σειρές της ανάστροφης μήτρας $\mathbf{A}^T$ είναι στην πραγματικότητα οι στήλες της $\mathbf{A}$, και οι στήλες της $\mathbf{A}^T$ είναι οι σειρές της $\mathbf{A}$. Επομένως, η ανάστροφη μήτρα $\mathbf{A}^T$ προκύπτει μετατρέποντας τις σειρές της $\mathbf{A}$ σε στήλες. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Αν η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι τετράγωνη, τότε η ανάστροφη $\mathbf{A}^T$ προκύπτει αντιστρέφοντας τα στοιχεία της $\mathbf{A}$ που βρίσκονται συμμετρικά της κύριας διαγωνίου. Επομένως η $\mathbf{A}^T$ είναι η αντανάκλαση της $\mathbf{A}$ διαμέσου της κύριας διαγωνίου της.

Στα Προβλήματα 47 και 48 ζητάμε να επιβεβαιώσετε τις ακόλουθες ιδιότητες για τη διαδικασία της αναστροφής (υπό από την υπόθεση ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μήτρες κατάλληλου μεγέθους και c είναι αριθμός):

(i)$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,

(ii)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,

(iii)$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$,

(iv)$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Ιδιότητα **7:** Αν $\mathbf{A}$ είναι μια τετραγωνική μήτρα, τότε $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$.

Αυτή η ιδιότητα των οριζουσών μπορεί να επαληθευτεί γράφοντας το ανάπτυγμα της συμπαράγουσας της $\det \mathbf{A}$ κατά μήκος της πρώτης της *σειράς* και το ανάπτυγμα της συμπαράγουσας της $\det(\mathbf{A}^T)$ κατά μήκος της πρώτης της *στήλης*. Όταν αυτό ολοκληρωθεί, βλέπουμε ότι τα δύο αναπτύγματα είναι όμοια, επειδή οι σειρές της $\mathbf{A}$ είναι οι στήλες της $\mathbf{A}^T$ (όπως στο Πρόβλημα 49).

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα

Ξεκινήσαμε αυτή την ενότητα με την παρατήρηση ότι μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η ορίζουσά της είναι μη μηδενική: $|\mathbf{A}| \neq 0$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα για μήτρες $n \times n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα
Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Αυτό το θεώρημα (μαζί με τα άλλα αυτής της Ενότητας) θα αποδειχθούν στην επόμενη Ενότητα. Έτσι τώρα μπορούμε να προσθέσουμε στη λίστα των ισοδύναμων ιδιοτήτων ιδιάζουσας μήτρας που διατυπώσαμε στο Θεώρημα 7 της Ενότητας 8.5 την ιδιότητα ότι $\det \mathbf{A} \neq 0$. Πράγματι, κάποια βιβλία *ορίζουν* ότι μια τετραγωνική μήτρα $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζουσα αν και μόνο αν $\det \mathbf{A} \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Σύμφωνα με το Πρόβλημα 61, η ορίζουσα της μήτρας

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

είναι

$$|\mathbf{V}| = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Σημειώστε ότι $|\mathbf{V}| \neq 0$ αν και μόνο αν οι τρεις αριθμοί a, b, και c είναι *διαφορετικοί μεταξύ τους*. Προκύπτει λοιπόν από το Θεώρημα 2 ότι η $\mathbf{V}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν οι a, b, και c είναι διαφορετικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, για $a = -2$, $b = 3$, και $c = -4$ βλέπουμε ότι η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμη.

Η σύνδεση μεταξύ των μη μηδενικών οριζουσών και της αναστροφής της μήτρας σχετίζεται άμεσα με το γεγονός ότι η συνάρτηση της ορίζουσας «σέβεται» τον πολλαπλασιασμό μητρών με τον τρόπο που φαίνεται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Ορίζουσες και Γινόμενο Μητρών
Αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι $n \times n$ μήτρες, τότε

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|. \qquad \textbf{(14)}$$

Το γεγονός ότι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ μας φαίνεται τόσο φυσιολογικό που ίσως μας διαφύγει ότι είναι και εξίσου αξιοσημείωτο. Αντιπαραβάλλεται την απλότητα της εξίσωσης $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ με την πολυπλοκότητα των φαινομενικά άσχετων μεταξύ τους οριζουσών και γινομένων μητρών. Ως περαιτέρω αντίθεση, μπορούμε να αναφέρουμε ότι το $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$

γενικά *δεν* ισούται με $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$. (Διαλέξτε ένα ζευγάρι μητρών 2×2 και υπολογίστε τις ορίζουσες τους και το άθροισμά τους.)

Ως μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 3, μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα της *αντίστροφης* μιας αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

έτσι

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1,$$

και επομένως

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}. \tag{15}$$

Τώρα $|\mathbf{A}| \neq 0$ επειδή η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη. Έτσι η $\det(\mathbf{A}^{-1})$ *είναι η αντίστροφη της* $\det \mathbf{A}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Η ορίζουσα της

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι $|\mathbf{A}| = 320 \neq 0$. Έτσι η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, και *χωρίς* να βρούμε την $\mathbf{A}^{-1}$ γνωρίζουμε από την Εξίσωση (15) ότι $|\mathbf{A}^{-1}| = 1/320$.

Ο κανόνας του Cramer για $n \times n$ Συστήματα

Υποθέστε ότι χρειάζεται να λύσετε ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{16}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Υποθέτουμε ότι η μήτρα των συντελεστών $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, έτσι ώστε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι υπάρχει μοναδική λύση $\mathbf{x}$ της (16). Η ερώτηση είναι πώς μπορούμε να γράψουμε την $\mathbf{x}$ με όρους των συντελεστών a_{ij} και των σταθερών b_i. Στην συζήτηση που ακολουθεί, θεωρούμε το $\mathbf{x}$ ένα σταθερό (αν και άγνωστο ακόμα) διάνυσμα.

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ τα διανύσματα στήλες μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$, τότε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Ο επιθυμητός τύπος για το i άγωστο x_i περιλαμβάνει την ορίζουσα της μήτρας $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ η οποία θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε την i στήλη $\mathbf{a}_i$ της $\mathbf{A}$ με το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Κανόνας του Cramer

Ας θεωρήσουμε το $n \times n$ γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τότε το i στοιχείο της μοναδικής λύσης $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ δίνεται από τον τύπο

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

όπου στην τελευταία ισότητα το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$ έχει αντικαταστήσει το i διάνυσμα στήλη $\mathbf{a}_i$ της $\mathbf{A}$.

Για παράδειγμα, η μοναδική λύση (x_1, x_2, x_3) του 3×3 συστήματος

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{18}$$

με $|\mathbf{A}| = |a_{ij}| \neq 0$ δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x_2 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x_3 &= \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του Cramer για να λύσετε το γραμμικό σύστημα,

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Λύση Βρίσκουμε ότι

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 29;$$

οπότε από τους τύπους στην (19) προκύπτει ότι

$$x_1 = \frac{1}{29}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{33}{29},$$

$$x_2 = \frac{1}{29}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{35}{29},$$

και

$$x_3 = \frac{1}{29}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{23}{29}.$$

Αντίστροφη και Προσαρτημένη Μήτρα

Η αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$ μιας αντιστρέψιμης $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση μητρών

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}. \tag{20}$$

Αν γράψουμε την μήτρα των συντελεστών $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, την μήτρα των αγνώστων $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$, και την ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$ με όρους των στηλών τους , τότε σύμφωνα με την (20)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \tag{21}$$

για $j = 1, 2, \ldots, n$. Καθεμία από αυτές τις n εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την εξίσωση (17) το i στοιχείο της μήτρας στήλης $\mathbf{x}_j$ δίνεται από

$$x_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{e}_j & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \tag{22}$$

για $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Όταν τα αποτελέσματα αυτά τοποθετηθούν μαζί, δίνουν έναν ξεκάθαρο τύπο για την αντίστροφη μήτρα (για την απόδειξη δες την επόμενη Ενότητα).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Η Αντίστροφη Μήτρα

Η αντίστροφη μιας αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{A}$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}^T}{|\mathbf{A}|}, \tag{23}$$

όπου, ως συνήθως με A_{ij} συμβολίζουμε την ij συμπαράγουσα της $\mathbf{A}$, δηλαδή A_{ij} είναι το γινόμενο του $(-1)^{i+j}$ με την ij ελάσσονα ορίζουσα της $\mathbf{A}$.

Στην (23) βλέπουμε την *ανάστροφη* της **συμπαράγουσας μήτρας** $\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}$ της $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$. Αυτή η συμπαράγουσα μήτρα την οποία αντιμεταθέσαμε ονομάζεται **προσαρτημένη μήτρα** της $\mathbf{A}$ και συμβολίζεται ως εξής

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{ji} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 Εφαρμόστε τον τύπο στην (23) για να βρείτε την αντίστροφη της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

του παραδείγματος 10, όπου είδαμε ότι $|\mathbf{A}| = 29$.

Λύση Πρώτα υπολογίζουμε τις συμπαράγουσες της $\mathbf{A}$, τοποθετώντας τους υπολογισμούς μας σε μια συστοιχία 3×3:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -17, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -11, & A_{13} &= +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 18, \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 19, & A_{22} &= +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 14, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -15, \\
A_{31} &= +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15, & A_{33} &= +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.
\end{aligned}$$

(Σημειώστε τον γνωστό κανόνα του πρόσημου) Έτσι η συμπαράγουσα μήτρα της **A** είναι

$$\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ 10 & 15 & -14 \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια, εναλλάσσουμε γραμμές και στήλες για να υπολογίσουμε την προσαρτημένη μήτρα

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, σύμφωνα με της Εξίσωση (23), διαιρούμε με $|\mathbf{A}| = 29$ για να βρούμε την αντίστροφη μήτρα

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -17 & 19 & 10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστική Αποδοτικότητα

Το σύνολο της εργασίας που απαιτείται για την ολοκλήρωση ενός αριθμητικού υπολογισμού μετριέται με τον αριθμό των αριθμητικών πράξεων που αυτός συνεπάγεται. Ας μετρήσουμε λοιπόν τον αριθμό των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για να υπολογίσουμε μια $n \times n$ ορίζουσα χρησιμοποιώντας επεκτάσεις συμπαραγουσών. Αν , για παράδειγμα, $n = 5$, τότε η επέκταση της συμπαράγουσας κατά μήκος μιας γραμμής ή μιας στήλης απαιτεί να υπολογίσουμε *πέντε* ορίζουσες 4×4 και στη συνέχεια η επέκταση καθεμίας από αυτές περιλαμβάνει *τέσσερις* ορίζουσες 3×3. Η καθεμία από τις ορίζουσες 3×3 θα μας οδηγήσει σε *τρεις* ορίζουσες 2×2 και τελικά αυτές με τη σειρά τους απαιτούν *δύο* πολλαπλασιασμούς. Άρα, ο συνολικός αριθμός των πολλαπλασιασμών που χρειάζονται για τον υπολογισμό της αρχικής ορίζουσας 5×5 είναι

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120.$$

Γενικότερα, *ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας $n \times n$ χρησιμοποιώντας επέκταση συμπαραγουσών είναι*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (n \text{ παραγοντικό}).$$

Αν λοιπόν αγνοήσουμε τις, οπωσδήποτε λιγότερες,προσθέσεις που περιλαμβάνονται, τότε *ο αριθμός των πράξεων* για μία ορίζουσα $n \times n$ είναι $n!$. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός μιας ορίζουσας 25×25 με επέκταση συμπαραγουσών θα απαιτούσε περίπου $25! \approx 1.55 \times 10^{25}$ πράξεις. Αν χρησιμοποιούσαμε έναν υπερυπολογιστή ικανό να κάνει ένα δισεκατομμύριο πράξεις το δευτερόλεπτο, θα χρειαζόμασταν περίπου $(1.55 \times 10^{16})/(365.25 \times 24 \times 3600) \approx 492$ εκατομμύρια χρόνια! Το ίδιο μηχάνημα θα χρειαζόταν περίπου 9.64×10^{47} χρόνια—ασύγκριτα περισσότερο από την ηλικία του σύμπαντος (η οποία υπολογίζεται περίπου στα 20 εκατομμύρια έτη)—για να υπολογίσει μία ορίζουσα 50×50 με επέκταση συμπαραγουσών. Οι σύγχρονες επιστημονικές και μηχανολογικές εφαρμογές περιλαμβάνουν συνήθως μήτρες μεγέθους 1000×1000 (ή και μεγαλύτερες) που η επέκταση συμπαραγουσών τους θα απαιτούσε αδιανόητα πολύ χρόνο με οποιοδήποτε υπολογιστή μπορεί κάποιος να φανταστεί.

Ωστόσο, ένας οποιοσδήποτε υπολογιστής της εποχής μας , ο οποίος χρησιμοποιεί MATLAB και κάνει «μόνο» περίπου 100 εκατομμύρια πράξεις το δευτερόλεπτο, μπορεί να υπολογίσει την ορίζουσα μιας τυχαίας μήτρας 100×100 ή την αντίστροφή της σχεδόν αμέσως. Κάτι τέτοιο δεν είναι προφανώς δυνατό να συμβεί με επεκτάσεις οριζουσών. Αν όχι έτσι, τότε πώς;

Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις ορίζουσες πολύ πιο αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας την απαλοιφή του Gauss —δηλαδή, μειώνοντάς τις σε τριγωνική μορφή, έτσι ώστε να χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων που απομένουν. Ομοίως, η αντίστροφη της αντιστρέψιμης μήτρας **A** μπορεί και αυτή να υπολογιστεί πολύ πιο αποτελεσματικά μειώνοντας την επαυξημένη μήτρα $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ σε μειωμένη κλιμακωτή μορφή (όπως κάναμε στην Ενότητα 8.5) απ' ότι αν χρησιμοποιούσαμε τον κανόνα του Cramer (όπως στο Θεώρημα 5 στην Ενότητα αυτή). Αν μετρήσουμε την ποσότητα των αριθμητικών πράξεων που απαιτούνται για να μειωθεί μια $n \times n$ μήτρα σε κλιμακωτή μορφή θα δούμε ότι είναι της τάξης του n^3 αντί για $n!$ και όπως φαίνεται στον Πίνακα του Σχήματος 8.6.1, το n^3 είναι σημαντικά μικρότερο από το $n!$ αν το n είναι μεγάλο. Συνεπώς, η επέκταση συμπαραγουσών μίας ορίζουσας και ο κανόνας του Cramer έχουν κατά κύριο λόγο θεωρητική διάσταση στην επίλυση συστημάτων, και χρησιμοποιούνται σπάνια σε αριθμητικά προβλήματα όπου το n είναι μεγαλύτερο από 3 ή 4.

8.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα με συμπαράγουσες για να προσδιορίσετε τις ορίζουσες των Προβλημάτων 1 έως 6. Αναπτύξτε κατά μήκος εκείνης γραμμής ή στήλης η οποία ελαχιστοποιεί το μέγεθος των απαραίτητων υπολογισμών.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 11 & 8 & 7 \\ 3 & -2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 11 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 13 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & -9 & 17 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Στα Προβλήματα 7 έως 12, υπολογίστε κάθε ορίζουσα αφού πρώτα απλοποιήσετε τον υπολογισμό της εφαρμόζοντας της κατάλληλες πράξεις γραμμών ή στηλών (όπως στο Παράδειγμα 6).

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 17 \\ 6 & -4 & 12 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & 12 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ -4 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο της απαλοιφής για να υπολογίσετε τις ορίζουσες στα Προβλήματα 13 έως 20.

13. $\begin{vmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του Cramer για να λύσετε τα Προβλήματα 21 έως 32.

21. $\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 5x + 7y &= 1 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 5x + 8y &= 3 \\ 8x + 13y &= 5 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 17x + 7y &= 6 \\ 12x + 5y &= 4 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 11x + 15y &= 10 \\ 8x + 11y &= 7 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 5x + 6y &= 12 \\ 3x + 4y &= 6 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 6x + 7y &= 3 \\ 8x + 9y &= 4 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 5x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_1 \qquad - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$

n	5	10	25	50	100
$\frac{2}{3}n^3$	83	667	10,417	83,333	666,667
$n!$	120	3,628,800	1.55×10^{25}	3.04×10^{64}	9.33×10^{157}

ΣΧΗΜΑ 8.6.1 Σύνολο πράξεων κατά προσέγγιση για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας $n \times n$ με την απαλοιφή του Gauss ($\frac{2}{3}n^3$) και με επέκταση οριζουσών ($n!$).

31.
$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad - 5x_3 &= -3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5 βρείτε την αντίστροφη $\mathbf{A}^{-1}$ *κάθε μήτρας* $\mathbf{A}$ *στα Προβλήματα 33 έως 40.*

33. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -5I & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

41. Δείξτε ότι $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αυθαίρετες 2×2 μήτρες.

42. Ας θεωρήσουμε τις 2×2 μήτρες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

όπου με $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ συμβολίζουμε τα διανύσματα γραμμών της $\mathbf{B}$. Τότε το γινόμενο $\mathbf{AB}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \\ c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την έκφραση και τις ιδιότητες των οριζουσών για να δείξετε ότι

$$\det \mathbf{AB} = (ad - bc)\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}).$$

Επομένως η ορίζουσα του γινομένου των 2×2 μητρών είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών τους.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 43 έως 46 εμφανίζεται μια ειδική περίπτωση των Ιδιοτήτων 1 έως 5. Επαληθεύστε τις αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέρος κατά μήκος μιας κατάλληλης γραμμής ή στήλης.

43. $$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

44. $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

45. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

46. $$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

47. Υποθέστε ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μήτρες ίδιου μεγέθους. Δείξτε ότι: (α) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}\cdot$ (β) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T\cdot$ και (γ) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

48. Έστω ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$είναι μήτρες τέτοιες ώστε να μπορεί να οριστεί $\mathbf{AB}$. Δείξτε ότι $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Ξεκινήστε με το γεγονός ότι το ij στοιχείο της $\mathbf{AB}$ προσδιορίζεται από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της i γραμμής της $\mathbf{A}$ με τα στοιχεία της j στήλης της $\mathbf{B}$. Ποιο είναι το ij στοιχείο της $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;

49. Έστω ότι $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ είναι μια 3×3 μήτρα. Δείξτε ότι $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$ αναπτύσσοντας την $\det \mathbf{A}$ κατά μήκος της πρώτης γραμμής και την $\det(\mathbf{A}^T)$ κατά μήκος της πρώτης στήλης.

50. Υποθέστε ότι $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Αποδείξτε ότι $|\mathbf{A}| = 0$ ή $|\mathbf{A}| = 1$.

51. Υποθέστε ότι $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ (η μηδενική μήτρα) για κάποιον θετικό ακέραιο n. Αποδείξτε ότι $|\mathbf{A}| = 0$.

52. Μια τετραγωνική μήτρα $\mathbf{A}$ ονομάζεται **ορθογώνια** εφόσον $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Δείξτε ότι η ορίζουσα μιας τέτοιας μήτρας πρέπει να είναι είτε $+1$ είτε -1.

53. Οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ονομάζονται **όμοιες** εφόσον $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ για κάποια αντιστρέψιμη μήτρα $\mathbf{P}$. Δείξτε ότι αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες, τότε $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$.

54. Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2 και 3 αποδείξτε ότι αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμες μήτρες $n \times n$, τότε η $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν και οι δύο μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμες.

55. Έστω ότι οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μήτρες $n \times n$. Υποθέστε ότι γνωρίζουμε ότι *είτε* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ *είτε* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 54 για να βρείτε ότι $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

56. Έστω ότι η $\mathbf{A}$ είναι μία μήτρα $n\times n$ με $\det \mathbf{A} = 1$ και όλα της τα στοιχεία ακέραιους.

(α΄) Δείξτε ότι η $\mathbf{A}^{-1}$ περιλαμβάνει μόνο ακέραιους.

(β΄) Υποθέστε ότι το $\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα n μόνο με ακεραίους. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ περιλαμβάνει μόνο ακέραιους.

57. Έστω ότι η $\mathbf{A}$ είναι μία 3×3 άνω τριγωνική μήτρα με μημηδενική ορίζουσα. Δείξτε με αναλυτικούς υπολογισμούς ότι η $\mathbf{A}^{-1}$ είναι επίσης άνω τριγωνική.

58. Στο Σχήμα 8.6.2 βλέπουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο με γωνίες A, B, και C και απέναντι πλευρές a, b, και c. Αν από κάθε κορυφή τραβήξουμε την κάθετη στην απέναντι πλευρά, προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} c\cos B + b\cos C &= a \\ c\cos A + a\cos C &= b \\ a\cos B + b\cos A &= c. \end{aligned}$$

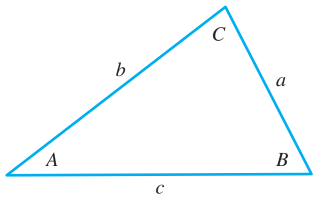
Θεωρείστε ότι πρόκειται για γραμμικές εξισώσεις ως προς τους αγνώστους $\cos A$, $\cos B$, και $\cos C$, και χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Cramer για να βρείτε το **νόμο των συνημιτόνων** λύνοντας ως προς

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Επομένως

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Σημειώστε ότι στην περίπτωση κατά την οποία $A = \pi/2$ $(90°)$ έχουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



ΣΧΗΜΑ 8.6.2 Το τρίγωνο του Προβλήματος 58.

59. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

60. Ας θεωρήσουμε την $n \times n$ ορίζουσα

$$B_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

στην οποία κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου είναι 2, κάθε στοιχείο των αμέσως διπλανών της διαγωνίων είναι 1, και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι 0.

(α΄) Αναπτύξτε κατά μήκος της πρώτης γραμμής για να δείξετε ότι

$$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-2}.$$

(β΄) Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι $B_n = n + 1$ για $n \geq 2$.

Στα Προβλήματα 61-64 ασχολούμαστε με την ***Ορίζουσα Vandermonde***

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

η οποία θα παίξει σημαντικό ρόλο στην Ενότητα 3.7.

61. Δείξτε με απευθείας υπολογισμούς ότι $V(a, b) = b - a$ και ότι

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

62. Οι τύποι του Προβλήματος 61 είναι οι περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$ του γενικού τύπου

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j). \qquad \textbf{(25)}$$

Η περίπτωση $n = 4$ είναι

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \times (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Αποδείξτε το εξής: γνωρίζοντας τα x_1, x_2, και x_3, ορίστε το κυβικό πολυώνυμο $P(y)$ ως

$$P(y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(26)}$$

Επειδή $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$ (γιατί;), οι ρίζες του $P(y)$ είναι x_1, x_2, και x_3. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$P(y) = k(y - x_1)(y - x_2)(y - x_3),$$

όπου k είναι ο συντελεστής του y^3 στο $P(y)$. Τέλος, παρατηρήστε ότι η ανάπτυξη της ορίζουσας 4×4 στην (26) κατά μήκος της τελευταίας της γραμμής δίνει $k = V(x_1, x_2, x_3)$ και ότι $V(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_4)$.

63. Γενικεύστε το Πρόβλημα 62 προκειμένου να αποδείξετε τον τύπο (25) κατέπαγωγή στο n. Ξεκινήστε με το πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού

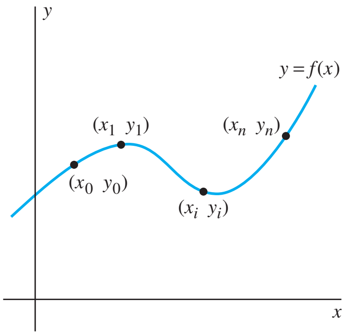
$$P(y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-1} \end{vmatrix}.$$

64. Χρησιμοποιήστε τον τύπο (25) για να υπολογίσετε τις δύο ακόλουθες ορίζουσες.

(α΄) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$

(β΄) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

8.7 Γραμμικές Εξισώσεις και Προσαρμογή Καμπύλης



ΣΧΗΜΑ 8.7.1 Η καμπύλη $y = f(x)$ παρεμβάλει (δηλαδή διέρχεται) από τα δεδομένα σημεία.

Η γραμμική άλγεβρα έχει σημαντικές εφαρμογές στο συνηθισμένο επιστημονικό πρόβλημα της αναπαράστασης εμπειρικών δεδομένων μέσω εξισώσεων ή συναρτήσεων συγκεκριμένου τύπου. Θα δώσουμε μία μόνο σύντομη εισαγωγή σε αυτό το εκτεταμένο θέμα.

Τυπικά, ξεκινάμε με ένα σύνολο *σημείων* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ τα οποία πρόκειται να αναπαραστήσουμε με έναν συγκεκριμένο τύπο συνάρτησης $y = f(x)$. Για παράδειγμα, η y μπορεί να είναι ο όγκος ενός δείγματος αερίου όταν η θερμοκρασία του είναι x. Επομένως, τα σημεία που μας ενδιαφέρουν είναι τα αποτελέσματα πειραμάτων ή μετρήσεων, και και θέλουμε να προσδιορίσουμε την καμπύλη $y = f(x)$ στο σύστημα αξόνων xy έτσι ώστε να περνάει από κάθε ένα από αυτά τα σημεία; βλέπε το Σχήμα 8.7.1. Το θέμα μας, επομένως, είναι πώς θα «εφαρμόσουμε» την καμπύλη στα σημεία που έχουμε.

Θα περιοριστούμε κατά κύριο λόγο στις καμπύλες πολυωνύμων. Ένα **πολυώνυμο βαθμού** n είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{1}$$

όπου οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι σταθεροί. Το σημείο (x_i, y_i) βρίσκεται πάνω στην καμπύλη $y = f(x)$ εφόσον $f(x_i) = y_i$. Από τη στιγμή που αυτό ισχύει για κάθε $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ προκύπτουν οι $n + 1$ εξισώσεις

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 (x_0)^2 + \cdots + a_n (x_0)^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 (x_1)^2 + \cdots + a_n (x_1)^n &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 (x_2)^2 + \cdots + a_n (x_2)^n &= y_2 \\
&\ \ \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 (x_n)^2 + \cdots + a_n (x_n)^n &= y_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Αφού δίνονται οι αριθμοί x_i και y_i , πρόκειται για ένα σύστημα $n + 1$ *γραμμικών* εξισώσεων στους $n + 1$ αγνώστους $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (οι συντελεστές του πολυωνύμου της Εξίσωσης (1)).

Η $(n + 1) \times (n + 1)$ μήτρα των συντελεστών του συστήματος στην (1) είναι η μήτρα Vandermonde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^n \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

η ορίζουσα της οποίας συζητήθηκε στα Προβλήματα 61–63 της Ενότητας 8.6. Από την Εξίσωση (25) της Ενότητας αυτής προκύπτει ότι, αν οι συντεταγμένες του x $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ξεχωριστές, τότε η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζουσα. Έτσι λοιπόν από το Θεώρημα 7 της Ενότητας 8.5 προκύπτει ότι το σύστημα στην (2) έχαι μία μοναδική λύση για τους συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ στην (1). Υπάρχει λοιπόν ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n το οποίο ταιριάζει στα δοθέντα $n + 1$ σημεία και καλείται **πολυωνυμική παρεμβολή**, γιατί λέμε ότι **παρεμβάλλει** τα δοθέντα σημεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βρείτε ένα κυβικό πολυώνυμο της μορφής

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

το οποίο παρεμβάλλει τα σημεία $(-1, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, και $(3, 16)$.

Λύση Είναι απλούστερο γενικά στα προβλήματα να χρησιμοποιούνται διακριτά κεφαλαία γράμματα αντί δείκτες για να υποδηλώσουμε τους συντελεστές. Εδώ θέλουμε να βρείτε τις τιμές των A, B, C, και D έτσι ώστε $y(-1) = 4$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$, και

$y(3) = 16$. Οι όροι αυτοί δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} A - B + C - D &= 4 \\ A + B + C + D &= 2 \\ A + 2B + 4C + 8D &= 1 \\ A + 3B + 9C + 27D &= 16. \end{aligned}$$

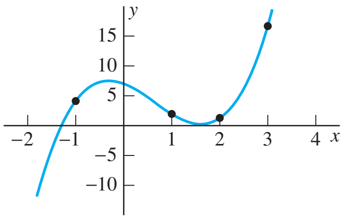
Μπορούμε εύκολα να ανάγουμε το σύστημα αυτό στην κλιμακωτή μορφή του

$$\begin{aligned} A - B + C - D &= 4 \\ B + D &= -1 \\ C + 2D &= 0 \\ D &= 2, \end{aligned}$$

και στην συνέχεια με αναδρομική αντικατάσταση έχουμε ότι $A = 7$, $B = -3$, $C = -4$, και $D = 2$. Έτσι το κυβικό πολυώνυμο είναι

$$y = 7 - 3x - 4x^2 + 2x^3.$$

Η γραφική παράσταση αυτού του κυβικού πολυωνύμου φαίνεται στο Σχήμα 3.7.2, μαζί με τα τέσσερα αρχικά σημεία.



ΣΧΗΜΑ 8.7.2 Κυβική καμπύλη η οποία διέρχεται από τα τέσσερα σημεία δεδομένων του Παραδείγματος 1.

Μοντελοποίηση της Αύξησης του Παγκόσμιου Πληθυσμού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα παρεμβολής αποτελεί η αύξηση του παγκόσμιου ανθρώπινου πληθυσμού. Ο πίνακας στο Σχήμα 8.7.3 δείχνει το συνολικό παγκόσμιο πληθυσμό (σε δισεκατομμύρια) ανά πενταετία. Πραγματικοί αριθμοί πληθυσμών εμφανίζονται για τα έτη 1960-1995. Τα στοιχεία που παρατίθενται για τα έτη 2000 - 2025 είναι οι πληθυσμοί που προβλέπονται από τα Ηνωμένα Έθνη, με βάση λεπτομερείς δημογραφικές αναλύσεις των πληθυσμιακών τάσεων ανά χώρα σε όλο τον κόσμο. Κάθε καταχώρηση στην τελευταία στήλη του πίνακα δίνει το μέσο ετήσιο ποσοστό αύξησης κατά την προηγούμενη πενταετία. Για παράδειγμα, $3.039(1.0194)^5 \approx 3.345$ ήταν η αύξηση κατά την πενταετία 1960-1965, οπότε η μέση ετήσια αύξηση κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είναι περίπου 1.94%.

Έτη	Παγκόσμιος Πληθυσμός (δισεκατομμύρια)	Ποσοστό Αύξηση
1960	3.039	
1965	3.345	1.94%
1970	3.707	2.08%
1975	4.086	1.97%
1980	4.454	1.74%
1985	4.851	1.72%
1990	5.279	1.71%
1995	5.688	1.50%
2000	6.083	1.35%
2005	6.468	1.23%
2010	6.849	1.15%
2015	7.227	1.08%
2020	7.585	0.97%
2025	7.923	0.88%

ΣΧΗΜΑ 8.7.3 Τα δεδομένα για τον Παγκόσμιο πληθυσμό.

Βλέπουμε ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός αυξήθηκε με ετήσιο ρυθμό περίπου 2 % κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960, αλλά ο ρυθμός ανάπτυξης επιβραδύνθηκε από τότε, και αναμένεται να επιβραδυνθεί ακόμη περισσότερο κατά τις πρώτες δεκαετίες του 21ου αιώνα. Ειδικότερα, η ανάπτυξη του παγκόσμιου πληθυσμού αυτή τη στιγμή στην ιστορία *δεν* είναι φυσική ούτε έχει εκθετικό χαρακτήρα — ένας τέτοιος χαρακτηρισμός άλλωστε συνεπάγεται σταθερό ποσοστό αύξησης. Θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα παρεμβολής στα παγκόσμια πληθυσμιακά δεδομένα πολυωνυμικών μοντέλων τα οποία ίσως μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουν τους μελλοντικούς πληθυσμούς. Φαίνεται φυσικό να αναμένει κανείς καλύτερα αποτελέσματα με πολυώνυμα παρεμβολής υψηλότερου βαθμού. Ας δούμε αν αυτό ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αρχικά χρησιμοποιούμε ένα γραμμικό πολυώνυμο $P_1(t) = a + bt$ (με $t = 0$ ιν 1900) στις τιμές του παγκόσμιου πληθυσμού για το 1980 και 1990. Το μόνο που χρειάζεται είναι να λύσουμε τις εξισώσεις

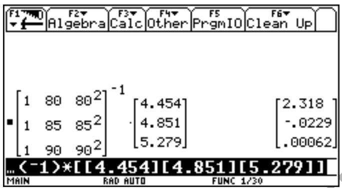
$$a + 80b = 4.454$$
$$a + 90b = 5.279$$

για $a = -2.146$, $b = 0.0825$. Έτσι λοιπόν το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_1(t) = -2.146 + 0.0825t. \tag{4}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα ένα τετραγωνικό πολυώνυμο $P_2(t) = a + bt + ct^2$ (με $t = 0$ στο 1900) στις τιμές του παγκόσμιου πληθυσμού για το 1980, 1985, και το 1990 . Με τα τρία σημεία $(80, 4.454)$, $(85, 4.851)$, και $(90, 5.279)$, το σύστημα στην (3) δίνει τις εξισώσεις

$$a + 80b + 80^2c = 4.454$$
$$a + 85b + 85^2c = 4.851$$
$$a + 90b + 90^2c = 5.279$$



ΣΧΗΜΑ 8.7.4 Η λύση με αριθμομηχανή TI-89 για το 3×3 σύστημα του Παραδείγματος 3.

οι οποίες λύνονται με τη βοήθεια αριθμομηχανής δίνοντας $a = 2.318$, $b = -0.0229$, $c = 0.00062$ (Σχήμα 3.7.4). Έτσι το τετραγωνικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_2(t) = 2.318 - 0.0229t + 0.00062t^2. \tag{5}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ένα κυβικό πολυώνυμο $P_3(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ (με $t = 0$ στο 1900) στις τιμές του παγκόσμιου πληθυσμού για το 1980, 1985, 1990, και 1995. Με τα τέσσερα σημεία $(80, 4.454)$, $(85, 4.851)$, $(90, 5.279)$, και $(95, 5.688)$, το σύστημα στην (3) δίνει τις τέσσερις εξισώσεις

$$4.454 = a + 80b + 80^2c + 80^3d$$
$$4.851 = a + 85b + 85^2c + 85^3d$$
$$5.279 = a + 90b + 90^2c + 90^3d$$
$$5.688 = a + 95b + 95^2c + 95^3d.$$

Όπως στην Εφαρμογή 8.5, μια αριθμομηχανή ή ένας υπολογιστής δίνει

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 & 80^2 & 80^3 \\ 1 & 85 & 85^2 & 85^3 \\ 1 & 90 & 90^2 & 90^3 \\ 1 & 95 & 95^2 & 95^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4.454 \\ 4.851 \\ 5.279 \\ 5.688 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43.118 \\ -1.46623 \\ 0.01762 \\ -0.000066667 \end{bmatrix}.$$

Έτσι το κυβικό πολυώνυμο παρεμβολής είναι

$$P_3(t) = 43.118 - 1.46623t + 0.01762t^2 - 0.000066667t^3. \tag{6}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο πληθυσμού τέταρτου βαθμού της μορφής

$$P_4(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$$

στα δεδομένα του παγκόσμιου πληθυσμού για τα έτη 1975-1980-1985-1990-1995, πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 75 & 75^2 & 75^3 & 75^4 \\ 1 & 80 & 80^2 & 80^3 & 80^4 \\ 1 & 85 & 85^2 & 85^3 & 85^4 \\ 1 & 90 & 90^2 & 90^3 & 90^4 \\ 1 & 95 & 95^2 & 95^3 & 95^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.086 \\ 4.454 \\ 4.851 \\ 5.279 \\ 5.688 \end{bmatrix}$$

για να βρούμε τις τιμές των συντελεστών a, b, c, d, και e. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} P_4(t) = &-158.434 + 7.78543t - 0.141413t^2 \\ &+ 0.00114667t^3 - 0.00000346667t^4. \end{aligned} \tag{7}$$

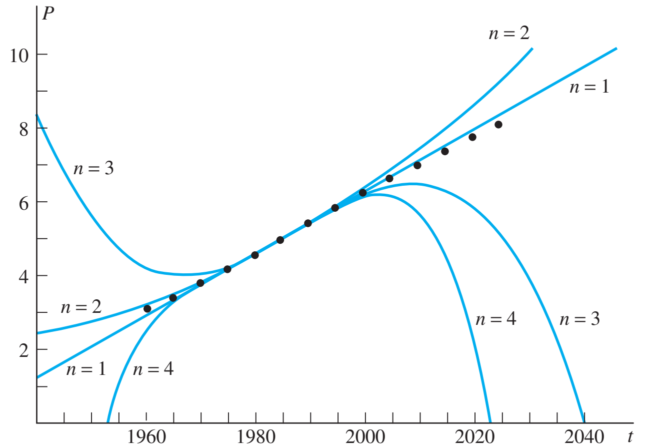
Ο πίνακας στο Σχήμα. 8.7.5 συγκρίνει την γραμμική, τετραγωνική, κυβική, και τέταρτου βαθμού πρόβλεψη με την «σωστή» πρόβλεψη των Ηνωμένων Εθνών για το έτος 2000. Κάθε «λάθος» στην τρίτη στήλη του πίνακα αυτού είναι το ποσό κατά το οποίο η αντίστοιχη πρόβλεψη υπολείπεται (θετικό σφάλμα) ή υπερβαίνει (αρνητικό σφάλμα) την πρόβλεψη των Ηνωμένων Εθνών. Βλέπουμε ότι η κυβική πρόβλεψη είναι καλύτερη από αυτή του τέταρτου βαθμού αλλά χειρότερη από τη γραμμική. Η τετραγωνική πρόβλεψη είναι ακόμη χειρότερη. Προφανώς λοιπόν, δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ του βαθμού του πολυωνυμικού μοντέλου και της ακρίβειας των προβλέψεών του.

Το Σχήμα 8.7.6 δείχνει τα δεδομένα των Ηνωμένων Εθνών για τον παγκόσμιο πληθυσμό για τα έτη 1960 έως 2025, μαζί με την αποτύπωση της γραμμικής, τετραγωνικής, κυβικής και τετάρτου βαθμού συνάρτησης πληθυσμού των Παραδειγμάτων 2 έως 5. Φαίνεται ότι όσο περισσότερη δουλειά κάνουμε για να βρούμε ένα πολυώνυμο το οποίο να διέρχεται από επιλεγμένα σημεία, τόσο λιγότερο ανταμείβεται η προσπάθειά μας. Αυτό που σίγουρα αποδεικνύεται με αυτό το σχήμα είναι ότι — εκτός του διαστήματος 1975-1995 — όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου, τόσο χειρότερα φαίνεται να ταιριάζει με τα δεδομένα σημεία. Το θέμα εδώ είναι η διαφορά μεταξύ

- σημείων *παρεμβολής εντός* του διαστήματος όπου ταιριάζουν τα δεδομένα σημεία και
- σημείων *παρεκβολής (πρόβλεψης) εκτός* του διαστήματος αυτού.

	Έτος 2000 Πρόβλεψη	Σφάλμα
Γραμμικό	6.104	−0.021
Τετραγωνικό	6.228	−0.145
Κυβικό	6.028	+0.055
Τέταρτου βαθμού	5.976	+0.107
Ηνωμένα Έθνη	6.083	

ΣΧΗΜΑ 8.7.5 Προβλέψεις για τον παγκόσμιο πληθυσμό του 2000 .



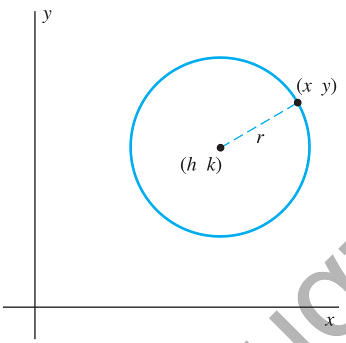
ΣΧΗΜΑ 8.7.6 Σύγκριση των δεδομένων του παγκόσμιου πληθυσμού και των πολυωνύμων παρεμβολής $P_n(t)$ για $t = 1, 2, 3, 4$.

Και τα τέσσερα πολυώνυμα φαίνεται να κάνουν καλά τη δουλειά της παρεμβολής, αλλά παραδόξως, όσο υψηλότερος είναι ο βαθμός, τόσο χειρότερη είναι η φαινομενική ακρίβεια της παρεκβολής (πρόβλεψης). Η εξαιρετικά αμφίβολη ακρίβεια της παρεκβολής (πρόβλεψης) των δεδομένων εκτός του διαστήματος παρεμβολής έχει σημαντικές επιπτώσεις. Για παράδειγμα, σκεφτείτε ένα ρεπορτάζ σχετικά με το ότι, όταν ένα υποτιθέμενο καρκινογόνο δόθηκε σε ποντίκια σε επαρκείς ποσότητες για να σκοτώσει έναν ελέφαντα, τα ποντίκια εμφάνισαν καρκίνο. Επομένως, μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι μέτριες ποσότητες του καρκινογόνου αυτού μπορεί να προκαλέσουν καρκίνο στον άνθρωπο. Ένας ακόμα ισχυρισμός θα μπορούσε να είναι ότι αν 1 μέρος ανά δισεκατομμύριο του καρκινογόνου αυτού στο περιβάλλον σκοτώνει 1 άτομο, τότε, 1 μέρος ανά εκατομμύριο (χίλιες φορές περισσότερο) θα σκοτώσει 1.000 ανθρώπους. Τέτοια επιχειρήματα μπορεί να εμφανίζονται συχνά, αλλά πιθανότατα υπάρχουν περιπτώσεις παρεκβολής (πρόβλεψης) πέρα από το φάσμα της ακρίβειας. Το συμπέρασμα είναι ότι η παρεμβολή είναι αρκετά ασφαλής — αν και καθόλου ασφαλής η περίπτωση σφάλματος — αλλά η γενίκευση είναι επικίνδυνη.

Γεωμετρικές Εφαρμογές

Σε αντίθεση με την πληθυσμιακή πρόβλεψη, υπάρχουν ενδιαφέρουσες περιπτώσεις όπου η προσαρμογή καμπύλης είναι ακριβής. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι «δύο σημεία καθορίζουν μια γραμμή» στο επίπεδο σημαίνει ότι, όταν προσαρμόζουμε τη γραμμική συνάρτηση $y = a + bx$ σε δύο δεδομένα σημεία, έχουμε ακριβώς τη μία και μοναδική ευθεία γραμμή στο επίπεδο που διέρχεται από αυτά σημεία. Ομοίως, «τρία σημεία καθορίζουν έναν κύκλο», το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει ένας και μόνον ένας κύκλος στο επίπεδο που περνά από τρία σημεία τα οποία δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Για να βρούμε αυτόν τον συγκεκριμένο κύκλο, ας θυμηθούμε ότι η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο (h, k) και ακτίνα r είναι

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{(Σχήμα 3.7.7).} \tag{8}$$



ΣΧΗΜΑ 8.7.7 Ο κύκλος με κέντρο (h, k) και ακτίνα r.

Με απλοποίηση έχουμε

$$(x^2 - 2hx + h^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = r^2,$$

δηλαδή,

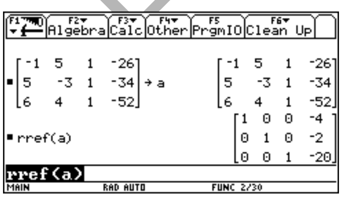
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

(όπου$A = -2h$, $B = -2k$, και $C = h^2 + k^2 - r^2$) είναι η γενική εξίσωση του κύκλου στο επίπεδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος ορίζεται από τα σημεία $P(-1, 5)$, $Q(5, -3)$, και $R(6, 4)$.

Λύση Με αντικατάσταση των συντεταγμένων xy καθενός από τα τρία σημεία P, Q, και R στην (9) μας δίνει τις τρεις εξισώσεις

$$\begin{aligned} -A + 5B + C &= -26 \\ 5A - 3B + C &= -34 \\ 6A + 4B + C &= -52. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 8.7.8 Η αριθμομηχανή TI-89 επιλύει το 3×3 σύστημα του Παραδείγματος 6.

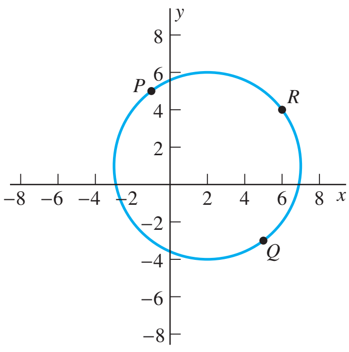
Με μείωση της αντίστοιχης επαυξημένης μήτρας των συντελεστών σε μειωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών (Σχ. 3.7.8) έχουμε $A = -4$, $B = -2$, και $C = -20$. Έτσι λοιπόν η επιθυμητή εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

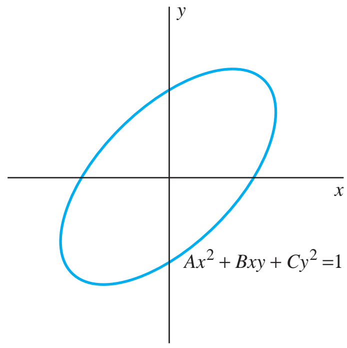
Για να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του, συμπληρώνουμε τα τετράγωνα στα x και y και έχουμε

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Έτσι λοιπόν ο κύκλος έχει κέντρο $(2, 1)$ και ακτίνα 5 (Σχήμα 8.7.9).



ΣΧΗΜΑ 8.7.9 Ο κύκλος του Παραδείγματος 6.



ΣΧΗΜΑ 8.7.10 Μια κεντρική έλλειψη η οποία έχει περιστραφεί.

Τρία κατάλληλα στοιχεία στο επίπεδο καθορίζουν επίσης και έναν **κώνο** με μια εξίσωση της μορφής

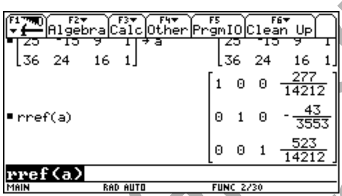
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1. \tag{10}$$

Αυτή είναι μια κωνική τομή η οποία έχει περιστραφεί—μια έλλειψη, παραβολή, ή υπερβολή—με κέντρο την αρχή του συστήματος των αξόνωνxy. Στο Σχήμα 3.7.10 βλέπουμε μία τυπική έλλειψη η οποία έχει περιστραφεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Βρείτε την εξίσωση του κώνου η οποία περνάει από τα ίδια τρία σημεία $P(-1,5)$, $Q(5,-3)$, και $R(6,4)$ του Παραδείγματος 6.

Λύση Με αντικατάσταση των συντεταγμένων xy για κάθε ένα από τα τρία σημεία P, Q, και R στην (10) έχουμε το γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων

$$\begin{aligned} A - \ \ 5B + 25C &= 1 \\ 25A - 15B + \ \ 9C &= 1 \\ 36A + 24B + 16C &= 1 \end{aligned} \tag{11}$$



ΣΧΗΜΑ 8.7.11 Η λύση από αριθμομηχανή TI-89 της μειωμένης κλιμακωτής μορφής γραμμών της επαυξημένης μήτρας συντελεστών στην (11).

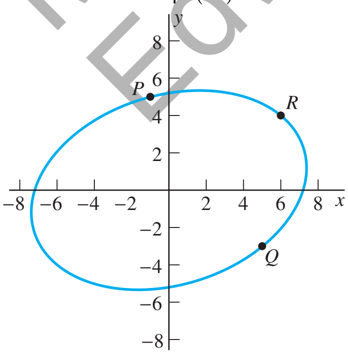
με τρεις αγνώστους A, B, και C. Μείωση της αντίστοιχης επαυξημένης μήτρας συντελεστών σε μειωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών (Σχήμα 8.7.11) μας δίνει

$$A = \frac{277}{14212}, \quad B = -\frac{172}{14212}, \quad \text{και} \quad C = \frac{523}{14212}.$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές των συντελεστών στην (10) και πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με τον κοινό παρονομαστή 14212, έχουμε την επιθυμητή εξίσωση

$$277x^2 - 172xy + 523y^2 = 14212 \tag{12}$$

του κώνου. Η αποτύπωση από υπολογιστή στο Σχήμα 8.7.12 επιβεβαιώνει ότι αυτή η έλλειψη η οποία έχει περιστραφεί περνάει πράγματι και από τα τρία σημεία P, Q, και R.



ΣΧΗΜΑ 8.7.12 Κεντρική έλλειψη που περνάει από τα σημεία P, Q, και R του Παραδείγματος 7.

8.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 10, δίνονται $n+1$ σημεία. Βρείτε το πολυώνυμο n βαθμού $y = f(x)$ που περνάει από τα σημεία αυτά.

1. $(1, 1)$ και $(3, 7)$

2. $(-1, 11)$ και $(2, -10)$

3. $(0, 3)$, $(1, 1)$, και $(2, -5)$

4. $(-1, 1)$, $(1, 5)$, και $(2, 16)$

5. $(1, 3)$, $(2, 3)$, και $(3, 5)$

6. $(-1, -1)$, $(3, -13)$, και $(5, 5)$

7. $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, και $(2, -4)$

8. $(-1, 3)$, $(0, 5)$, $(1, 7)$, και $(2, 3)$

9. $(-2, -2)$, $(-1, 2)$, $(1, 10)$, και $(2, 26)$

10. $(-1, 27)$, $(1, 13)$, $(2, 3)$, και $(3, -25)$

Δίνονται τρία σημεία για καθένα από τα Προβλήματα 11-14. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που ορίζεται από τα σημεία αυτά, το κέντρο και την ακτίνα του.

11. $(-1, -1)$, $(6, 6)$, και $(7, 5)$

12. $(3, -4)$, $(5, 10)$, και $(-9, 12)$

13. $(1, 0)$, $(0, -5)$, και $(-5, -4)$

14. $(0, 0)$, $(10, 0)$, και $(-7, 7)$

Στα Προβλήματα 15 έως 18, βρείτε την εξίσωση της κεντρικής έλλειψης η οποία διέρχεται από τα τρία σημεία που δίνονται.

15. $(0, 5)$, $(5, 0)$, και $(5, 5)$

16. $(0, 5)$, $(5, 0)$, και $(10, 10)$

17. $(0, 1)$, $(1, 0)$, και $(10, 10)$

18. $(0, 4)$, $(3, 0)$, και $(5, 5)$

19. Βρείτε την καμπύλη της μορφής $y = A + (B/x)$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $(1, 5)$ και $(2, 4)$.

20. Βρείτε την καμπύλη της μορφής $y = Ax + (B/x) + (C/x^2)$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $(1, 2)$, $(2, 20)$, και $(4, 41)$.

Μια σφαίρα στον χώρο με ***κέντρο*** *(h, k, l) και* ***ακτίνα*** *r έχει την εξίσωση*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

Τέσσερα σημεία στο χώρο φτάνουν για να ορίσουν τις τιμές των h, k, l, και r. Στα Προβλήματα 21 και 22, βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της σφαίρας που διέρχεται από τα τέσσερα σημεία P, Q, R, και S. Υπόδειξη: αντικαταστήστε στην εξίσωση της σφαίρας κάθε τριάδα συντεταγμένων για να βρείτε τις τέσσερις εξισώσεις ως προς h, k, l, και r. Για να λύσετε τις εξισώσεις αυτές, αφαιρέστε την πρώτη από καθεμία από τις υπόλοιπες τρεις. Πόσοι άγνωστοι απομένουν στις τρεις εξισώσεις που προκύπτουν·

21. $P(4, 6, 15)$, $Q(13, 5, 7)$, $R(5, 14, 6)$, $S(5, 5, -9)$

22. $P(11, 17, 17)$, $Q(29, 1, 15)$, $R(13, -1, 33)$, $S(-19, -13, 1)$

Τα Προβλήματα 23-34 προορίζονται για αριθμομηχανή ή υπολογιστή και έχουν βασιστεί στα απογραφικά στοιχεία των ΗΠΑ που εμφανίζονται στον πίνακα του Σχήματος 8.7.13, όπως αυτά καταγράφονται ανά περιφέρεια σε εκατομμύρια για τα έτη-1990. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε www.census.gov/population/ensusdata/table-16.pdf. Στα Προβλήματα 23-26, προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε τετραγωνικό πολυώνυμο στις πληθυσμιακές τιμές του 1970, 1980, και 1990 για τις ακόλουθες περιφέρειες.

23. Βορειοανατολική

24. Μεσοδυτική

25. Νότια

26. Δυτική

27–30. Κάντε το ίδιο όπως στα Προβλήματα 23–26, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε κυβικό πολυώνυμο στις πληθυσμιακές τιμές του 1960, 1970, 1980, και 1990 για τις ίδιες περιφέρειες.

31–34. Κάντε το ίδιο όπως στα Προβλήματα 23–26, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε συνάρτηση τέταρτου βαθμού στις πληθυσμιακές τιμές του 1950, 1960, 1970, 1980, και 1990 για τις ίδιες περιφέρειες.

35. Εξηγήστε γιατί η εξίσωση της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

διέρχεται από τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), και (x_3, y_3) ενός τετραγωνικού πολυωνύμου της μορφής $y = Ax^2 + Bx + C$.

36. Αναπτύξτε την ορίζουσα του Προβλήματος 35 για να βρείτε την παραβολή η οποία διέρχεται από τα σημεία $(1, 3)$, $(2, 3)$, και $(3, 7)$.

37. Εξηγήστε γιατί η εξίσωση της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

διέρχεται από τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), και (x_3, y_3) ενός κύκλου της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

38. Αναπτύξτε την ορίζουσα του Προβλήματος 37 για να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα τρία σημεία $(3, -4)$, $(5, 10)$, και $(-9, 12)$. Στη συνέχεια βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

	1950	1960	1970	1980	1990
Βορειοανατολικά	39.478	44.678	49.061	49.137	50.809
Μεσοδυτικά	44.461	51.619	56.590	58.867	59.669
Νότια	47.197	54.973	62.813	75.367	85.446
Δυτικά	20.190	28.053	34.838	43.171	52.786
Η.Π.Α.	151.326	179.323	203.302	226.542	248.710

ΦΙΓΥΡΕ 8.7.13.

39. Εξηγήστε γιατί η εξίσωση της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

διέρχεται από τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), και (x_3, y_3) ενός κώνου της μορφής $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$.

40. Αναπτύξτε την ορίζουσα του Προβλήματος 39 για να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που διέρχεται από τα τρία σημεία $(0, 4)$, $(3, 0)$, και $(5, 5)$.

8.8 Θεωρία Οριζουσών

Η απόδειξη του θεωρήματος για το ανάπτυγμα γραμμών και στηλών (Θεώρημα 1 στην Ενότητα 8.6) περιλαμβάνει μια εναλλακτική ερμηνεία των οριζουσών η οποία σε πιο προηγμένες προσεγγίσεις αντιμετωπίζεται συνήθως ως ο αρχικός ορισμός. Εξετάστε το παρακάτω σχήμα για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας 3×3 :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Οι δύο πρώτες στήλες της $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ επαναλαμβάνονται από τα δεξιά. Είναι εύκολο να επαληθεύσετε ότι η $\det \mathbf{A}$ είναι ίση με το άθροισμα των τριών γινομένων κατά μήκος των διαγωνίων που υποδεικνύονται και έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω και *δεξιά*, μείον τα αθροίσματα των γινομένων κατά μήκος των διαγωνίων που έχουν κατεύθυνση προς τα κάτω και *αριστερά*:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned} \tag{1}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η παραπάνω τεχνική δείχνει να λειτουργεί **μόνο** για διαστάσεις 2 και 3. Δεν υπάρχει κάτι παρόμοιο που να δίνει σωστά αποτελέσματα για μια $n \times n$ ορίζουσα με $n \geq 4$.

Σημειώνουμε ότι κάθε ένας από τους έξι όρους από τα δεξιά στην (1) είναι της μορφής $\pm a_{1i}a_{2j}a_{3k}$, όπου $(i \;\; j \;\; k)$ είναι μια **μετάθεση** των $(1 \;\; 2 \;\; 3)$. Δηλαδή, η τριάδα $(i \;\; j \;\; k)$ αποτελείται από τρεις διαφορετικούς αριθμούς 1, 2, και 3 γραμμένους σε μια συγκεκριμένη σειρά. Οι έξι όροι στην (1) αντιστοιχούν στις έξι πιθανές μεταθέσεις των $(1 \;\; 2 \;\; 3)$:

$$\begin{array}{ccc} (1 \;\; 2 \;\; 3) & (2 \;\; 1 \;\; 3) & (3 \;\; 1 \;\; 2) \\ (1 \;\; 3 \;\; 2) & (2 \;\; 3 \;\; 1) & (3 \;\; 2 \;\; 1). \end{array} \tag{2}$$

Τα πρόσημα + και − στην (1) μπορούν επίσης να εξηγηθούν με όρους των μεταθέσεων αυτών. Μια **μεταφορά** σε μια ακολουθία αντικειμένων (όπως είναι οι αριθμοί 1, 2, 3) είναι η διαδικασία *ανταλλαγής θέσεων* σε ένα ζευγάρι της ακολουθίας. Για παράδειγμα, η διαδικασία $(1 \;\; 2 \;\; 3) \to (1 \;\; 3 \;\; 2)$ είναι η μεταφορά που αντιστοιχεί στην ανταλλαγή θέσεων των 2 και 3. Χρειάζονται όμως δύο μεταφορές για να αλλάξουμε την $(1 \;\; 2 \;\; 3)$ στην μετάθεση $(3 \;\; 1 \;\; 2)$:

$$(1 \;\; 2 \;\; 3) \to (3 \;\; 2 \;\; 1) \to (3 \;\; 1 \;\; 2).$$

Δεδομένης μιας μετάθεσης $P = (i \;\; j \;\; k)$ των $(1 \;\; 2 \;\; 3)$, συμβολίζουμε με $s(P)$ τον *ελάχιστο* αριθμό μεταφορών που χρειάζονται για να αλλάξουμε την $(1 \;\; 2 \;\; 3)$ στην $(i \;\; j \;\; k)$. Για τις έξι μεταθέσεις στην (2) είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε ότι

$$\begin{array}{lll} s(1 \;\; 2 \;\; 3) = 0, & s(2 \;\; 1 \;\; 3) = 1, & s(3 \;\; 1 \;\; 2) = 2, \\ s(1 \;\; 3 \;\; 2) = 1, & s(2 \;\; 3 \;\; 1) = 2, & s(3 \;\; 2 \;\; 1) = 1. \end{array} \tag{3}$$

Αν εξετάσετε κάθε έναν από αυτούς τους έξι όρους της (1) θα βρείτε ότι το *πρόσημο* του $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ είναι $(-1)^{s(P)}$, όπου $P = (i \;\; j \;\; k)$. Έτσι, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (1) συνοπτικά ως

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P} (-1)^{s(P)} a_{1i}a_{2j}a_{3k}, \tag{4}$$

όπου υπάρχει ένας όρος από τα δεξιά για κάθε πιθανή μετάθεση $P = (i \ \ j \ \ k)$ της $(1 \ \ 2 \ \ 3)$.

Ο τύπος στην (4) γενικεύεται σε ορίζουσες μεγαλύτερων διαστάσεων. Αν η $\mathbf{A}$ είναι μια μήτρα $n \times n$, τότε

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P} (-1)^{s(P)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{5}$$

όπου υπάρχει ένας όρος στα δεξιά για κάθε πιθανή μετάθεση $P = (i_1 \ \ i_2 \ \ \cdots \ \ i_n)$ της $(1 \ \ 2 \ \ \cdots \ \ n)$, και με $s(P)$ συμβολίζουμε τον ελάχιστο αριθμό των μεταφορών που απαιτούνται για να αλλάξουμε την $(1 \ \ 2 \ \ \cdots \ \ n)$ στην $(i_1 \ \ i_2 \ \ \cdots \ \ i_n)$. Ο τύπος στην (5) μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή για το n. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για ορίζουσες $(n-1)\times(n-1)$, ο τύπος μπορεί να επιβεβαιωθεί και για μια μήτρα $n \times n$ $\mathbf{A}$ αναπτύσσοντας κατά μήκος της πρώτης γραμμής.Είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι αυτό δίνει όρους της μορφής $\pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, αλλά φαίνεται κάπως πιο δύσκολο να ελέγξουμε το πρόσημο. Τέλος, η απόδειξη του θεωρήματος του αναπτύγματος συμπαραγουσών συνίσταται στο να αποδείξουμε ότι το ανάπτυγμα των συμπαραγουσών της $\det \mathbf{A}$ κατά μήκος *οποιασδήποτε* γραμμής *ή* στήλης της $\mathbf{A}$ είναι σύμφωνο με τον τύπο (5). Οι λεπτομέρειές είναι χρονοβόρες και παραλείπονται.

Ορίζουσες και Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Όπως περιγράψαμε στην Ενότητα 8.6, η ορίζουσα μιας τετραγωνικής μήτρας $\mathbf{A}$ μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από το ανάπτυγμα της $\det \mathbf{A}$ κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης της$\mathbf{A}$. Επειδή αυτός ο υπολογισμός απαιτεί πολλές πράξεις, είναι πιο αποτελεσματικό να μετατρέψουμε την μήτρα $\mathbf{A}$ στην κλιμακωτή της μορφή $\mathbf{R}$. Καθώς λοιπόν κάθε τετραγωνική μήτρα σε κλιμακωτή μορφή είναι (άνω) τριγωνική, η ορίζουσα της κλιμακωτής μορφής $\mathbf{R}$ είναι απλά το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων της. Αλλά επειδή έχουμε αλλάξει τη μήτρα $\mathbf{A}$ μετατρέποντάς την σε $\mathbf{R}$,η ερώτηση είναι: Ποιες επιπτώσεις έχουν οι γραμμοπράξεις στην ορίζουσα της $\mathbf{A}$;

Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζονται οι ιδιότητες 1, 2, και 5 της Ενότητας 8.6 και περιγράφεται ο τρόπος παρακολούθησης των επιπτώσεων που έχουν οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στην ορίζουσα $\det \mathbf{A}$ καθώς την μετατρέπουμε την $\mathbf{A}$ στην κλιμακωτή της μορφή. Χρησιμοποιούμε εδώ τον συνοπτικό συμβολισμό.

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A}$$

για την ορίζουσα $\mathbf{A}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Η Επίδραση των Στοιχειωδών Πράξεων Γραμμών

Έστω $\mathbf{A}$ μια τετραγωνική μήτρα και $\mathbf{B}$ η μήτρα που προκύπτει εφαρμόζοντας μία από τις τρεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στην μήτρα $\mathbf{A}$.

Τύπος 1ος: Αν η $\mathbf{B}$ προκύπτει *διαιρώντας* μια γραμμής της μήτρας $\mathbf{A}$ με k,τότε

$$|\mathbf{A}| = k|B|. \tag{6}$$

Τύπος 2ος: Αν η $\mathbf{B}$ προκύπτει με αντιμετάθεση δύο γραμμών της $\mathbf{A}$, τότε

$$|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|. \tag{7}$$

Τύπος 3ος: Αν η $\mathbf{B}$ προκύπτει προσθέτοντας ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής της $\mathbf{A}$ σε μια άλλη, τότε

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|. \tag{8}$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει πώς πρέπει να είναι ο υπολογισμός της $\det \mathbf{A}$ χρησιμοποιώντας τις γραμμοπράξεις για να ανάγουμε την $\mathbf{A}$ στην κλιμακωτή μορφή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$ Έχουμε διαιρέσει την γραμμή 1 με το 2.

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$ Έχουμε προσθέσει 4 φορές την γραμμή 1 στην γραμμή 2, και −3 φορές την γραμμή 1 στην γραμμή 4.

$$= +2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$ Έχουμε προσθέσει 3 φορές την γραμμή 4 στην γραμμή 2, και 2 φορές την γραμμή 4 στην γραμμή 3.

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \end{vmatrix}$$ Έχουμε εναλλάξει τις γραμμές 2 και 4.

$$= -22\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 17 & -2 \end{vmatrix}$$ Έχουμε διαιρέσει την γραμμή 3 με το 11.

$$= -22\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{80}{11} \end{vmatrix}$$ Έχουμε προσθέσει −17 φορές την γραμμή 3 στην γραμμή 4.

$$=(-22)(1)(-2)(1)(\tfrac{80}{11}) = 320.$$

Αν μια τετραγωνική μήτρα **A** έχει μόνο *ακέραια* στοιχεία, είναι πάντα δυνατό να κάνουμε την αναγωγή της στην κλιμακωτή μορφή χωρίς να δημιουργήσουμε κλάσματα. Στους υπολογισμούς των οριζουσών (σε αντίθεση με την επίλυση των γραμμικών συστημάτων), έχουμε την πρόσθετη ευελιξία να χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς για τις *στήλες*. Τα αποτελέσματά τους είναι ακριβώς όμοια με εκείνα των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, όπως περιγράφονται στο Θεώρημα 1. Στο Παράδειγμα 2, βλέπουμε ακριβώς αυτό κάνοντας τους υπολογισμούς διαφορετικά από το Παράδειγμα 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \end{vmatrix}$$ (Όπως στο Παράδειγμα 1.)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & -2 \end{vmatrix}$$ Έχουμε προσθέσει την γραμμή 4 στη γραμμή 3.

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$ Έχουμε προσθέσει (−3) φορές την γραμμή 3 στην γραμμή 4.

$$= (-2)(1)(-2)(5)(16) = 320.$$

Ακόμα μια εναλλακτική είναι να μετατρέψουμε μόνο τις πρώτες $n-2$ γραμμές μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$. Τότε μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε την ορίζουσα 2×2 που απομένει στην κάτω δεξιά γωνία. Το αποτέλεσμα είναι η $\det \mathbf{A}$ με πολλαπλασιασμό της 2×2 ορίζουσας με τους προηγούμενους παράγοντες και τα διαγώνια στοιχεία. Έτσι,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 17 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(1)(-2)\begin{vmatrix} 11 & -6 \\ 17 & -2 \end{vmatrix} = (4)(-22+102) = 320.$$

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα

Ξεκινήσαμε την Ενότητα 8.6 με την παρατήρηση ότι μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η ορίζουσά της είναι μη μηδενική: $|\mathbf{A}| \neq 0$. Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει και για μήτρες $n \times n$. Αυτή η σύνδεση ανάμεσα στις ορίζουσες και στην αντιστρεψιμότητα συνδέεται άμεσα με το γεγονός ότι η συνάρτηση της ορίζουσας «ακολουθεί» των πολλαπλασιασμό με την έννοια ότι

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \tag{9}$$

Αν η $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μήτρες $n \times n$. Το πρώτο μας βήμα είναι να δείξουμε ότι η εξίσωση (9) ισχύει αν η $\mathbf{A}$ είναι μια *στοιχειώδης μήτρα* που προσδιορίζεται από την $n \times n$ ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$ εφαρμόζοντας έναν απλό μετασχηματισμό γραμμών.

ΛΗΜΜΑ

Αν $\mathbf{B}$ είναι μια μήτρα $n \times n$ και η $\mathbf{E}$ είναι μια στοιχειώδης μήτρα $n \times n$ τότε

$$|\mathbf{EB}| = |\mathbf{E}|\,|\mathbf{B}|. \tag{10}$$

Απόδειξη Αυτό είναι απλά μια επαναδιατύπωση του Θεωρήματος 1. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η $\mathbf{E}$ προκύπτει από την $\mathbf{I}$ με πολλαπλασιασμό της p γραμμής με c, έτσι ώστε $|\mathbf{E}| = c$. Τότε το Θεώρημα 5 της Ενότητας 8.5 μας λέει ότι το γινόμενο $\mathbf{EB}$ είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της p γραμμής της $\mathbf{B}$ με c. Επομένως,

$$|\mathbf{EB}| = c|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|\,|\mathbf{B}|,$$

και έτσι έχουμε επιβεβαιώσει την Εξίσωση (10) για την πρώτη από τις τρεις στοιχειώδεις μήτρες. Η επιβεβαίωση των άλλων δύο τύπων είναι παρόμοια. ◆

Έστω τώρα μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ την αντιστρεψιμότητα της οποίας θέλουμε να εξετάσουμε, και έστω $\mathbf{R}$ είναι η *κλιμακωτή μορφή* της μήτρας $\mathbf{A}$. Αν οι στοιχειώδεις μήτρες $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_k$ αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που ανάγουν την $\mathbf{A}$ στην $\mathbf{R}$, τότε

$$\mathbf{F}_k \cdots \mathbf{F}_2\mathbf{F}_1\mathbf{A} = \mathbf{R} \tag{11}$$

από το Θεώρημα 5 της Ενότητας 8.5. Αν θυμηθούμε ότι μια στοιχειώδης μήτρα είναι αντιστρέψιμη (Ενότητα 8.5), μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση (11) ως

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{R}, \tag{12}$$

όπου κάθε $\mathbf{E}_i = (\mathbf{F}_i)^{-1}$ είναι μια στοιχειώδης μήτρα. Επομένως τώρα, από k εφαρμογές του λήμματος, προκύπτει ότι

$$\mathbf{A} = |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2| \cdots |\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{R}|. \tag{13}$$

Αυτή η σχέση είναι το κλειδί τόσο για την απόδειξη της (9) όσο και για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα
Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Απόδειξη Αν (όπως προηγουμένως) η $\mathbf{R}$ είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της $\mathbf{A}$, τότε το Θεώρημα 6 της Ενότητας 8.5 μας δίνει ότι

$$\text{η } \mathbf{A} \text{ είναι αντιστρέψιμη} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}. \tag{14}$$

Επειδή η $\mathbf{R}$ είναι *τετραγωνική* ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα,βλέπουμε ότι *είτε* η $\mathbf{R}$ είναι η ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$ και η $|\mathbf{R}| = 1$, *ή* η $\mathbf{R}$ έχει όλες της γραμμές της μηδέν και, τελικά, $|\mathbf{R}| = 0$. Επομένως,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad |\mathbf{R}| \neq 0. \tag{15}$$

Τελικά, επειδή $|\mathbf{E}| \neq 0$ αν η $\mathbf{E}$ είναι στοιχειώδης μήτρα, έχουμε από την Εξίσωση (13) ότι

$$|\mathbf{R}| \neq 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad |\mathbf{A}| \neq 0. \tag{16}$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα στις (14), (15), και (16), βλέπουμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν $|\mathbf{A}| \neq 0$. ◆

Έτσι τώρα μπορούμε να προσθέσουμε τη ιδιότητα $\det \mathbf{A} \neq 0$ στην λίστα των ισοδύναμων ιδιοτήτων μιας ιδιάζουσας μήτρας όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο Θεώρημα 7 της Ενότητας 8.5. Πράγματι, *ορίζουμε* μια τετραγωνική μήτρα $\mathbf{A}$ να είναι ιδιάζουσα αν και μόνο αν $\det \mathbf{A} \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Ορίζουσες και Γινόμενο Μητρών
Αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι δύο $n \times n$ μήτρες, τότε

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|. \tag{9}$$

Απόδειξη Αν $\mathbf{R}$ είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της $\mathbf{A}$, τότε βλέπουμε ότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{R}, \tag{12}$$

όπου $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots,$ και $\mathbf{E}_k$ είναι στοιχειώδεις μήτρες. Έτσι

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{RB}.$$

Τώρα παίρνουμε τις ορίζουσες και των δύο πλευρών, χρησιμοποιώντας το λήμμα που παρουσιάσαμε νωρίτερα:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{RB}| && \text{(λήμμα μία φορά)}\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{RB}| && \text{(λήμμα δύο φορές)}\\
&= |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3 \cdots \mathbf{E}_k\mathbf{RB}|. && \text{(λήμμα τρεις φορές)}
\end{aligned}$$

Μετά από $2k - 1$ βήματα, έχουμε ότι

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k|\,|\mathbf{RB}|. \tag{17}$$

Το υπόλοιπο της απόδειξης εξαρτάται από το αν η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη ή όχι.
Αν η $\mathbf{A}$ *είναι* αντιστρέψιμη, τότε $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, οπότε η Εξίσωση (12) δίνει

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_k$$

και επίσης $\mathbf{RB} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$. Σε αυτή την περίπτωση η σημασία της Εξίσωσης (17) είναι ακριβώς ότι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$.

Αν η $\mathbf{A}$ *δεν* είναι αντιστρέψιμη, τότε $|\mathbf{A}| = 0$ (από το Θεώρημα 2). Ακόμα, όπως σημειώσαμε προηγουμένως, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\mathbf{R}$ της $\mathbf{A}$ έχει όλες τις γραμμές μηδενικές σάυτή την περίπτωση. Έτσι από τον ορισμό του γινομένου μητρών προκύπτει ότι το γινόμενο $\mathbf{RB}$ έχει μια μηδενική γραμμή, επομένως $|\mathbf{RB}| = 0$. Στην περίπτωση της Εξίσωσης (17) έχουμε ότι $|\mathbf{AB}| = 0$. Επειδή και οι δύο $|\mathbf{A}| = 0$ και $|\mathbf{AB}| = 0$, η εξίσωση $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ ισχύει, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ◆

Ο κανόνας του Cramer και η Αντίστροφη Μήτρα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{18}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Υποθέτουμε ότι η μήτρα των συντελεστών $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμη, έτσι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η μοναδική λύση $\mathbf{x}$ της (18) υπάρχει. Η ερώτηση είναι πως να γράψουμε το $\mathbf{x}$ κατευθείαν με όρους των συντελεστών a_{ij} και των σταθερών b_i. Στην εξήγηση που ακολουθεί θεωρούμε το $\mathbf{x}$ ως σταθερό (αν και άγνωστο) διάνυσμα.

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ τα διανύσματα στήλες της $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$, τότε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Από το Γεγονός 1 της Ενότητας 8.5, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση (18) ως εξής

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Έτσι το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$ εκφράζεται με όρους των $x_1, x_2, \dots, x_n$ του διανύσματος της λύσης $\mathbf{x}$ και των διανυσμάτων στήλες της $\mathbf{A}$ ως

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j. \tag{21}$$

Το τέχνασμα για την εύρεση του i αγνώστου x_i είναι να υπολογίσουμε την ορίζουσα της μήτρας

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{22}$$

που λαμβάνουμε αντικαθιστώντας την i στήλη $\mathbf{a}_i$ της $\mathbf{A}$ με το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (21) για να αντικαταστήσουμε το $\mathbf{b}$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & x_j\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} && \text{(από την Ιδιότητα 4 των οριζουσών)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} && \text{(από την Ιδιότητα 1 των οριζουσών).}
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι, στον j όρο του αθροίσματος, το διάνυσμα $\mathbf{a}_j$ εμφανίζεται στην i θέση. Έτσι έχουμε βρει ότι

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} &= x_1 \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\
&+ x_2 \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
&+ x_i \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
&+ x_n \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Από τις n ορίζουσες στο δεξί μέρος, όλες εκτός από την i έχουν δύο ίδιες στήλες και έτσι είναι ίσες με το μηδέν. Ο συντελεστής του x_i στον i όρο είναι απλά

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.$$

Κατά συνέπεια, ένα αποτέλεσμα του υπολογισμού μας είναι ότι

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = x_i|\mathbf{A}|. \tag{23}$$

Έτσι, παίρνουμε τον επιθυμητό τύπο για το x_i αφού διαιρέσουμε κάθε μέλος με $|\mathbf{A}| \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Κανόνας του Cramer

Ας θεωρήσουμε ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τότε το i στοιχείο της μοναδικής λύσης $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ δίνεται από

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$

όπου (στην τελευταία ισότητα) το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$ αντικαθιστά το i διάνυσμα στήλη $\mathbf{a}_i$ της $\mathbf{A}$.

Αντίστροφη και Ανάστροφη Μήτρα

Τώρα χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Cramer για να φτιάξουμε έναν κλειστό τύπο για τον υπολογισμό της αντίστροφης $\mathbf{A}^{-1}$ της αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{A}$. Αρχικά χρειάζεται να ξαναγράψουμε τον κανόνα του Cramer πιο συνοπτικά. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στον αριθμητή της Εξίσωσης (24) κατά μήκος της iτ στήλης έχουμε

$$x_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni}), \tag{25}$$

επειδή η συμπαράγουσα b_p είναι απλά η συμπαράγουσα A_{pi} του a_{pi} στην $|\mathbf{A}|$. Ο τύπος της Εξίσωσης (25) δίνει το διάνυσμα της λύσης

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}.$$

Τότε ο ορισμός του γινομένου μητρών δίνει

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{26}$$

για τη λύση $\mathbf{x}$ της $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Παρατηρήστε ότι οι διπλοί δείκτες στην (26) έχουν αντιστραφεί και το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης είναι το A_{ji} (αντί του A_{ij}). Βλέπουμε λοιπόν στην (26) την *ανάστροφη* της **μήτρας των συμπαραγώγων** $\begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}$ μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$. Η ανάστροφη μήτρα των συμπαραγώγων της $\mathbf{A}$ ονομάζεται **προσαρτημένη μήτρα** της $\mathbf{A}$ και συμβολίζεται με

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{ji} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Με την βοήθεια αυτού του συμβολισμού, ο κανόνας του Cramer όπως εκφράζεται στην Εξίσωση (26) μπορεί να γραφεί σε μια πολύ απλή μόρφή

$$\mathbf{x} = \frac{\left[A_{ji}\right]\mathbf{b}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{b}}{|\mathbf{A}|}. \tag{28}$$

Από το γεγονός ότι ο τύπος (28) μας δίνει τη μοναδική λύση $\mathbf{x}$ του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έπεται ότι

$$\mathbf{A}\frac{(\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{b}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{b} \tag{29}$$

για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{b}$. Αν γράψουμε

$$\mathbf{C} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \tag{30}$$

για λόγους συντομίας, τότε

$$\mathbf{ACb} = \mathbf{b} \tag{31}$$

για κάθε n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{b}$. Από αυτό προκύπτει ότι (για μια στήλη την φορά, όπως χρησιμοποιήσαμε το Γεγονός 2 στην Ενότητα 8.5) ότι

$$\mathbf{ACB} = \mathbf{B} \tag{32}$$

για κάθε μήτρα $\mathbf{B}$ που έχει n γραμμές. Συγκεκριμένα, με $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ (μια $n \times n$ ταυτοτική μήτρα), βλέπουμε ότι

$$\mathbf{AC} = \mathbf{I}. \tag{33}$$

Επομένως, έχουμε ανακαλύψει ότι η μήτρα $\mathbf{C}$ όπως ορίζεται από την Εξίσωση (30) είναι η αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$ της $\mathbf{A}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Η Αντίστροφη Μήτρα

Η αντίστροφη μήτρα μιας αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{A}$ δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\left[a_{ij}\right]^T}{|\mathbf{A}|}, \tag{34}$$

όπου, όπως συνήθως, A_{ij} είναι ο ij συμπαράγοντας της $\mathbf{A}$—δηλαδή A_{ij} είναι το γινόμενο του $(-1)^{i+j}$ και της ij ελάσσονας ορίζουσας της $\mathbf{A}$.